Prof. Dr. A. Goerdt

TU Chemnitz
Wintersemester 2006/2007
09.11.2006

Einführung Quantencomputing

3. Übung

1. Aufgabe:

   Wir betrachten $H^{\otimes n} = H \otimes \ldots \otimes H$, d.h. das n-fache Tensorprodukt der Hadamard-Matrix H.

   a) Ergänzen Sie: $H^{\otimes n}$ ist eine $\ldots \times \ldots$-Matrix.

   b) Zeigen Sie für $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$:

   $$H^{\otimes n}|x_1 \ldots x_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z_1,\ldots,z_n \in \{0,1\}} (-1)^{x_1 z_1 + \ldots + x_n z_n} |z_1 \ldots z_n\rangle.$$

   Verwenden Sie dazu $H^{\otimes n}|x_1 \ldots x_n\rangle = H|x_1\rangle \otimes \ldots \otimes H|x_n\rangle$. Interpretieren Sie die Bitfolgen $x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_n$ als Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$. Was sagt dann die obige Formel aus?

2. Aufgabe:

   a) Zeigen Sie allgemein die Beziehung aus Aufgabe 1(b): Für $m \times m$-Matrizen A, B ist $(A \otimes B)(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) = A|\varphi\rangle \otimes B|\psi\rangle$.

   b) Ergänzen Sie: $A \otimes B$ ist eine $\ldots \times \ldots$-Matrix.

3. Aufgabe:

   Was ergibt sich, wenn wir in das U_f aus dem Deutsch- und dem Deutsch-Josza-Algorithmus mit dem Vektor

   $$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \{0,1\}} |x_1 \ldots x_n 0\rangle = (1, 0, \ldots 1, 0)^T$$

   (Hinweis: der Vektor hat 2^n Einträge, T steht für transponiert) statt mit

   $$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \{0,1\}} \left(|x_1 \ldots x_n\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right)$$

   hineingehen? Können wir durch geeignete Transformationen des Ergebnisses trotzdem das Gewünschte erzielen?

4. Aufgabe:

   Wir betrachten eine Matrix auf $n+1$ qubits, also eine $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-Matrix A. Die Matrix ergebe eine Abbildung, die die ersten n qubits nicht ändert. Also

$$A|x_1 \dots x_n y\rangle = |x_1 \dots x_n\rangle \otimes |\psi\rangle,$$

   wobei $x_i, y \in \{0,1\}$ sind und $|\psi\rangle = |\psi_{x_1 \dots x_n}\rangle$ ein Zustand des $n+1$-ten qubits ist.

   a) Wie sieht A aus?

   b) Wie sieht A aus, wenn $A|yx_1 \dots x_n\rangle = |\psi\rangle \otimes |x_1 \dots x_n\rangle$, d.h. die letzten n qubits bleiben fest?

5. Aufgabe:

   a) Wenn der Inhalt von 2 qubits als $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ darstellbar ist, wobei $|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle$ Werte eines qubits sind, inwieweit sind dann $|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle$ überhaupt eindeutig?

   b) Der Inhalt von $n+m$ qubits ist immer darstellbar als

$$\sum_{x_1,\dots,x_n \in \{0,1\}} |x_1 \dots x_n\rangle \otimes |\varphi_{x_1 \dots x_n}\rangle = \sum_{y_1,\dots,y_m \in \{0,1\}} |\psi_{y_1 \dots y_m}\rangle \otimes |y_1 \dots y_m\rangle,$$

   wobei gilt $\sum_{x_1,\dots,x_n \in \{0,1\}} \||\varphi_{x_1 \dots x_n}\rangle\|^2 = 1$. Zeigen Sie dies! Veranschaulichen Sie die Behauptung am Spaltenvektor.

6. Aufgabe:

   Was kommt heraus, wenn wir am Ende des Deutsch- und des Deutsch-Josza-Algorithmus das ganze Register, d.h. den x- und den y-Wert messen? Wie können wir das Gewünschte ablesen?