(1.27)

Invariante:

$u \in$ [illegible] $\Rightarrow d_i[u] =$ [illegible] $(s,u)$

[illegible]

$\Rightarrow$ [illegible]

Kante $u \to v$, wobei $u$ von $s$ erreichbar.

<u>Beobachtung</u>

In BFS(G, s) wird jede von s erreichbare "Kante" genau einmal untersucht.

Denn $u \to v$, dann u grau, v irgendwie. Danach u schwarz und nie mehr grau. □

(1.28)

wenn $\overset{u}{\circ} \longrightarrow \overset{v}{\circ}$ gegangen wird

bei BFS(G,s), d.h. wenn

u expandiert wird, ist

u grau (d.h. color[u] = grau)

und v kann schwarz, grau

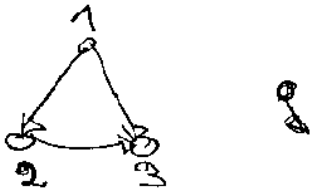
oder weiß sein.

Die Farbe von v zu dem Zeitpunkt

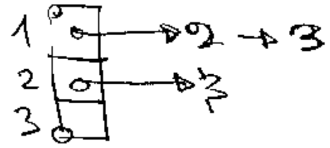
hängt nicht nur von G selbst,

sondern auch von den Adj.-Listen

ab. □



BFS(G,1)



~~∅~~

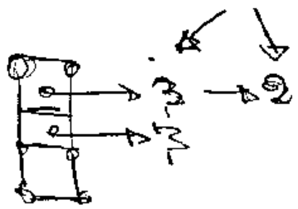
1

2 3

3

∅

Beim Gang durch $2 \to 3$ ist 3 grau.



Beim Gang durch $2 \to 3$ ist 3 schwarz

Andere Färben: Übung 2.

1.30

## Definition (Distanz)

Ist $G = (V, E)$ ger. Graph. Für $u, v \in V$ ist

Distanz von $u$ nach $v$.

$\mathrm{Dist}(u, v)$

= minimale Weglänge von $u$ nach $v$

$= \min\{k \mid$ Es gibt Weg der Länge $k$ von $u$ nach $v$ in $G\}$

$= \min\{k \mid$ Es gibt Weg $(v_0, \ldots, v_k)$ mit $v_0 = u$ und $v_k = v$ in $G\}$.

$\mathrm{Dist}(u, v) = \infty \Leftrightarrow$ Es gibt keinen Weg von $u$ nach $v$. $\square$

1.21

Verifikation d. Hauptschleife ist Nummer b. Wie läuft diese?

$Q_0 = (s)$, $col_0[s] = g$
„$col_0$ = w" sonst.

$\Big\downarrow$ 1. Lauf

$Q_1 = \underbrace{(u_1, .., u_k)}_{Dist = 1}$ $col_1[s] = sch$,
$col_1[u_i] = g$,
weiß sonst.

$Dist(s, u_j) = 1$

$u_1, .., u_k$ sind alle mit $Dist = 1$.

$\Big\downarrow$

$Q_2 = (\underbrace{u_2, .., u_k}_{Dist\ 1}, \underbrace{u_{k+1}, .., u_t}_{Dist\ 2})$ $col[u_1] = sch$

Alle mit $Dist = 1$ entdeckt.

$\Big\downarrow$ $k-2$ Läufe weiter

$Q_k = (\underbrace{u_k}_{Dist\ 1}, \underbrace{u_{k+1} \ldots}_{Dist\ 2})$

$\Downarrow$

$$Q_{k+1} = (\underbrace{u_{k+1}, \ldots, u_t}_{\text{Dist} = 2})$$

$u_{k+1} \ldots u_t$ sind alle mit Dist = 2.

(da alle mit Dist = 1 bearbeitet)

$\Downarrow$

$$Q_{k+2} \; (\underbrace{\ldots\ldots}_{\text{Dist} = 2}, \underbrace{\ldots}_{\text{Dist} = 3})$$

$= ( \ldots$

$\vdots$

$\Downarrow$

$$(\underbrace{\ldots\ldots}_{\text{Dist} = 3})$$

(er oder sch.

und alle mit Dist = 3 erfaßt.

$\vdots$

Allgemein: Nach $l$'tem Lauf

gilt: Falls $Q_l \neq \emptyset$, so

Schleifen-invariante

- $Q_l = (\underbrace{u_1, \dots,}_{\text{Dist } D} \underbrace{\dots}_{\text{Dist } D+1})$, $\quad \overbrace{u_1, \dots,}^{U} \overbrace{\dots}^{V}$

  $D_l = \text{Dist}(s, u_1)$, $u_1$ vorhanden, da $Q_l \neq \emptyset$.

- Alle mit $\text{Dist} \leq D_l$ erfaßt (x)

- Alle mit $\text{Dist} = D_l + 1$

  $= (\text{Weiße Nachbarn von } U) \cup V$. (xx)

Beweis: Ind. über $l$.

$l = 0$ (vor erstem Lauf). Gilt mit $D_0 = 0$,

$U = (s)$, $V = \emptyset$

$l = 1$ (nach erstem Lauf). Mit $D_1 = 1$

$U =$ Nachbarn von $s$, $V = \emptyset$.

(1.32b)

gilt Invariante nach l'tem Lauf

also

$$Q_\ell = (\overbrace{u_1 \ldots u_k}^{\text{Dist } D_\ell} \overbrace{v_1 \ldots v_t}^{\text{Dist } D_\ell+1}) \text{ mit } (*), (**)$$

$D_\ell = \text{Dist}(s, u_1)$

Finde $\ell+1$'ter Lauf statt. (Also $u_1$ ex.).

1. Fall $u_1 = u_k$.

$$Q_{\ell+1} = (v_1 \ldots v_t \overbrace{\ldots}^{\text{Nachbarn von } u_1})$$

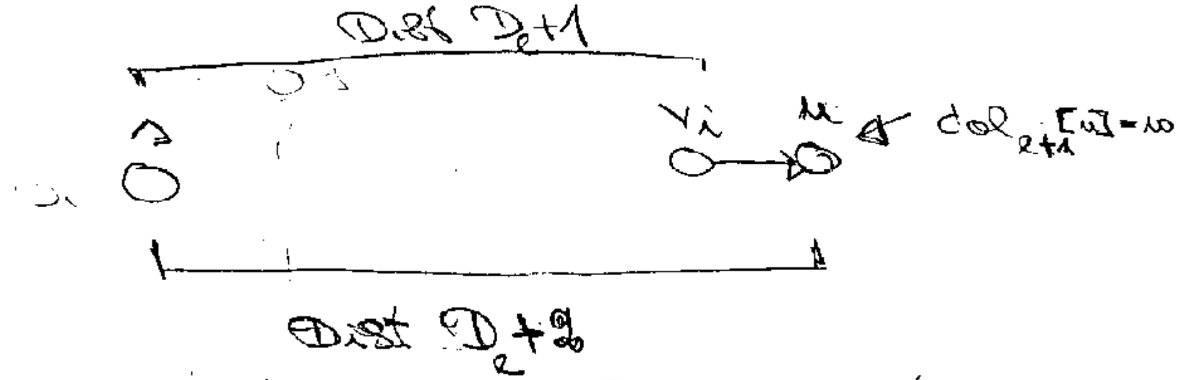
$D_\ell + 1 = \text{Dist}(s, v_1)$

Wegen (**) nach $\ell$ gilt jetzt

$Q_{\ell+1}$ = alle die Knoten mit $\text{Dist} = D_\ell + 1$.

- Also gilt jetzt (*), wegen (*) vorher.

- Also gilt auch (**) denn:




2. Fall $u_1 \neq u_2$

Weiße Nachbarn von $u_1$

- $Q_{l+1} = (u_2 - u_l, v_1 - v_r \dots)$

$D_{l+1} = Dist(s, u_2) = D_l$.

Also (*) gilt, da (*) vorher.

- Es gilt auch (**), die weiße Nachbarn von $u_1$ jetzt im $Q_{l+1}$

Aus 1. Fall und 2. Fall: Für beliebiges $l \geq 1$:

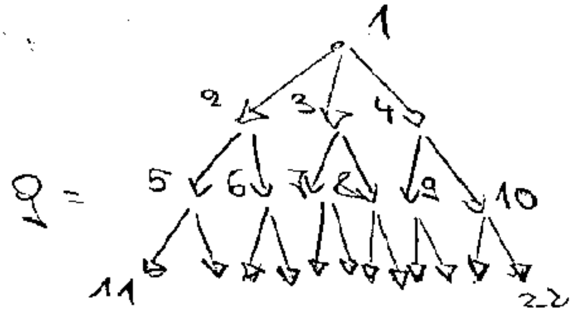
Invariante nach $l$'tem Lauf

$\Rightarrow$

Invariante nach $l+1$'tem Lauf.

Also Invariante gilt nach jedem Lauf.

Etwa:




$Q_0 = (1)$ $D_0 = 0$

$Q_1 = (2, 3, 4)$ $D_1 = 1$, alle dabei!

$Q_2 = (3, 4, 5, 6)$ $D_2 = 1$

$Q_3 = (4, 5, 6, 7, 8)$ $D_3 = 1$

$Q_4 = (5, 6, 7, 8, 9, 10)$ $D_4 = 2$ (!) Alle dabei!

1.32è

Quintessenz (d.h. das Ende).

Vor letztem Lauf:

- $Q = (u)$

  $\overset{/}{D} = \Delta$

- Alle mit $D \cdot d \leq \Delta$ erfaßt.
- Alle mit $\Delta + 1 = \overset{(\text{Weiße})}{\text{Nachbarn}}$ von $u$.

(wg. Invariante). Der letzte

Lauf danach

- $Q = \emptyset$, • $\overset{(\text{Alle})}{\leq \Delta}$ erfaßt, • Keine $\geq \Delta + 1$ gibt es.

Also: Alle von $s$ Erreichbaren erfaßt.

Termination: Bei Lauf ein

Knoten aus $Q$, schwarz,

kommt nie mehr in $Q$. Irgendwann

$Q$ zwangsläufig leer.

Nach BFS$(G, s)$: Alle von $s$ erreichbaren Knoten werden erfaßt.

- $d[u] = \mathrm{Dist}(s, u)$ für alle $u \in V$.

  Invariante um Aussage erweitern:

  Für alle erfaßten Knoten ist $d[u] = \mathrm{Dist}(s, u)$.

- Breitensuchbaum enthält kürzeste Wege.

  Invariante erweitern gemäß

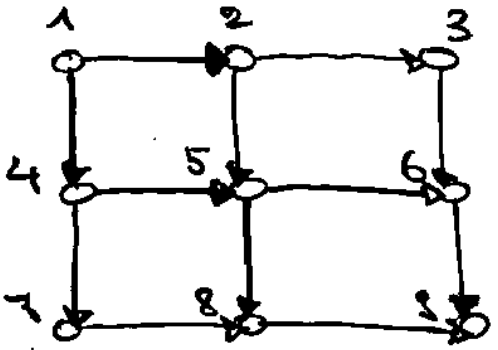
  Für alle erfaßten Knoten sind kürzeste Weg im Breitensuchbaum.

Bew.: Dann k. W $\overset{s}{\circ} \rightsquigarrow \overset{u}{\circ}$ durch

$u, \pi[u], \pi[\pi[u]] \quad \pi[\pi[\ldots\pi[u]\ldots]] = s.$

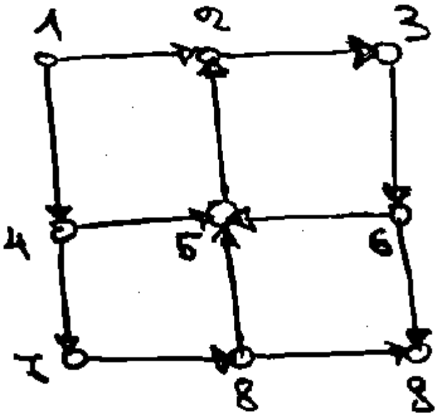
$\circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ \ldots \circ \leftarrow \circ$

# BEISPIEL ZU TOP. SORT:

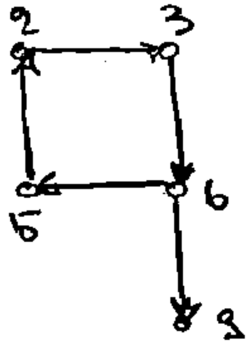


| Q | $M = (v[1], \ldots)$ |
|---|---|
| 1 | $\emptyset$ |
| 2,4 | 1 |
| 4,3 | 1,2 |
| 3,7,5 | 1,2,3 |

⋮



| Q | M |
|---|---|
| 1 | $\emptyset$ |
| 4 | 1 |
| 7 | 1,4 |
| 8 | 1,4,7 |
| $\emptyset$ | 1,4,7,8 |



REST!

(1.4.7)

$\mathcal{G} = (V, E)$. Für $U \subseteq V$ ist

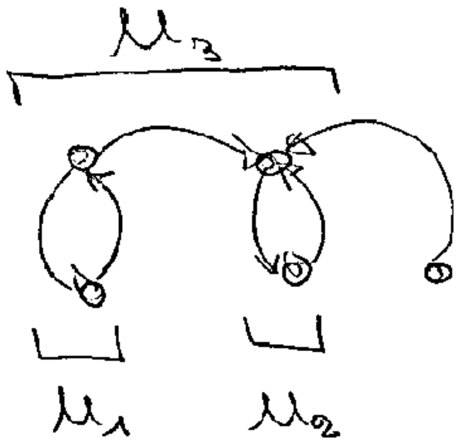
$$\mathcal{G}_U = (U, F), \quad F = \{(u,v) \in E \mid u, v \in U\}$$

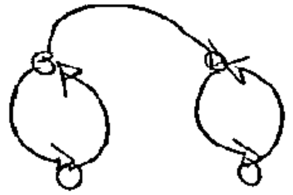
der auf $U$ induzierte Graph.

Wir interessieren die $U \subseteq V$, so daß in $\mathcal{G}_U$ jeder E-Grad $\geq 1$ ist. Seien $U_1, \dots, U_k$ alle $U_i$, so daß in $\mathcal{G}_{U_i}$ jeder E-Grad $\geq 1$ ist. Dann gilt auch in $\mathcal{G}_{U_1 \cup \dots \cup U_k} = \mathcal{G}_X$ ist jeder E-Grad $\geq 1$. Das ist der größte Graph mit dieser Eigenschaft. Am

1.48

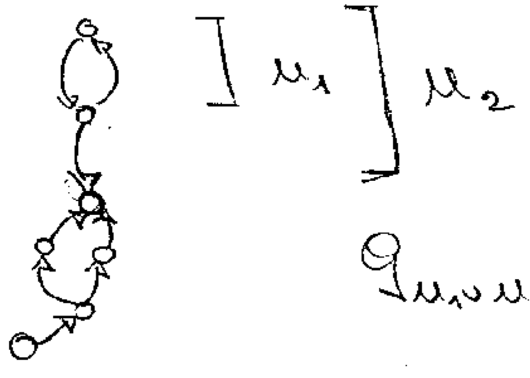
Ende von TopSort bleibt diese Graph übrig (X = $\emptyset$ bis X = V möglich).



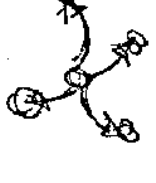

$g_{M_1 \cup M_2 \cup M_3} = g_{M_3} =$ 

A

größter induzierter Teilgraph wobei jeder E-Grad $\geq 1$ ist.




$g_{M_1 \cup M_2} = g_{M_2}$



Kein Graph mit max. E-Grad $\geq 1$