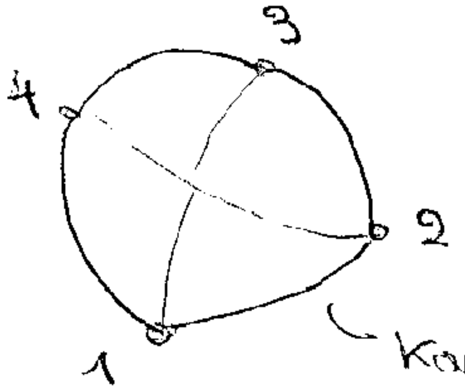
2. Grundlagen: Ungewichtete Graphen

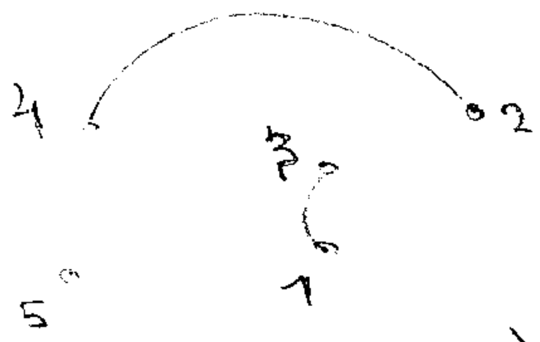
Ein typischer ungewichteter Graph:



G_1

Kante (undirected edge)

Auch einer:



G_2

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{\{4, 2\}, \{1, 3\}\}$

Beachte: Ungerichtet, deshalb Kante als Menge, $\{4,2\} = \{2,4\}$.

Manchmal auch im ungerichteten Fall Schreibweise $(4,2) = \{4,2\}$, dann natürlich $(4,2) = (2,4)$. Nicht im gerichteten Fall.

Wie im gerichteten Fall: keine Mehrfachkanten.

$\{3,2_1, (3,2)_2, (3,2)_3\}$ hier nicht

keine Schleifen 

$(3,3)$

<u>Definition</u> (ungerichteter Graph)

Ein ungerichteter Graph besteht aus 2 Mengen:
- V, beliebige endliche Menge von Knoten.
- $E \subseteq \{\{u,v\} \mid u,v \in V, u \neq v\}$, Kanten

Schreibweise $G = (V,E)$, $\{u,v\}$ ~ 
.

Folgerung

Ist $|V| = n$ fest.

a) Jeder ungerichtete Graph mit Knotenmenge V hat $\leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Kanten.

b) # ungerichtete Graphen über $V = 2^{\binom{n}{2}}$.

gerichtete $2^{n(n-1)}$.

Beweis

a) „Auswahlbaum"

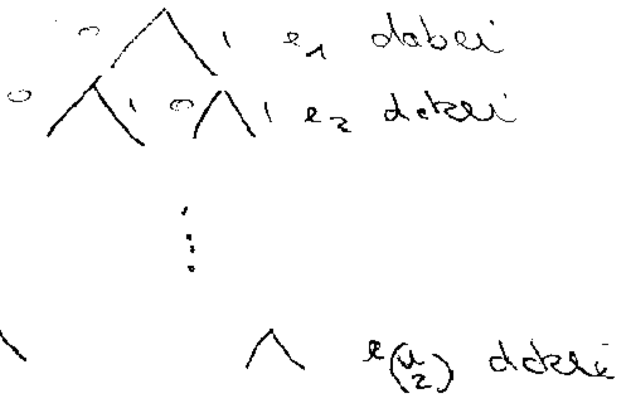
$n(n-1)$ Blätter. Blatt $\Leftrightarrow (u,v)$ $u \neq v$.

Kante $\{u,v\} \Leftrightarrow$ 2 Blätter (u,v), (v,u)

$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ Kanten.

b) Graph = Teilmenge von Kanten.

Alle Kanten: $e_1, e_2, \dots, e_{\binom{n}{2}}$.



Jedes Blatt $\Leftrightarrow$ 1 ungerichteter Graph.

Schließlich $2^{\binom{n}{2}}$ Blätter.

Alternativ: Blatt $\Leftrightarrow$ 1 Bitfolge der Länge $\binom{n}{2}$.

Es gibt $2^{\binom{n}{2}}$ Bitfolgen der Länge $\binom{n}{2}$.

□

Beachte: $\binom{n}{2}$ ist $O(n^2)$.

Adjazenz, inzident analog zum gerichteten Graph.

$\text{Grad}_{\mathcal{G}}(u) = \{\{u,v\} \mid \{u,v\} \in E\}$,

wenn $\mathcal{G} = (V, E)$. Immer

$$0 \leq \text{Grad}(u) \leq n-1.$$

Weg $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ wie im ungerichteten Graphen.

$$\text{Länge}(v_0, v_1, \ldots, v_k) = k$$

Auch ein Weg ist bei $\{u,v\} \in E$

$$(u, v, u, v, u, v).$$

Einfach $\Leftrightarrow$ $v_0, v_1, \ldots, v_k$ alle verschieden.

$$|\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}| = k+1$$

$(v_0, \dots, v_k)$ geschlossen $\Leftrightarrow$ $v_0 = v_k$.

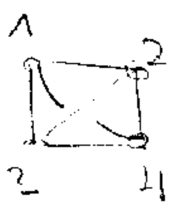
$(v_0, \dots, v_k)$ Kreis

gdw.

- $k \geq 3$ (!)
- $(v_0, \dots, v_{k-1})$ einfach
- $v_0 = v_k$

$(1, 2, 1)$ kein Kreis.
Aber $(1, 2, 3, 1)$ Kreis
$v_0 \; v_1 \; v_2 \; v_3 = v_0$.

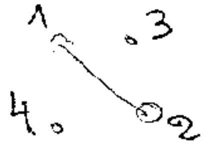
Adjazenzmatrix, symmetrisch
(im Unterschied zum gerichteten Fall)



G_1

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0

Symmetrisch $\Leftrightarrow$ $a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$



G_2

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Darstellung als array:

n^2 Speicherplätze.

Adjazenzlistendarstellung (Adj-Dstg)

Array Adj von {1

Liste der Nachbarn in irgendeiner Reihenfolge

1 → 2 → 3 → 4
2 → 1 → 3 → 4
3 → 1 → 2 → 4
4 → 1 → 2 → 3

Knoten als Inhalt eines Speicherplatzes.

Knoten als Adressen.

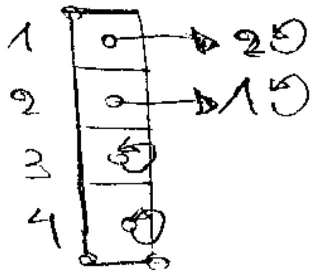
Jede Kante 2-mal dargestellt, etwa:

Kante {1,2}

1 → 2 ...
2 → 1 ...
3 ... → 4
4 ... → 3

Kante {3,4}.

Adj von G_2

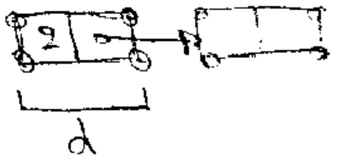


Platz zur Darstellung von $G=(V,E)$:

$c + n + d \cdot 2|E|$

Initialisierung

Jede Kante 2-mal, d etwa 2



$O(|E|)$ wenn $|E| \geq \frac{n}{2}$.

$|E|$ Kanten sind inzident mit $\leq 2|E|$ Knoten.

Adj-Listen in array, wie im gewichteten Fall.

Algorithmus (Breitensuche, BFS)

BFS(G, s) // Genau wie im
// gerichteten Fall

Eingabe: G in Adj-Listen Darst.

Datenstrukturen: Schlange $Q[1-n]$

Array $col[1-n]$.

1. $col[u]$ = weiß für alle $u \in V$.

$col[s]$ = grau

$Q = \{s\}$

2. while $Q \neq \emptyset$ { // $\{u,v\}$ wird hier gegangen

3. $u = Q[\text{head}]$ // u wird expandiert

4. for each $v \in Adj[u]$ {

5. if $col[v]$ = weiß {

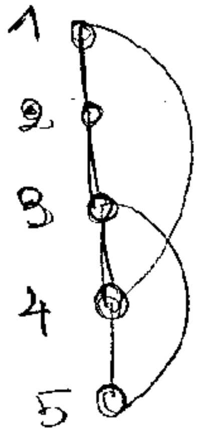
6. $col[v]$ = grau;

7. v in Schlange }}

8. u aus Q raus; $col[u]$ = schwarz.

□

2.10

G = 

$DFS(G, 1)$

ϕ

1 $\quad \{1,2\}$ als $(1,2)$, $col[2] = w$

2 4 $\quad \{1,2\}$ als $(2,1)$, $col[1] = s$

4 3 $\quad \{4,3\}$, $col[3] = g$

3 5 $\quad \{4,3\}$, $col[4] = sch$

5

ϕ

<u>Beobachtung</u>

Sei $\{u,v\}$ eine Kante!

(a) Die Kante $\{u,v\}$ wird genau 2-mal durchlaufen, einmal von u aus, einmal von v aus.

(b) Ist der erste Lauf von u aus, so ist zu dem Zeitpunkt

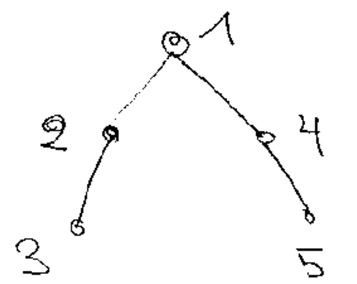
$$col[v] = w \text{ oder } col[v] = gr.$$

Beim zweiten Lauf ist dann jedenfalls

$$col[u] = sch. \qquad \square$$

Breitensuchbaum durch $\pi[1,..,n]$, Vorgänger.

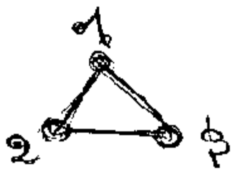
Hier



$\pi[3] = 2$, $\pi[2] = 1$, $\pi[4] = 1$, $\pi[5] = 4$.

Entdecktiefe durch $d[1..n]$. $\pi[v]$, $d[v]$ werden gesetzt, wenn v entdeckt wird.

Wir können im ungerichteten Fall erkennen, ob ein Kreis vorliegt:



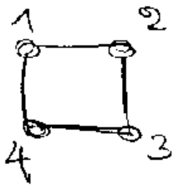
Q

1

2 3

3

Beim (ersten) Gang durch {2,3} ist col[3] = grau, d.h. 3 ∈ Q.



Q

2

1 3

3 4

4

Beim (ersten) Gang durch {3,4} ist col[4] = grau, d.h. 4 ∈ Q.

Satz

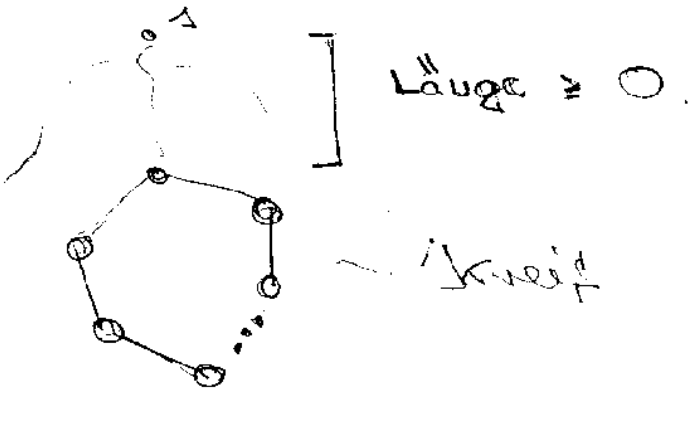
$G = (V, E)$ hat einen Kreis, der von s erreichbar ist

$\Leftrightarrow$

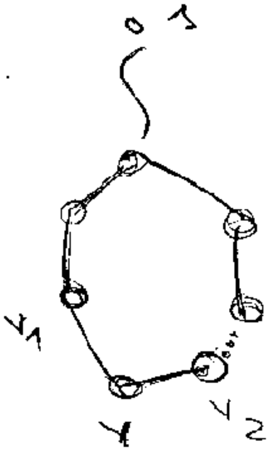
Es gibt eine Kante $e = \{u, v\}$, so, daß BFS(G, s) beim (ersten) Gang durch e auf einen grauen Knoten stoßen.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Also haben wir folgende Situation in G:



Sei v der Knoten auf dem Kreis der als letzter(!) entdeckt wird.



v_1, v_2 die beiden Nachbarn von v auf dem Kreis, $v_1 \neq v_2$.

Im dem Moment, wo v entdeckt wird ist hier

$$col[v_1] = col[v_2] = grau.$$

(schwarz kann nicht sein, da sonst v vorher bereits entdeckt, weiß auch, da v letzter.)

1. Fall: v über v_1 entdeckt, dann

$$Q = \ldots\ldots v_2 \ldots v$$

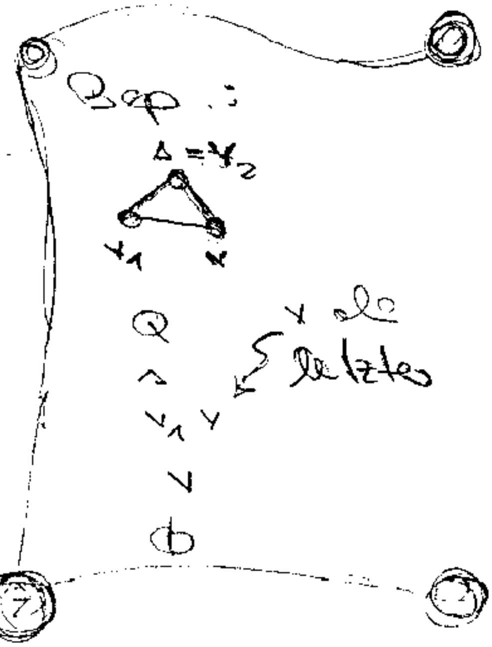
nach Expansion von v_1. (Ebenso v_2.)

2. Fall: v über $u \neq v_1$, $u \neq v_2$ entdeckt.

Dann

$Q = v_1 \ldots v_2 \ldots v$

nach Expansion von u.



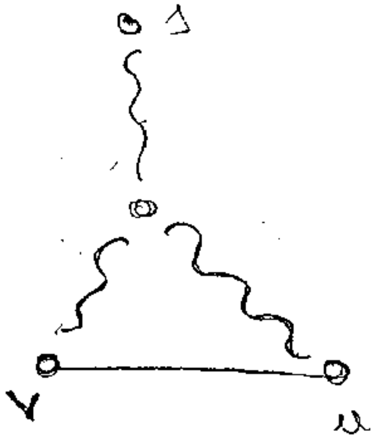
„⇐" Also bekommen wir irgendwann während der Breitensuche die Situation

$Q = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{head}}}{u} \ldots v \ldots ,$

dann beim Gang durch $\{u,v\}$ ist v grau. Dann ist $u \neq s$, $v \neq s$.

Wir haben Wege $s \rightsquigarrow v$, $s \rightsquigarrow u$

Dann im Breitensuchbaum der Suche

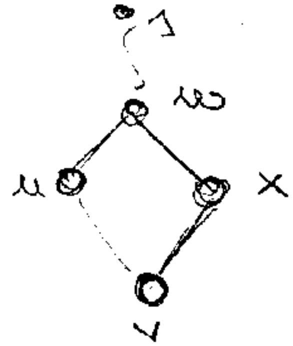


Also einen Kreis. Etwas formaler: Haben Wege

$(v_0 = 1, \dots, v_k = v)$, $(w_0 = 1, \dots, w_\ell = u)$

und $v \neq u$, $v \neq 1$, $u \neq 1$. Gehen die Wege von v und u zurück. Irgendwann die erste Knoten gleich. Da Kante $\{u,v\}$ haben wir Kreis.

Betrachten nun den Fall



Q

Δ

⋮

w ...

... x u

x u

v

v grau, wenn {u,v} gegangen wird.

Also $d[v] = d[u] + 1$. Also nicht immer $d[v] = d[u]$, wenn u v grau ist beim Gang durch u. □

<u>Definition</u> (Zusammenhang)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph.

a) G heißt zusammenhängend

gdw. für alle $u, v \in V$ gibt

es einen Weg $u \rightsquigarrow v$.

b) Sei $H = (W, F)$ $W \subseteq V$, $F \subseteq E$

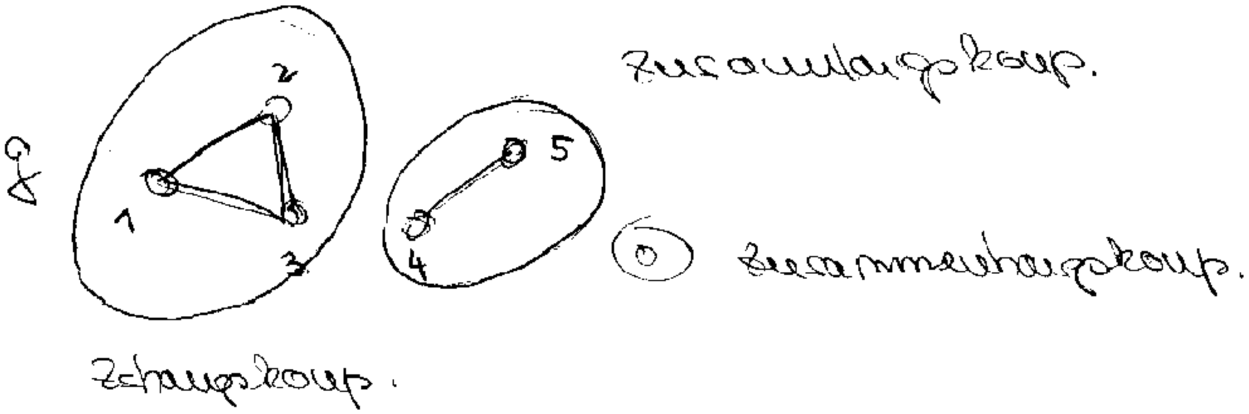
ein Teilgraph. H ist eine

Zusammenhangskomponente von G

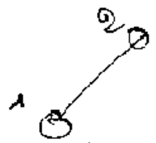
gdw.

- F enthält alle Kanten
  $\{u, v\} \in E$ mit $u, v \in W$
  (H ist der auf W induzierte Teilgraph)
- H ist zusammenhängend.
- Es gibt keine Kante $\{u, v\} \in E$
  mit $u \in W$, $v \notin W$.

Man sagt dann: H ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph. □



Beachte: Im G ist  keine Zusammenhangskomponente, da {1,3} fehlt.

Ebenso wenig  , da nicht maximaler Teilgraph, der zshg. ist.

Satz

Ist $\mathcal{G} = (V, E)$ zusammenhängend. Dann gilt

$\mathcal{G}$ hat keinen Kreis

$\iff$

$|E| = |V| - 1$

Beweis:

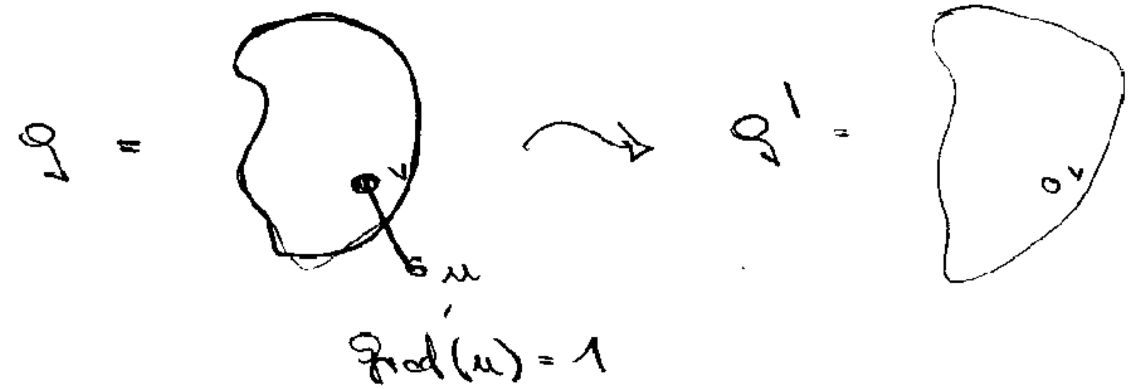
„$\Rightarrow$" Induktion über $n = |V|$.

$n = 1$, dann $\bullet$, also $E = \emptyset$.

$n = 2$, dann $\circ\!-\!\circ$, also ✓.

Sei $\mathcal{G} = (V, E)$, $|V| = n + 1$ und ohne Kreis. Da $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist und ohne Kreis gibt es Knoten vom Grad $= 1$ in $\mathcal{G}$

(Wären alle Grade ≥ 2, so hätten wir einen Kreis. Also



Dann gilt für $G' = (V', E')$.

G hat keinen Kreis

$\Rightarrow$

G' hat keinen

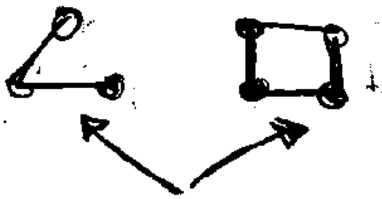
$\Rightarrow$ Ind.-Vor.

$|E'| = |V'| - 1$

$\Rightarrow$

$|E| = |V| - 1$.

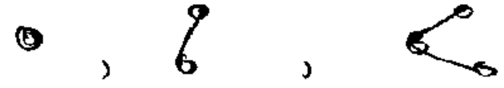
„$\Leftarrow$" Beachte zunächst, daß die Aussage für $\mathcal{G}$ nicht zshg. nicht gilt: (2.22)

 $|V| = 7$, $|E| = 6$

2 Komponenten.

Also wieder Induktion über $n = |V|$.

$n = 1, 2, 3$, dann



die Behauptung gilt.

Sei jetzt $\mathcal{G} = (V, E)$ mit $|V| = n+1$ zshg. und $|E| = |V|$. Dann gibt es Knoten vom Grad $= 1$. Sonst

Da keine vom Grad 0!

$\sum_v \operatorname{Grad}(v) \geq 2(n+1) = 2n+2$, also

$|E| \geq n+1$ $\left(|E| = \frac{1}{2} \sum_v \operatorname{Grad}(v) \right)$

Einziehen von Kante und Löschen des Knotens macht Ind.-Vor anwendbar. □

Folgerung

(a) Ist $\mathcal{G} = (V, E)$ Baum, so ist $|E| = |V| - 1$.

(b) Besteht $\mathcal{G} = (V, E)$ aus k Zshgskomponenten so gilt:

$\mathcal{G}$ kreisfrei

$\Leftrightarrow$

$|E| = |V| - k$

Beweis

(a) Baum kreisfrei und zshg.

(b) Sind

$$G_1=(V_1,E_1),\ \dots,\ G_k=(V_k,E_k)$$

die Zusammenhangskomponenten von G.

(Also insbesondere $V_1 \dot\cup \dots \dot\cup V_k = V$, $E_1 \dot\cup \dots \dot\cup E_k = E$.) Dann gilt

G_i ist kreisfrei

$\Leftrightarrow$

$|E_i| = |V_i| - 1$

und die Behauptung folgt. $\square$

Beachte aber

 $|V| = 6$, $|E| = 3 < |V|$

trotzdem Kreis.