Prof. Dr. A. Goerdt

TU Chemnitz
Wintersemester 2006/2007
25.10.2006

Einführung Quantencomputing

2. Übung

1. Aufgabe:

   a) Was berechnet der folgende Schaltkreis, wenn anfangs $|b_1 \dots b_n\rangle = |0 \dots 0\rangle$ ist?

   $$\begin{array}{ccccc} b_1 & \longrightarrow & \boxed{\text{H}} & \longrightarrow & b_1' \\ b_2 & \longrightarrow & \boxed{\text{H}} & \longrightarrow & b_2' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_n & \longrightarrow & \boxed{\text{H}} & \longrightarrow & b_n' \end{array}$$

   Das Kästchen mit dem H soll dabei das Hadamard-Schaltelement symbolisieren.

   b) Was ergibt sich bei beliebigen $|b_1 \dots b_n\rangle$, $b_i \in \{0, 1\}$?

2. Aufgabe:

   Schreiben Sie den folgenden Schaltkreis als 4×4-Matrix.

   $$\begin{array}{ccccc} \text{a} & \longrightarrow & \boxed{\text{H}} & \longrightarrow & \text{a'} \\ \text{b} & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \text{b'} \end{array}$$

3. Aufgabe:

   Geben Sie eine unitäre 4×4-Matrix an, die zwei unabhängige qubits, die jeweils den Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ haben, in den verschränkten Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ bringt.

4. Aufgabe:

   a) Zeigen Sie: Jede Boolsche Funktion f auf n Bits ist als (nicht-uniformer) Schaltkreis exponentieller Größe (in n) darstellbar.

   b) Zeigen Sie: Für jedes Polynom p gibt es ein n, so dass eine Boolsche Funktion f auf n Bits existiert, die nicht durch einen nicht-uniformen Schaltkreis der Größe $p(n)$ darstellbar ist.

5. Aufgabe:

   Wir betrachten folgendes wahrscheinlichkeitstheoretische Experiment:

   - 1.Schritt: ziehe ein Element $e \in \{1, 2\}$ mit $\Pr[e = 1] = \frac{1}{4}$ und $\Pr[e = 2] = \frac{3}{4}$.
   - 2.Schritt: ziehe ein Element $e \in \{3, 4\}$ mit $\Pr[e = 3] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[e = 4] = \frac{1}{2}$.

- 3.Schritt: ziehe ein Element $e \in \{5, 6\}$ mit $\Pr[e = 5] = \frac{2}{3}$ und $\Pr[e = 6] = \frac{1}{3}$.
- 4.Schritt: ziehe ein Element $e \in \{7, 8\}$ mit $\Pr[e = 7] = \frac{1}{4}$ und $\Pr[e = 8] = \frac{3}{4}$.

Alle Schritte sind unabhängig. Die Elementarereignisse sind Folgen (a_1, a_2, a_3, a_4) mit $a_1 \in \{1, 2\}$, $a_2 \in \{3, 4\}$, $a_3 \in \{5, 6\}$ und $a_4 \in \{7, 8\}$.

a) Zeichnen Sie den Entscheidungsbaum zu diesem Experiment.

b) Zeigen Sie:

$$\Pr[\text{ Menge der Folgen, wo } a_4 = 8] = \frac{3}{4}$$

und

$$\Pr[\text{ Menge der Folgen, wo } a_3 = 6] = \frac{1}{3}\,.$$