Prof. Dr. A. Goerdt
A. Lanka

TU Chemnitz
Wintersemester 2007/2008
26.10.2005

Theoretische Informatik I

3. Übung

Geben Sie die Lösung der Aufgabe 4 bitte bis zum 02.11.2005 bei Ihrem Übungsleiter ab oder senden Sie sie an ti1-hausaufgaben@informatik.tu-chemnitz.de.

1. Aufgabe:

   a) Sei $c > 1$ eine beliebige Konstante. Zeigen Sie ohne Verwendung der Differentialrechnung, daß es ein $x_0 = x_0(c)$ gibt, so daß für alle $x > x_0$ gilt

   $$2^x > x^c.$$

   b) Folgern Sie aus a), daß für jede noch so große Konstante k und jede noch so kleine Konstante $d > 1$

   i. $d^x > x^k$ ii. $x > (\ln x)^k$ iii. $d^{\sqrt[k]{x}} > x^k$

   gilt, wenn $x > x_0 = x_0(d, k)$ erfüllt ist.

2. Aufgabe:

   Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit mindestens zwei Knoten. Zeigen Sie

   a) Die Summe der Grade aller Knoten ist durch 2 teilbar.

   b) Es gibt stets zwei Knoten, die denselben Grad haben.*

3. Aufgabe:

   Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ wird *bipartit* oder *2-färbbar* genannt, wenn es zwei Mengen V_1 und V_2 gibt, so daß folgendes gilt:

   - $V = V_1 \bigcup V_2$ und $V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$.
   - Für alle Kanten $\{u, v\} \in E$ gilt entweder $u \in V_1$ und $v \in V_2$ oder $u \in V_2$ und $v \in V_1$. Das heißt, es gibt keine Kante, bei der beide Endpunkte zu V_1 oder beide Endpunkte zu V_2 gehören.

   Der Begriff *2-färbbar* wird benutzt, weil man die Knoten des Graphen so mit zwei Farben färben kann, daß keine Kante zwei gleich gefärbte Knoten verbindet.

   a) Geben Sie einen Algorithmus an, der mit einer Laufzeit $O(|V| + |E|)$ erkennt, ob ein gegebener ungerichteter Graph G *2-färbbar* ist. Verwenden Sie die Breitensuche und die von der Breitensuche gelieferten Distanzwerte.*

b) Analog zu 2-färbbaren Graphen sind *3-färbbare* Graphen definiert. Versuchen Sie Ihre Idee aus a) für einen Test auf 3-Färbbarkeit zu übertragen.

c) Geben Sie einen Algorithmus an, der erkennt, ob ein gegebener Graph 3-färbbar ist oder nicht. Bestimmen Sie die Laufzeit Ihres Verfahrens.

4. Aufgabe:

Betrachten Sie folgenden Algorithmus, der als Eingabe einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ erhält.

1. $G' = G$
2. Solange es in G' einen Knoten u mit Grad ≤ 2 gibt
   Entferne u (mit all seinen Kanten) aus G'
3. Falls G' leer ist: Ausgabe 'G ist 3-färbbar'
4. Sonst: Ausgabe 'weiß nicht'

a) Geben Sie G' am Ende von Schritt 2 für den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ E &= \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{4, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}, \{6, 5\}, \{7, 5\}, \{5, 4\}\} \end{aligned}$$

an.

b) Geben Sie einen dreifärbbaren Graphen G an, bei dem obiger Algorithmus die Antwort „weiß nicht“ liefert. Geben Sie auch G' am Ende von Schritt 2 an.

c) Zeigen Sie die Korrektheit des Algorithmus.

Hinweis: Verfolgen Sie den Algorithmus vom Ende her zum Anfang hin.

Hinweis: Schwierige Aufgaben sind mit * gekennzeichnet.