Prof. Dr. A. Goerdt

TU Chemnitz
Wintersemester 2006/2007
25.10.2006

Einführung Quantencomputing

1. Übung

Es ist zum Verständnis wichtig, eine eigene Praxis im Rechnen zu bekommen. Dazu diese Übungen.

1. Aufgabe:

   Zeigen Sie: Das Produkt stochastischer, orthogonaler, unitärer Matrizen ist wieder stochastisch, orthogonal und unitär.

2. Aufgabe:

   Wir betrachten die folgende (Tensorprodukt genannte) Matrizenoperation: Für zwei Matrizen $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ ist das Tensorprodukt definiert als

   $$A \otimes B = (c_{(i,j)(k,l)})_{1 \leq i,j,k,l \leq n},$$

   wobei $c_{(i,j)(k,l)} = a_{ij} \cdot b_{kl}$ ist. $A \otimes B$ ist eine $n^2 \times n^2$-Matrix, wobei das Paar $(1,1)$ der erste Index der Matrix ist, $(1,2)$ der zweite, … und (n,n) der letzte (d.h. n^2-te) Index ist.

   a) Veranschaulichen Sie sich $A \otimes B$ als Matrix.
   b) Gilt folgender Satz? Wenn A und B unitäre, stochastische und orthogonale Matrizen sind, dann ist auch $A \otimes B$ eine unitäre, stochastische und orthogonale Matrix.

3. Aufgabe:

   Die L_2-Norm eines Vektors x ist im Falle $x \in \mathbb{C}^n$ (und damit auch im Fall $x \in \mathbb{R}^n$, da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist) definiert als das innere Produkt des Vektors x mit sich selbst:

   $$\|x\|_2 = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_i \overline{x_i} \cdot x_i},$$

   wobei $\overline{x_i}$ die konjugiert komplexe Zahl zu x_i ist (wenn $x_i \in \mathbb{R}$ ist $\overline{x_i} = x_i$). Die L_1-Norm ist für Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ definiert als

   $$\|x\|_1 = \sum_i |x_i| = \sum_i \sqrt{x_i \cdot x_i}.$$

   Zeigen Sie:

   a) Bei Anwendung einer unitären, orthogonalen Matrix A auf einen Vektor x bleibt die L_2-Norm (d.h. das innere Produkt) gleich, es gilt also $\|x\|_2 = \|Ax\|_2$.
   b) Unitäre Matrizen A erhalten die L_1-Norm, es gilt also $\|x\|_1 = \|Ax\|_1$.