

## 6. Tiefensuche im ungerichteten Graphen: (6.1)

### 2-fache Zusammenhängekomponenten

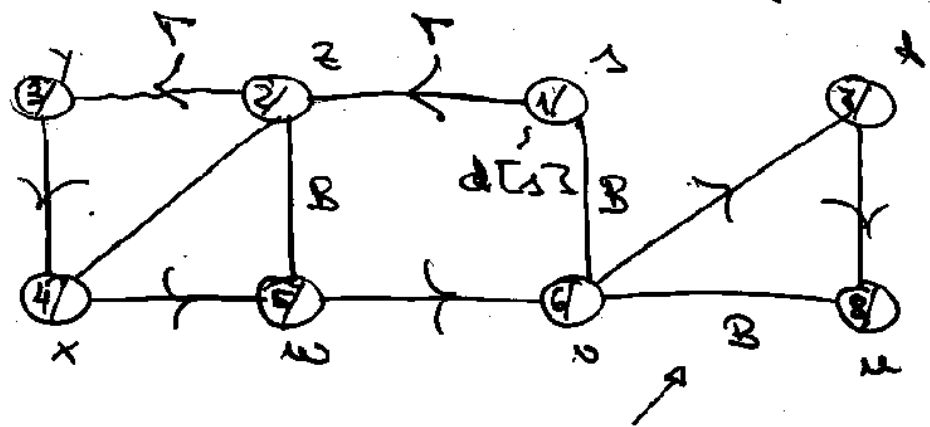
Der Algorithmus ist ganz genau derselbe wie im Kapitel 4, der gerichtete Fall!

Die folgende Folie zeigt noch einmal den gerichteten Fall und danach den ungerichteten Fall auf dem analogen Graphen

(Kanten  $\rightarrow$  sind Baumkanten, über die entdeckt wird.)

Diese Seite mußte aus rechtlichen Gründen entfernt werden!

BEISPIEL (FORTSETZUNG)

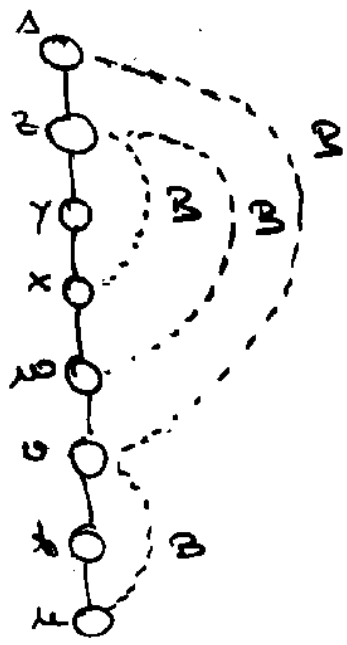


GRAPH UNGERICHTET!

AN UNGERICHTETEN GRAPHEN GILT:  
BEIM ERSTEN GEHEN DURCH  
EINE KANTE STÖßT MAN AUF

- EINEN WEISSEN KNOTEN (KANTE: T)
- EINEN GRAUEN KNOTEN (KANTE: B)
- NICHT AUF SCHWARZEN KNOTEN (KANTE: T ODER B)

z.B.:



$\tau[z] = 1, \tau[\gamma] = 2, \dots$

Im umgekehrten Fall der  
Tiefensuche ist festzuhalten:

- Jede Kante wird 2-mal betrachtet:  
 $\{u, v\}$  bei  $DFS-v(u)$  und bei  $DFS-v(v)$ .

- (Hoffentlich) für den Kantenstyp  
(Baumkante, Rückwärts-, Vorwärts-, Kreuz-,)  
ist die erste Betrachtung:

(i)  $\{u, v\}$  Baumkante  $\Leftrightarrow$  Beim ersten  
Betrachten von  $\{u, v\}$  findet sich  
ein weißer Knoten.

(ii)  $\{u, v\}$  Rückwärtskante  $\Leftrightarrow$  Beim  
ersten Sehen von  $\{u, v\}$  findet  
sich ein bereits grauer Knoten.

(iii) Beim ersten Sehen kann sich  
kein schwarzer Knoten finden.

Deshalb weder Kreuz- noch  
Vorwärtskanten.

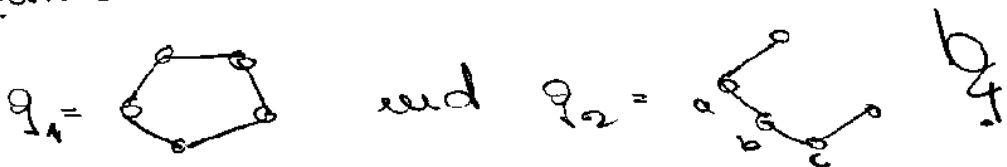
- Weiße Weg Satz (S. 4.17) gilt vollkommen analog.
- Knoten erben (S. 4.20) auch ganz analog mit Tiefensuche.

Der Begriff der stabilen Zusammenhangskomponente ist nicht sinnvoll

da Weg  $u \rightarrow v$  im ungerichteten

Fall ebenso ein  $v \rightarrow u$  ist.

Stattdessen: 2-fach zusammenhängend,  
Unterschied zwischen



Löchern aus in  $g_1$  beliebiger Knoten hängt das Netz noch zusammen. Für  $a, b, c$  in  $g_2$  gilt das nicht!

Für den Rest dieses Kapitels folgende

Konvention (2.1.1)

Ab jetzt gehen wir immer von zusammenhängendem, ungerichteten Graphen aus. □

Definition (2-fach zusammenhängend)

$G = (V, E)$  ist 2-fach zusammenhängend

$\Leftrightarrow$

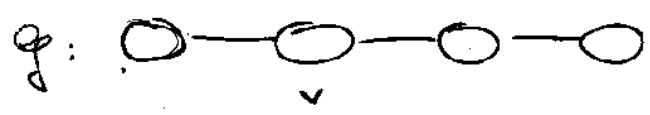
( $G$  ist zusammenhängend) und

$G \setminus \{v\}$  ist zusammenhängend

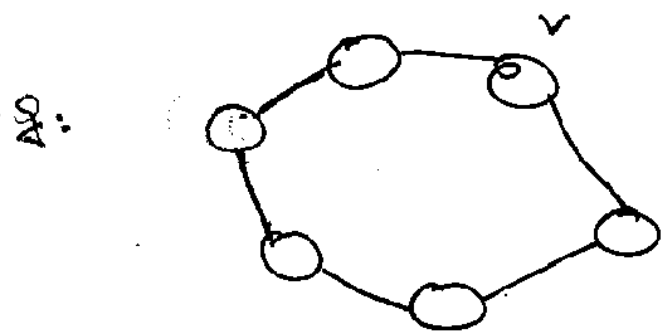


für alle  $v \in V$ . □

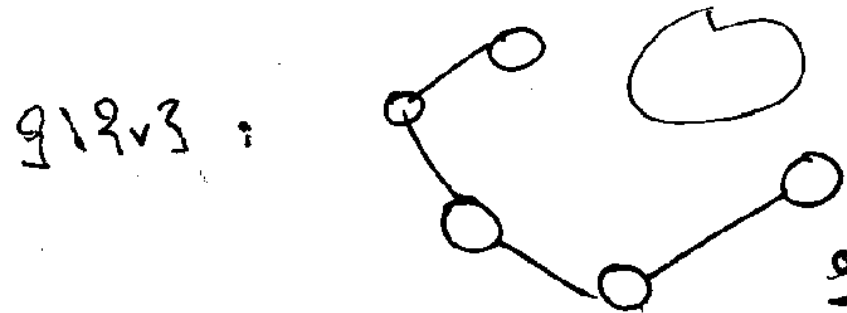
$G \setminus \{v\} = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e \in E \mid u, v \in e\} \mid u \in V \setminus \{v\})$   
" @ u, v "



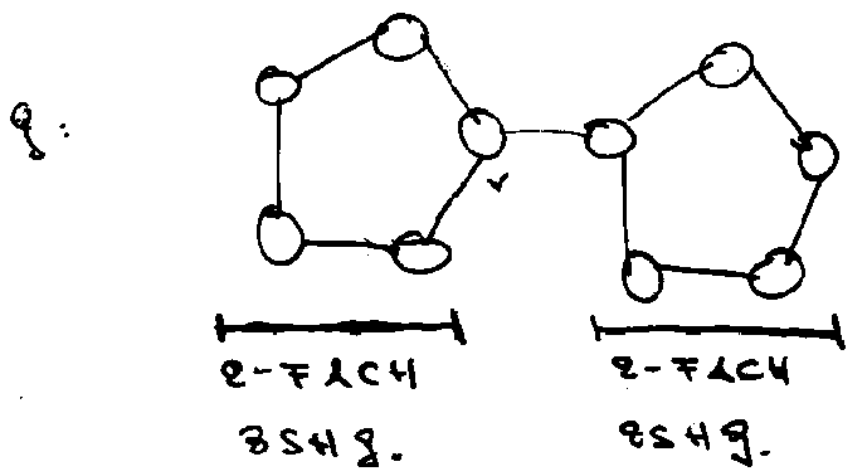
g ZSHG.  
NICHT 2-FACH  
ZSHG.



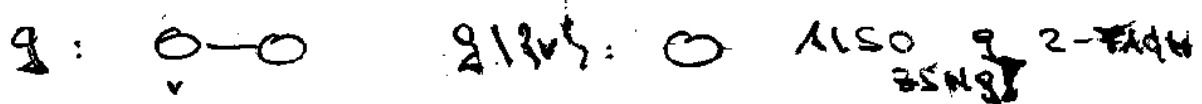
3EA:  
  
STARK ZSHG.



v UND ANGEHÖRIGEN KANTEN  
FELLEN  
g 2-FACH  
ZSHG.



g NICHT  
2-FACH ZSHG.  
g1g v3 NICHT  
ZSHG.



g 2-FACH  
ZSHG.

Was ist die Bedeutung von  
 $Q$ -fad. zshg.?

Satz (Thueyger, 1921)

$Q$  2-fad. zshg.

$\Leftrightarrow$

Für alle  $u, v \in V, u \neq v$  gibt

es zwei disjunkte Wege

zwischen  $u$  und  $v$  in  $Q$ . Das heißt

Wege

$$(u, u_1, u_2, \dots, u_m, v),$$

$$(u, u'_1, u'_2, \dots, u'_m, v)$$

$$\text{mit } \{u_1, \dots, u_m\} \cap \{u'_1, \dots, u'_m\} = \emptyset \quad \square$$

Beweis folgt auf überraschende

Weise später. Ein induktiver Beweis



ein Buch Graphentheorie von  
 Reinhard Diestel. Die Richtung  
 "←" ist einfach. Beachte noch,  
 "↔" ist  $\mu \sim \nu$  so tut es der Weg  
 $(\mu, \nu)$ , mit leerer Menge von  
 Zwischenknoten (also nur 1 Weg).

Nun gilt es wieder, nicht  
 2-fach zusammenhängende Graphen  
 in seine 2-fach zusammenhängenden  
 Bestandteile zu zerlegen,  
 in die 2-fachen (Zusammenhangs-)  
 Komponenten.

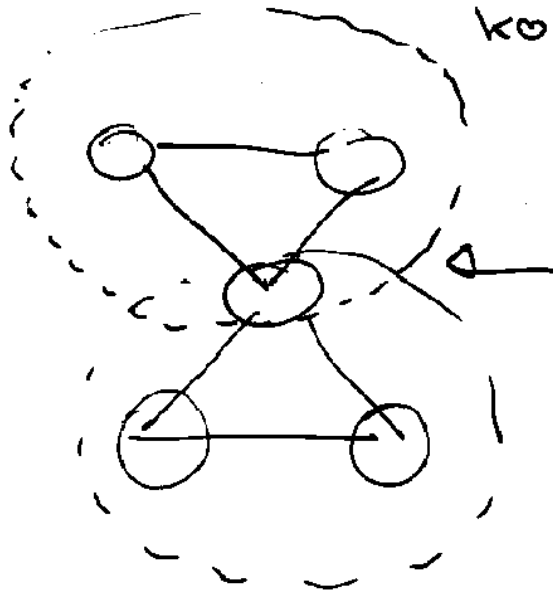
Diese Seite mußte aus rechtlichen Gründen entfernt werden!

BEISPIEL

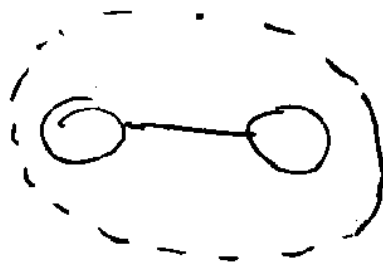
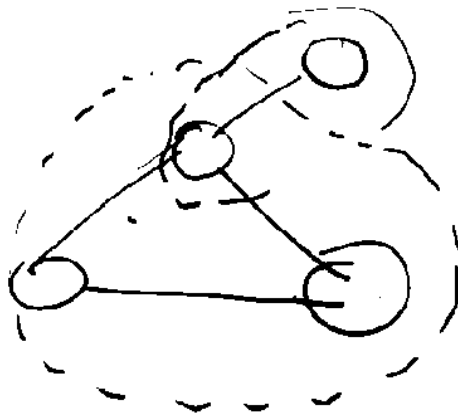
6.10

2-FACHE ZUSAMMENHANGS-

KOMPONENTEN



KNOTEN IN  
2 2-FACHEN  
ZUSAMMENG.



# Faust

## Definition (2-fache Komponente)

Ein Teilgraph  $H = (W, F)$  von

$G$  ist eine 2-fache Komponente



maximal bzgl.  
Kanten und Knoten

$H$  ist ein maximaler 2-fach

echtg. Teilgraph von  $G$ . □

## Bemerkung

(a) Jede Kante ist im genau  
einer 2-fachen Komp.

(b) Sind  $H_1 = (W_1, F_1), \dots, H_k = (W_k, F_k)$

die 2-fachen Komponenten von

$G = (V, E)$ , so ist  $F_1, \dots, F_k$  eine

(Einteilung)

6.12

Partition von  $E$ .

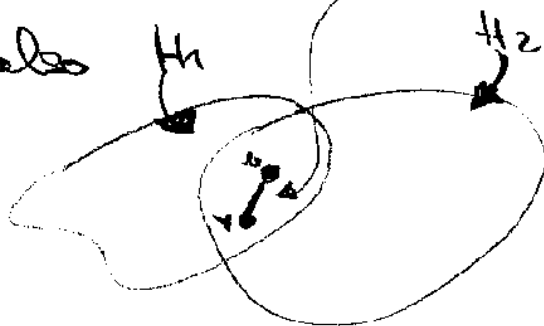


$$F_i \cap F_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, F_1 \cup \dots \cup F_k = E.$$

Beweis

Kante  $\{u, v\}$  in  $H_1$  und  $H_2$ .

(a) Sei also



$H_1 \neq H_2$   
2-fach zshg.

dann ist  $H = H_1 \cup H_2$  2-fach zshg:

Für  $w$  aus  $H_1$ ,  $w \neq u$ ,  $w \neq v$

ist

$H \setminus \{w\}$  zshg.

weg. Maximalität!

ebenso  $w$  aus  $H_2$ . Für  $w = u$

ist, da immer noch  $v$  da ist, ist

$H \setminus \{w\}$  2-fach zshg. Also wegen

Maximalität 2-fache Komp  $\supseteq H_1 \cup H_2$ .

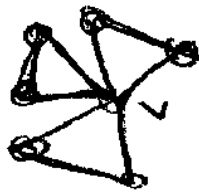
(6.B)

(b)  $F_i \cap F_j = \emptyset$  wegen (a).

Da Kante  $\overset{u}{\bullet} \xrightarrow{v} \bullet$  2-fach zshg. ist  
nach Definition, ist jede

Kante von  $E$  in einem  $F_i$ .  $\square$

Bei Knoten gilt, (a) oben nicht:



Beispiel

Eine Kante, die eine  
2-fache Koup. ist heißt  
Brückenkante.

$v$  gehört zu  $\mathbb{Z}$  2-fachen Komponenten.

$v$  ist ein typischer Artikulations-  
punkt.

Definition

$v$  Artikulationspunkt von  $G$

$\Leftrightarrow$

$G \setminus v$  nicht zshg.  $\square$

Bemerkung

$v$  Art-Plot  $\Leftrightarrow v$  gehört zu

$\geq 2$  2-fache Komponenten.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Ist  $v$  Art-Plot. Dann

gibt es Knoten  $u, w$ ,  $u \neq v$ ,  $w \neq v$ ,

so daß jeder Weg von  $u$  nach  $w$

von  $v$  über  $v$  Komponente zugehörig

$(u, \dots, v, \dots, w)$

ist. (Satz 2.12.1)

Also  $u, w$  nicht in einer 2-fachen

Komponente. Dann ist jeder

Weg sogar von  $u$  nach  $w$

$(u, \dots, u_1, v, u_2, \dots, w)$ ,

6.15

§5  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$   $u_1, u_2$  nicht in einer

2-fachen Komponente sind, somit

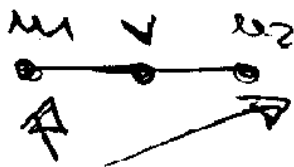
in  $\mathcal{A}$  /  $\mathcal{B}$  Weg

$(u_1 \rightarrow u_1 \sim u_2 \rightarrow u_2)$ ,

$\uparrow$

Ohne  $\rightarrow$ .

Widerspruch. Also haben auch



Verschiedene Komponenten.

Die Kante  $\{u_1, v\}$  gehört zu einer

Komponente (entw. ist sie selber eine)

ebenso  $\{v, u_2\}$ . Die Komponenten

der Kanten sind verschieden, da

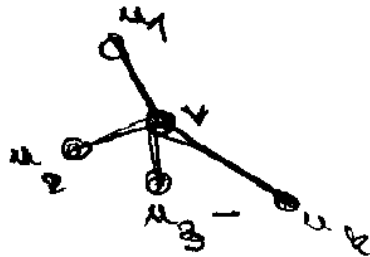
$u_1, u_2$  in verschiedenen Komponenten.

Also  $v$  in dem beider Komponenten.



" $\Leftarrow$ " gehört also  $v$  zu  $z \geq 2$

Komponenten. Dann



verschiedenen

und  $\geq 2$  Kanten von  $\{u_2, \dots, u_z\}$

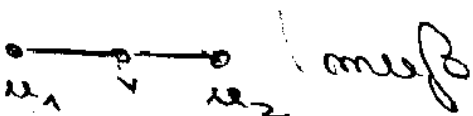
Komponenten. Etwa  $u_1, u_2$

Also  $u_1$  und  $u_2$  in 2 verschiedenen

Komponenten. Also gibt es

so daß in  $G \setminus \{v\}$  kein

Weg  $u_1 \rightsquigarrow u_2$  existiert.

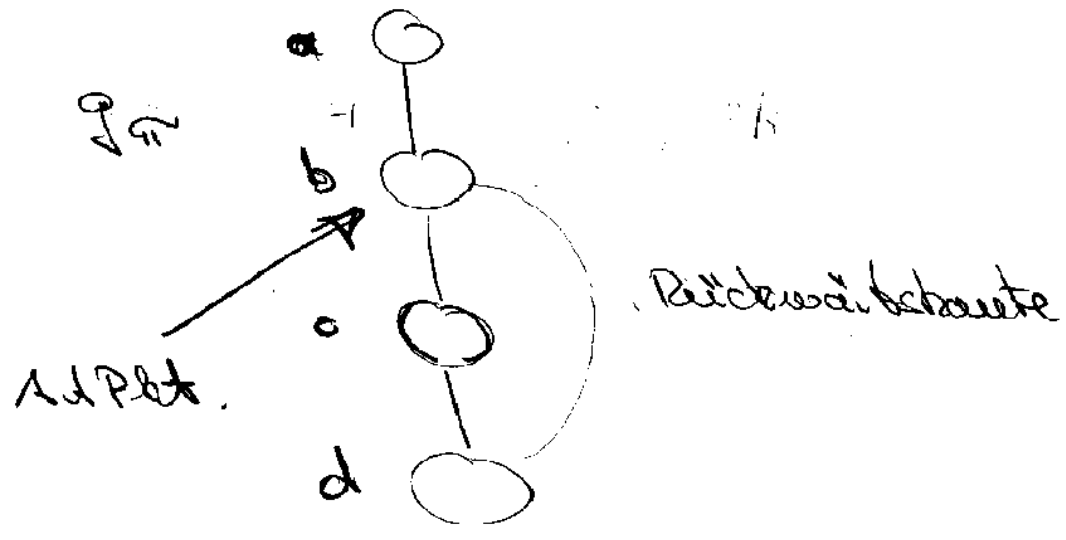
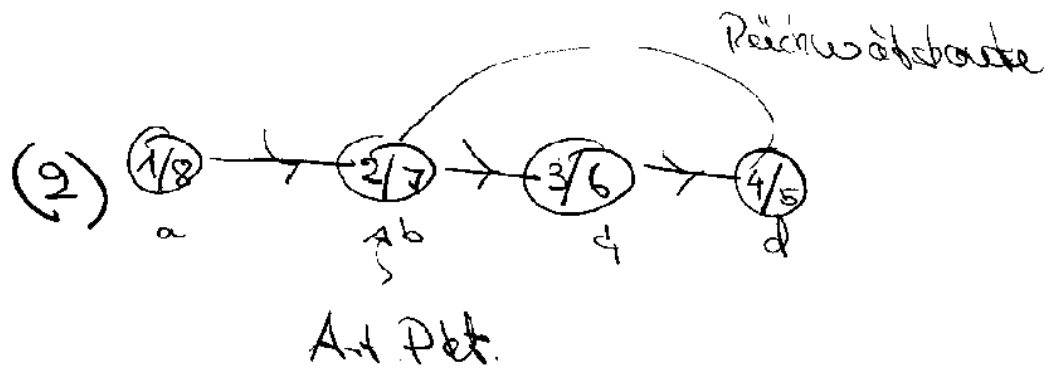
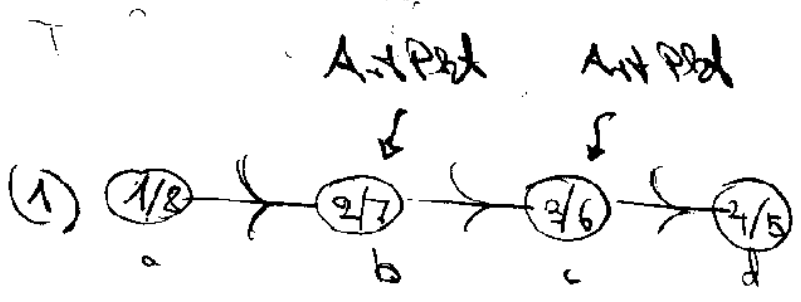
Dann zeigen  muß

so  $v$  sein und  $v$  ist Blatt.

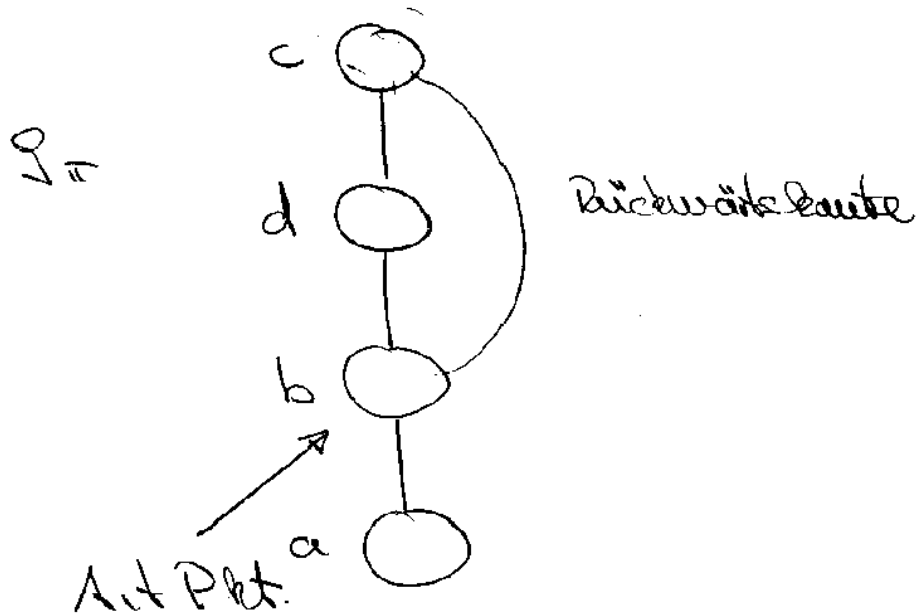
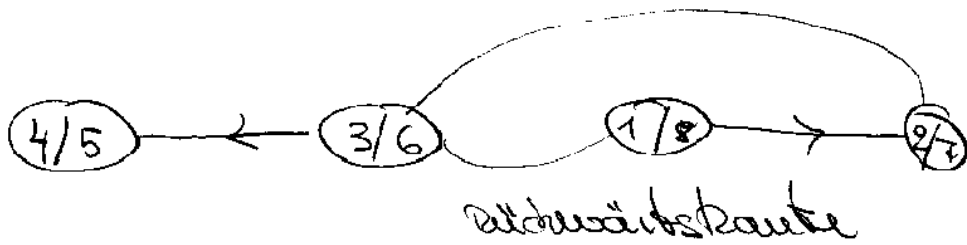
□

Graphtheoretische Beweise sind nicht ganz so leicht!

# Artikulationspunkte und Tiefenreue



(3) Alternativ zu (2)



Was haben die Akt. Pkte in allen genannten Fällen gemeinsam?

Akt. Pkt. (sofern nicht Wurzel von  $\mathcal{P}_\pi$ )

hat Sohn in  $\mathcal{P}_\pi$  so daß es

von dem Sohn oder Nachfolger keine

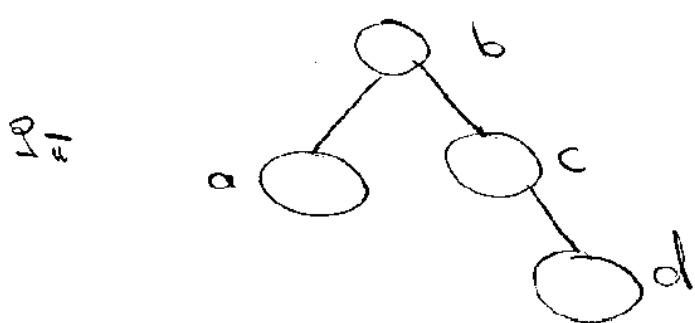
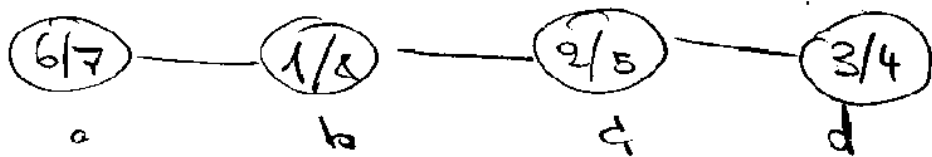
Rückwärtskante zu echtem Vorgänger gibt!

(1) Ziel bei b, c, d ist keine Art Pkt und Kriterien sind nicht erfüllt.

(2) b ist Art Pkt, da alle Kriterien erfüllt sind. c, d erfüllen es nicht, sind auch keine Art Pkt'e.

(3) Hier zeigt das Schema a von b an, dass b Art Pkt ist. Also keineswegs immer dasselbe Schema!

Was ist wenn Art Pkt Wert  
von  $g_u = 4$



2 Söhne!

Satz (Aufgabe erkennen)

Sei  $v$  Knoten von  $\mathcal{G}$  und sei eine Tiefensuche gelaufen.

Erklärung:  
 $\mathcal{G}$  immer  
zshg.

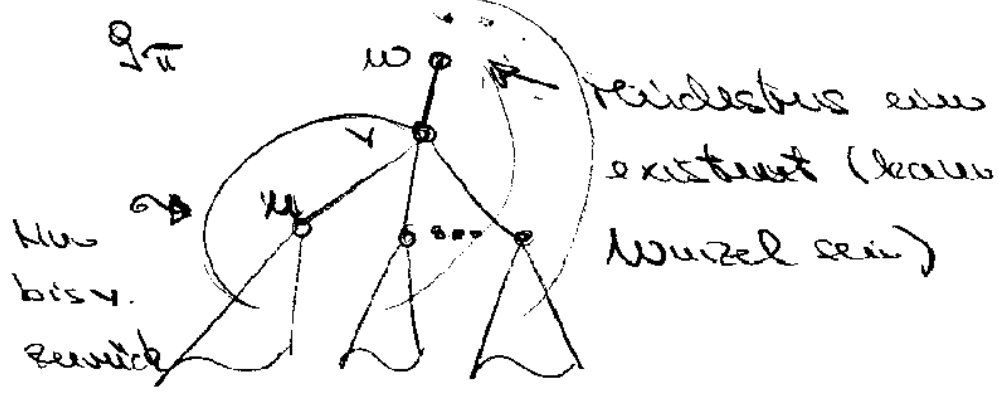
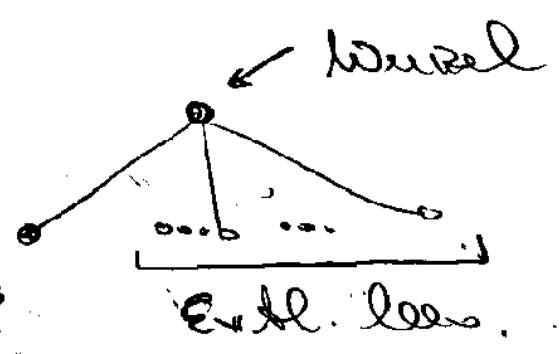
(a) Ist  $v$  Wurzel von  $\mathcal{G}_v$ .



(b) Ist  $v$  nicht Wurzel von  $\mathcal{G}_v$ .

$v$  ist Pbl?

$\Leftrightarrow$



Mindestens eine existiert (kann Wurzel sein)

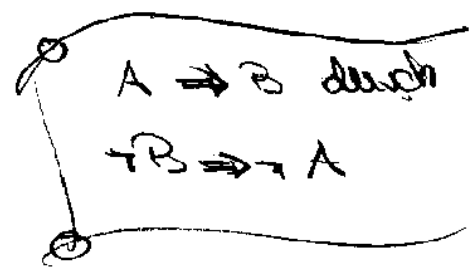
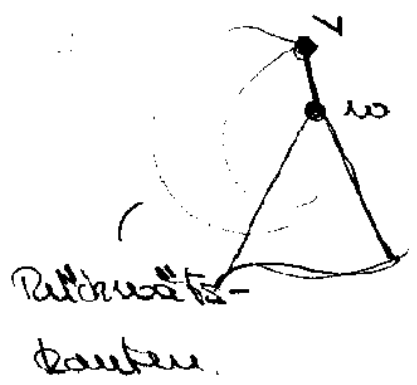
hiesse

D.h.  $v$  hat einen Sohn, so daß von dem und allen  $\omega$ -Söhnen zu  $\omega$  keine (Rückwärts-) Kanten zu echten Vorgängern von  $v$ .

Beweis:

(a) " $\Leftarrow$ "  $q \mid v$  nicht z.Bg. damit  $v$  A-Obj.

" $\Rightarrow$ " Hat  $v$  nur einen Sohn, dann



dann  $q \mid v$  z.Bg. (können in  $q \mid v$  über  $\omega$  statt  $v$  gehen.) also  $v$  kein A-Obj. Hat  $v$  ohne Sohn, dann kein A-Obj.  $\square$

(b)  $\Rightarrow$  Zu  $\mathcal{G}(S)$  kein Weg

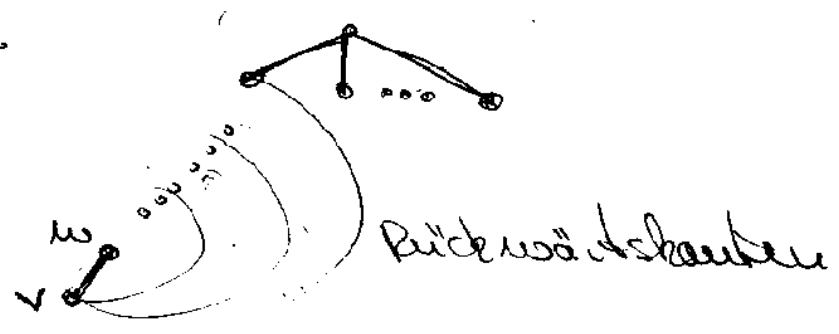
$\Rightarrow$  also  $v$  ist Pkt.

$\Rightarrow$  gelte die Behauptung nicht,

also  $v$  hat keinen Sohn mit  $n$  in  $\mathcal{G}$ .

1. Fall :  $v$  hat keinen Sohn. Dann

$n \in \mathcal{G}$



Im  $\mathcal{G}(S)$  fehlen die Rückwärtskanten

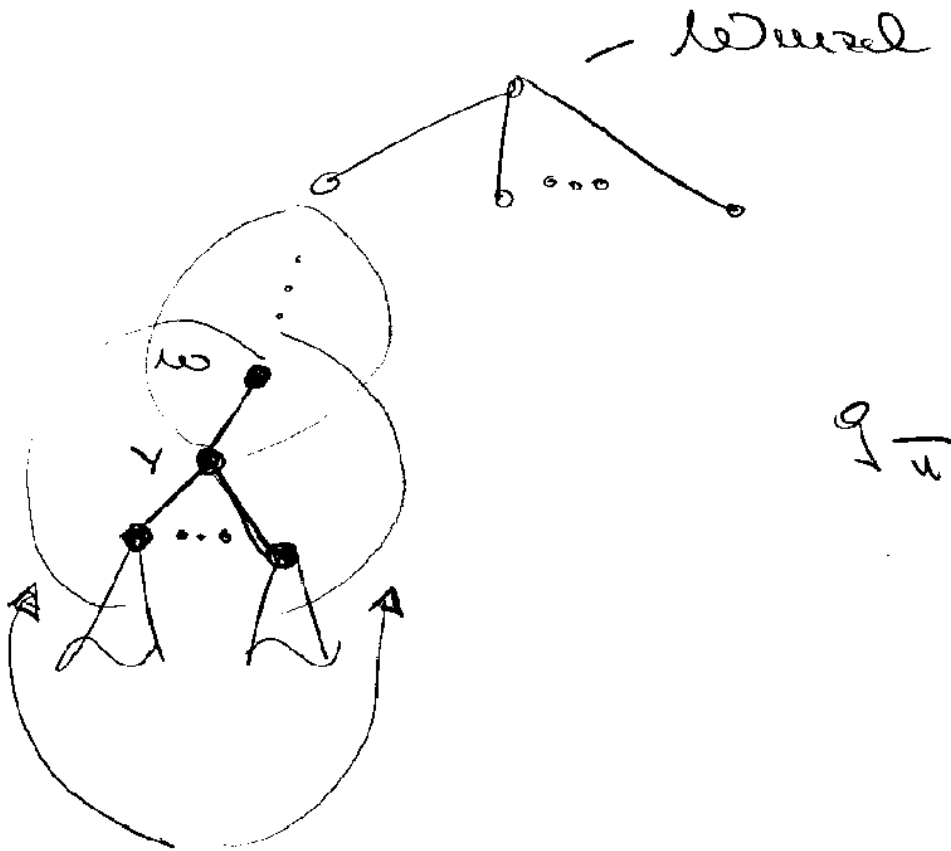
und  $\mathcal{G}(w, v)$ . Also bleibt das

Rest zshg.  $v$  kein Ad Pkt.

2. Fall :  $v$  hat Söhne aber keinen

mit  $n$  in der Behauptung

Dann  $\dots$



Rückwärtskanten

mindestens bis  $w$  oder weiter zurück.

Im  $\mathcal{Q}/\mathcal{R}$  bleiben die eingeborenen

Rückwärtskanten die nicht mit  $v$  inzident sind stehen. Also

$\mathcal{Q}/\mathcal{R}$  zshg. Also  $v$  keine At-Plt.

$A \Rightarrow B$  durch  
 $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

□



Wie kann man Art Pkt'e berechnen?

weissen für alle Pkt'e in  $\mathbb{Z}^n$   
 wissen, wie weit es von dort aus  
 zurück geht.

### Definition

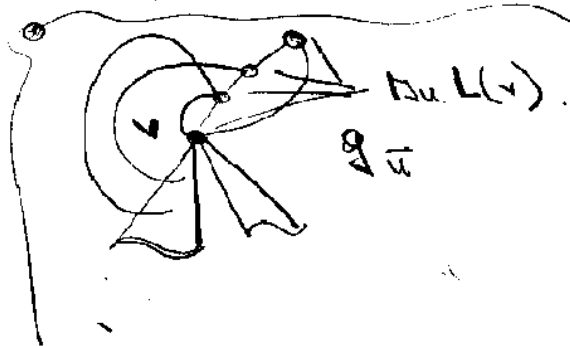
für  $\mathbb{Z}^n$  gelte als  $\mathbb{Z}^n$   
 vorliegend.

(a) Für Knoten  $v$  ist die Menge  
 von Knoten  $L(v)$  gegeben durch:

$$w \in L(v)$$

$\Leftrightarrow$

$w = v$  oder



$w$  Vorgänger von  $v$  und es  
 gibt Rückwärtskante von  $v$   
 oder Nachfolger zu  $w$ .

(b)  $l[v] = \min \{ d[w] \mid w \in L(v) \}$

ist der low-Wert von  $v$ . □

$l[v]$  hängt vom Lauf von DFS( $g$ ) ab.

Folgerung

Sei DFS( $g$ ) gelauften und

$v$  nicht Wurzel von  $g_u$ .

$v$  ist AWPkt.

⇔

$v$  hat = Sohn  $w$  in  $g_u$  mit

$$l[w] \geq d[v]$$

□

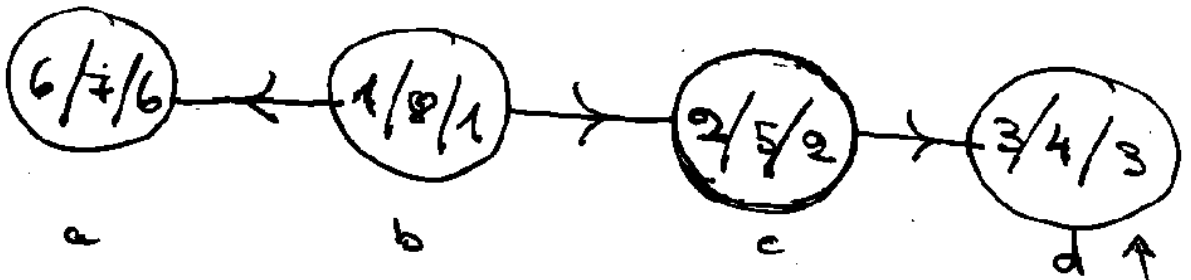
Beachte:  $l[v] = d[v]$

⇒  $v$  AWPkt. keine Äquivalenz.

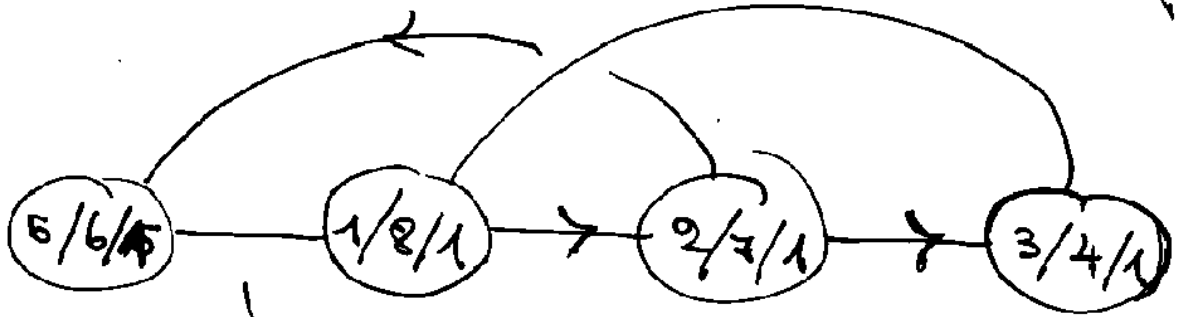
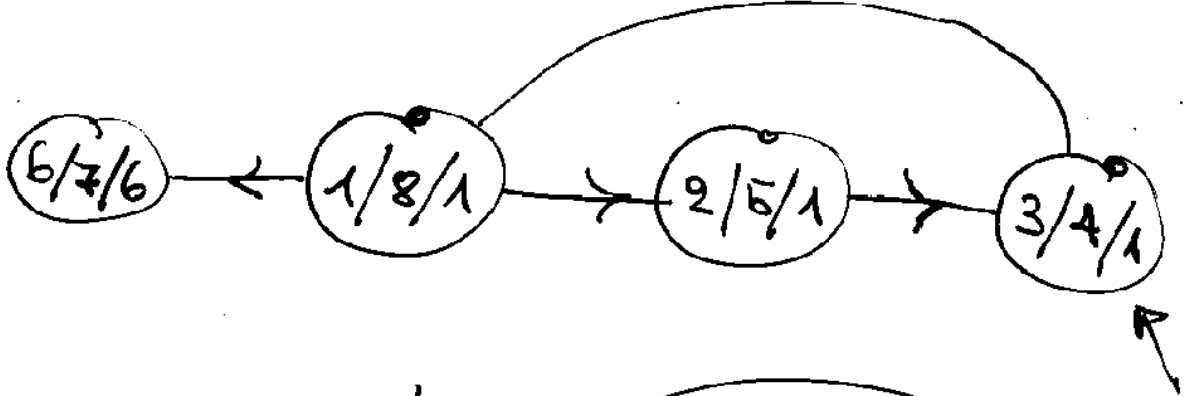


$l[v] < d[v]!$

6.26



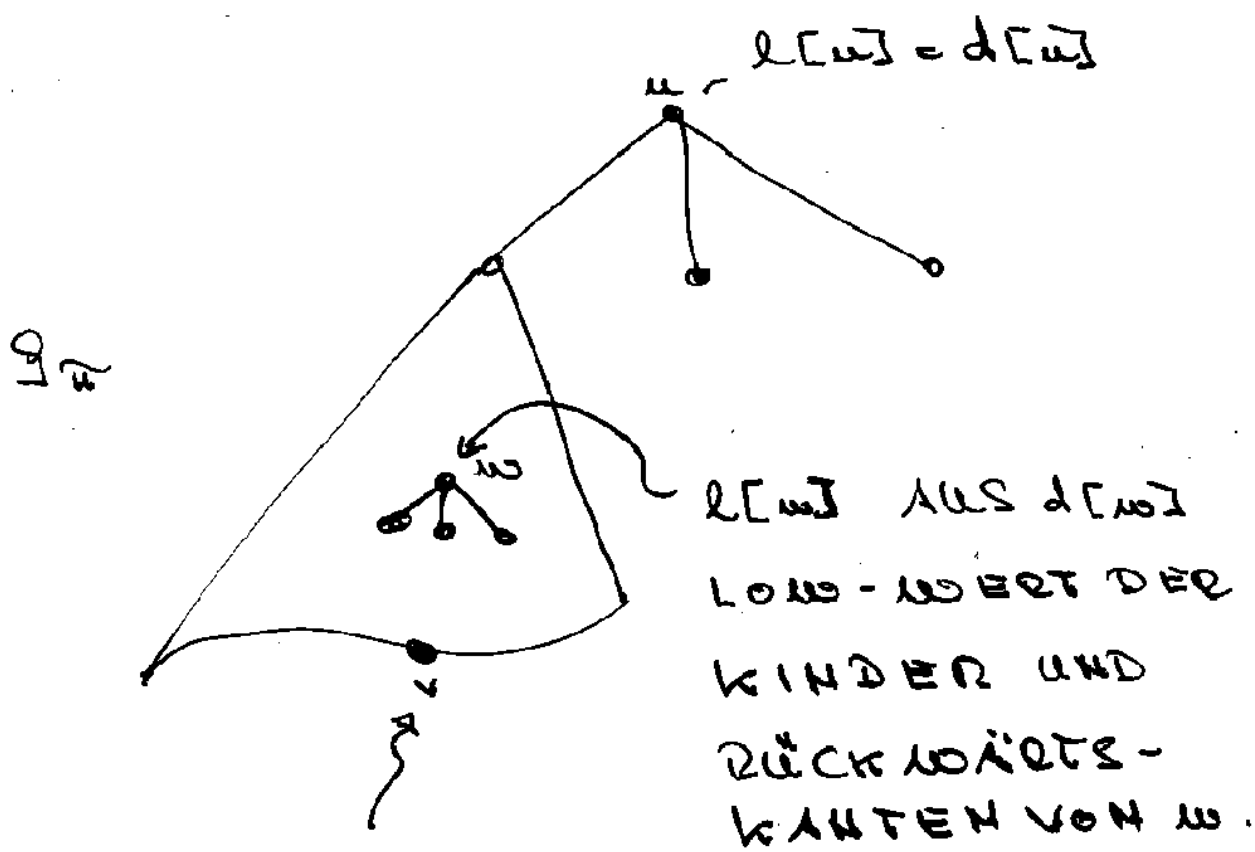
~~RÜCKWÄRTS~~



RÜCKWÄRTS

→ 6.26a

# BERECHNUNG VON $l[v]$



$l[v]$  AUS  $d[v]$ .  
UND RÜCKWÄRTS KANTEN  
VON  $v$  AUS.

KORREKTHEIT : INDUKTION  
ÜBER DIE TIEFE DES  
TEILBAUMS



# ALGORITHMUS (L-WERTE)

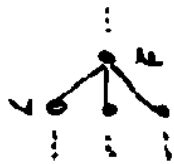
MODIFIKATION VON  
DFS- $v(u)$ :

MDFS- $v(u)$  // HIER  $col[u] = \infty$

⋮  
 $l[u] := d[u]$   
 ⋮

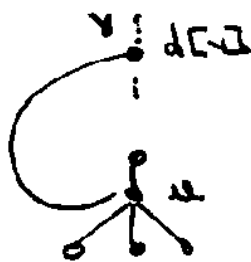
FOR EACH  $v \in ADJ[u]$  DO {

IF  $col[v] = \infty$  {



$col[v] = u$ ; MDFS- $v(v)$ ;

$l[u] := \min\{l[u], l[v]\}$



IF  $col[v] = g$  AND  $g[u] \neq v$  {

$l[u] := \min\{l[u], d[v]\}$

}

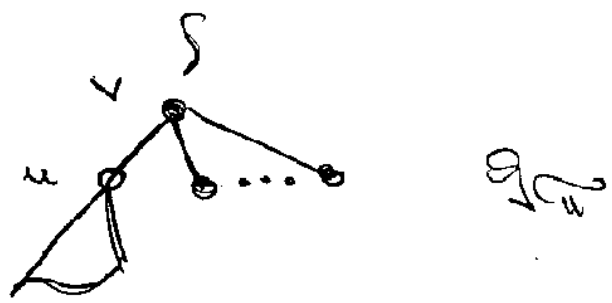
UNVERÄNDERT.

$d[v]$ ! NICHT  
 $l[v]$ . KEINE  
 ITERATION.

Dann können wir  $\Delta$  Punkte  
im Linearzeit erkennen. Es bleiben  
die 2-fachen Komponenten zu finden.  
Seien die  $l$ -Werte gegeben. Nun

2. Tiefensuche, folgendermaßen:

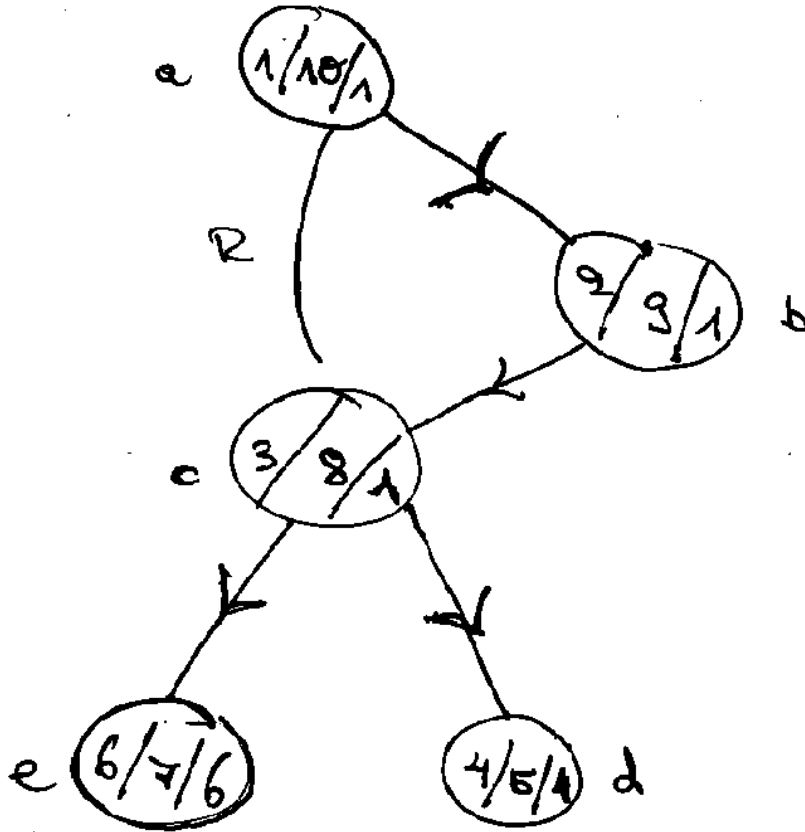
- Knoten der entdeckt wird auf  
einer Stelle speichern.



Sei jetzt  $l[u] \geq d[v]$ .

- An Ende von DFS  $-v(u)$  Stelle  
bis  $v$  (!) ausgehen. Ist 2-fache  
Komponente.  $v$  wieder oben drauf  
schreiben.

BEISPIEL



KELLERZINHALT:

↓  
↓ a  
↓ b a  
↓ c b a  
↓ d c b a

$L[d] \geq d[c]$  AUSGABE d,c

c b a  
e c b a

AUSGABE e,c

c b a

AUSGABE c,b,a AM ENDE.

# ALGORITHMUS (2-FACHE KOMP)

1. DFS( $g$ ) MODIFIZIERT FÜR  $l$ -WERTE.

2. DFS( $g$ ) IN DERSELBEN (!)

REIHENFOLGE WIE 1. MIT

NDFS- $v(u)$  //  $d[u] = \infty$

⋮

FOR EACH  $v \in \text{ADJ}[u]$  {

  IF  $d[v] = \infty$  {

$\pi[v] = u$ ;  $v$  AUF KELLER;

    NDFS- $v(v)$ ;

  IF  $l[v] \geq d[u]$  {

    AUSGABE BIS  $u$

    INKLUSIVE;  $u$  WIEDER

    SCHON AUSGEGEBEN } HIN

}

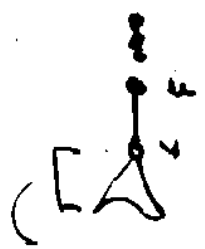
WENN  $g = v$

AUSGABE IN

DFS( $g$ ). NUR DANN.



$u, v$  IN  
EINER  
KOMP.



SCHON AUSGEGEBEN }



Korrektheit induktiv über  $i$

$s = \#$  2-faches Komponenten von  $g$ .

Ind.-Auf.,  $s=1$

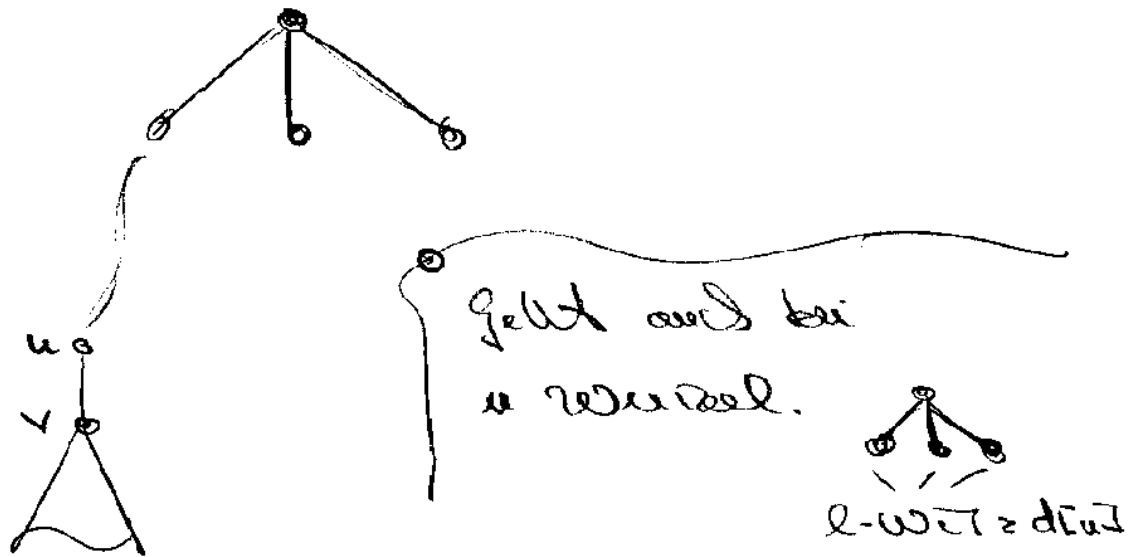
Ausgabe nur am Ende, da keine  
A.I.-Plat. also korrekt.

Ind.-Schluß

Gelte Beh. für alle Graphen  
mit  $s \geq 1$  2-fachem Komponenten  
Zeige sie für  $g$  mit  $s+1$   
Komponenten.

Nun betrachten die 2. Tiefensuche  
des Algorithmus. Die 2. Weite  
stimmen also bereits, wg.  
Korrektheit der 1. Tiefensuche.

Wir betrachten den Baum  $T_w$ ,  
dieser ist das gleiche bei 1. Tiefensuche  
und 2. Tiefensuche.



Sei  $NDFS-v(v)$  der erste Aufruf,  
nach dem Ausgabe erfolgt. Dann  
 $l[v] \geq d[u]$ .

Ist  $l[v] = d[u]$ , dann  $v$  Blatt  
(sonst vorher Ausgabe) und  $v, u$   
sind ausgegeben und  $u$  auf Kellenspitze.

Ist  $\ell[u] = d[u]$ , dann Ausgabe  
des Kellers bis  $u$  und  $u$  wieder auf  
Kellerspitze.

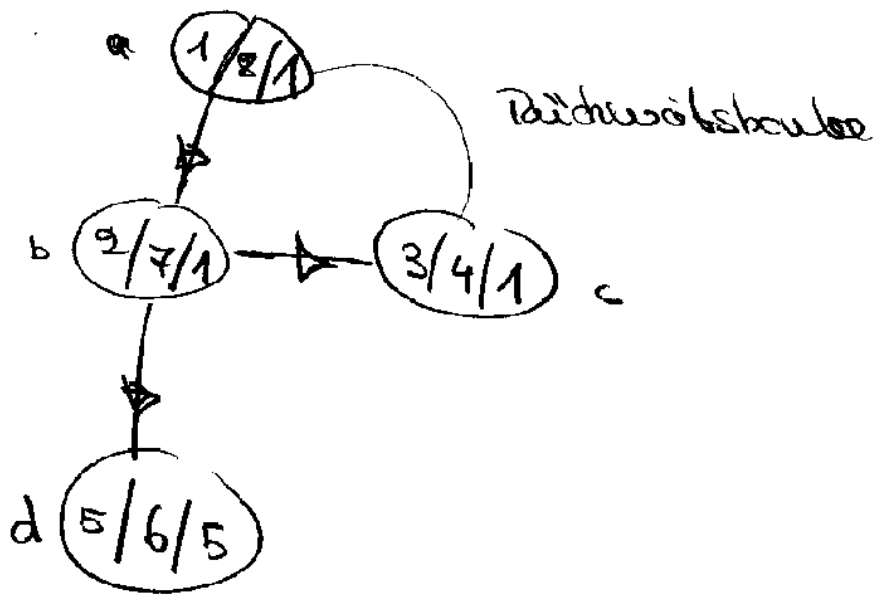
Dann wird eine 2-fache Komponente  
ausgegeben. (Hier kann nicht dazu-  
gehören, weniger nicht da bisher keine  
Art. Plat.)

Nach Ausgabe der Komponente  
liegt eine Situation vor,  
die in  $DFC-v(u)$  auftritt,  
wenn nur die Topen betrachtet,  
in dem Fall und die anderen  
ausgegebenen Zuden gelöst sind.  
Auf diesem ist die Tid.-Var anwendbar  
und der Rest wird richtig ausgegeben.  $\square$

Korrektur zum Algorithmus

2-fache Komponente auf S. 6.30.

Der Algorithmus gibt die Komponenten nicht richtig aus:



Kollektoren

	a
	ba
	cba
	d c ba

Ausgabe bis b

Falsch.

Stattdessen: Bis d und b hinzugeben.

Korrektur des Algos. auf §. 6.30.

⋮

2. DFS( $g$ )

⋮

NDFS- $v(u)$

⋮

For each  $v \in \text{Adj}[u]$  {

if  $\text{col}[v] = \text{nil}$  {

$\pi[v] = u$ ,  $v$  auf  $\mathcal{K}$  setzen

NDFS- $v(v)$

if  $\ell[v] \geq d[v]$  {

ausgabe bit  $v$  (Neu!)

inklusive,  $u$  noch

hinzuzugeben (Neu!)

⋮

Kleinere  
Korrekturen  
in Komplexitätsbeweis



$u, v$  in  
einem Komp.  
Nicht im Komp  
von  $u, v$

Zeile:

$\dots v \dots u$



Zeile: Nicht  
zu  $S(u, v)$

$\dots v \dots u$

Schon ausgegeben