Satz 1 *Die lineare Resolution ist vollständig (d. h. ist eine Formel F unerfüllbar, so existiert ein linearer Resolutionsbeweis für F).*

Beweis. Sei F eine unerfüllbare Formel.
z. z.: Existenz eines linearen Resolutionsbeweises für F

Dazu klären wir zunächst den Begriff der *minimal unerfüllbaren Teilformel F' von F*: $F' \subseteq F$ ist minimal unerfüllbar genau dann, wenn das Löschen einer beliebigen Klausel aus F' eine erfüllbare Formel ergibt (und F' selbst unerfüllbar ist).

Nun gilt: Ist F' minimal unerfüllbar, dann sind auch $F'_{|A=1}$ und $F'_{|A=0}$ unerfüllbar (sonst hätten wir eine erfüllende Belegung für F' gefunden). Sei $F''_{|A=1}$ eine minimal unerfüllbare Teilformel von $F'_{|A=1}$. Dann gilt, dass $F''_{|A=1}$ *alle* Klauseln enthält, die von einer Klausel $L_1 \vee \ldots \vee L_k \vee \neg A$ herkommen (das ist $L_1 \vee \ldots \vee L_k$). Denn sonst wäre F' nicht minimal unerfüllbar gewesen, wie man leicht an

$$\begin{aligned} F' &= \overbrace{C_1, C_2, \ldots, C_l}^{\text{ohne } A, \neg A}, \overbrace{D_1 \vee A, \ldots, D_m \vee A}^{\text{ohne } \neg A}, \overbrace{E_1 \vee \neg A, \ldots, E_k \vee \neg A}^{\text{ohne } A} \\ F'_{|A=1} &= C_1, C_2, \ldots, C_l, \qquad\qquad / \qquad\qquad , \qquad E_1, \ldots, E_k \end{aligned}$$

sieht, wobei C_i, D_i, E_i Klauseln sind. Falls $F'_{|A=1}$ unerfüllbar ist nach Löschen eines E_i, so ist auch F' ohne $E_i \vee \neg A$ unerfüllbar. Das widerspricht allerdings der minimalen Unerfüllbarkeit von F'. Somit enthält $F''_{|A=1}$ alle Klauseln, die von $\neg A$ herkommen, falls $F''_{|A=1}$ eine minimal unerfüllbare Teilformel von $F'_{|A=1}$ ist.

Zeigen jetzt: Ist F' minimal unerfüllbar, dann gibt es für jede Klausel C aus F' einen linearen Resolutionsbeweis

$$\begin{array}{ll} C & \leftarrow \text{ Fängt mit } C \text{ an} \\ \Big| & \\ \Big| & \\ [] & \end{array}$$

Wir beweisen dies per Induktion über n, die Anzahl der Variablen in F'.

$n = 0$: [] $\surd$, $n = 1$: dann ist $F' = A \wedge \neg A$ (wegen minimal unerfüllbar). Dann

$$\begin{array}{ccccc} A \;\; \neg A & \qquad & \neg A \;\; A & & \\ \diagdown\!\diagup & & \diagdown\!\diagup & \qquad & \surd \\ [] & & [] & & \end{array}$$

Sei nun $n > 1$. Die Behauptung gelte für jede minimal unerfüllbare Formel mit $\leq n - 1$ Variablen. Sei also F' minimal unerfüllbar mit n Variablen und C eine Klausel von F'. Wählen ein Literal L aus C, etwa $L = A$ ($L = \neg A$ analog). Damit $C = (A \vee \ldots)$. Bilden nun $F'_{|A=0}$, was unerfüllbar ist. Sei $F''_{|A=0}$ eine minimal unerfüllbare Teilformel von $F'_{|A=0}$. Dann gehört der Rest von C, also $C_{|A=0}$ zu $F''_{|A=0}$ (siehe oben). Nun wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf $F''_{|A=0}$ an und erhalten

$$C_{|A=0}$$

$$\Big| \quad \text{Klauseln von } F''_{|A=0}$$

$$[\,]$$

Das ergibt mit Klauseln aus F' den linearen Resolutionsbeweis

$$C = (A \vee \ldots)$$

$$\Big| \quad \text{Klauseln } (\neg A \vee \ldots) \text{ aus } F' \text{ nicht dabei, da nicht in } F'_{|A=0}$$

$$\{A\}$$

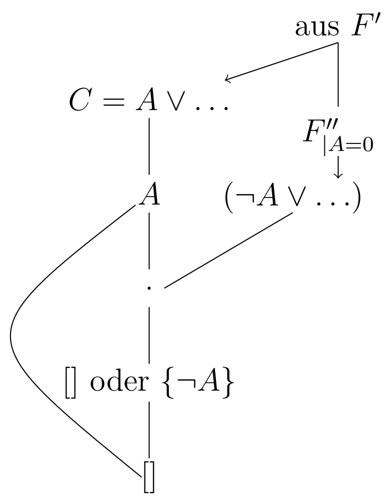
Jetzt betrachten wir $F'_{A=1}$. In $F''_{|A=1}$, minimal unerfüllbare Teilformel von $F'_{|A=1}$, sind alle Klauseln, die von $(\neg A \vee \ldots)$ in F' herkommen, noch dabei und es gibt solche auch. Es existiert ein linearer Resolutionsbeweis von $F''_{|A=1}$ beginnend mit einer solchen Klausel. Mit den Klauseln aus F' haben wir dann

$$\neg A \vee \ldots$$

$$\Big| \quad \text{Klauseln } (A \vee \ldots) \text{ nicht dabei}$$

$$\{\neg A\}$$

Nun können wir alles zu einem linearen Resolutionsbeweis für F zusammenbauen:



$\square$

Damit folgt die Behauptung.