(11.21)

Betrachten wir die induzierte Rekursionsgleichung; Annahme n 2'er Potenz.

(Bea.: $2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$, d.h. zwischen n und $2n$ existiert eine 2'er Potenz)

$$T(1) = d$$

$$T(n) = dn + 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right)$$

Versuchen $T(n) = O(n^2)$ durch Induktion zu zeigen.

1. Versuch: $T(n) \leq d \cdot n^2$

Ind.-Anf. ✓

Ind.-Schluß:

$T(n) = d \cdot n + 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right)$

$\leq d \cdot n + 4 \cdot d \cdot \frac{n^2}{4}$

$= d \cdot n + d n^2 > d n^2$ Induktion geht nicht!

(11.22)

müssen das dn irgendwie unterbringen.

2. Versuch $T(n) \leq 2dn^2$ gibt im Induktionsschluß

$T(n) \leq dn + 2dn^2 > 2dn^2$

3. Versuch $T(n) \leq 2dn^2 - dn$

Ind.-Anf. $T(1) \leq 2d - d = d$ ✓

Ind.-Schluß

$T(n) = dn + 4 \cdot T(\frac{n}{2})$

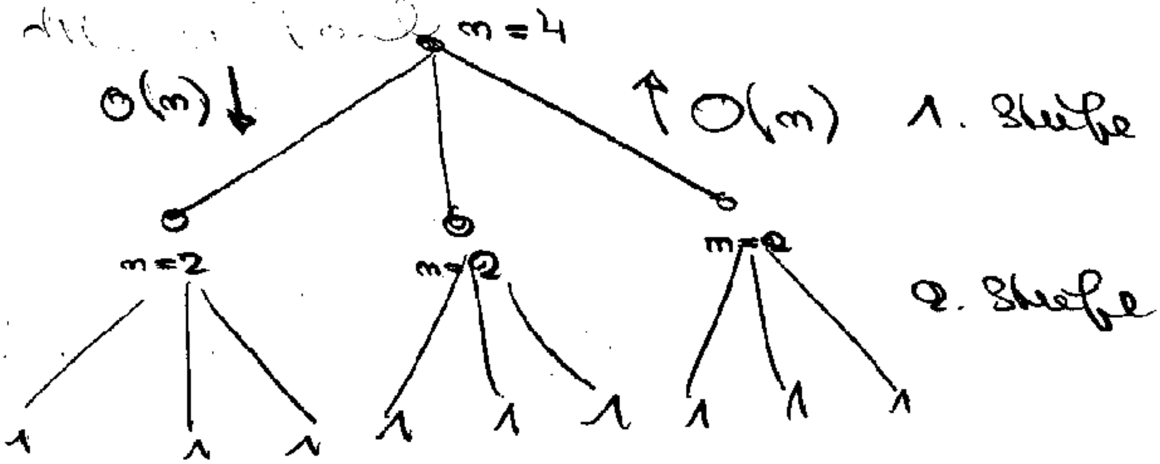
$\leq dn + 4\left(2d\frac{n^2}{4} - d\frac{n}{2}\right)$

$= dn + 2dn^2 - 2dn$

$= 2dn^2 - dn$

Vergleiche auch S. 11.12, wo $\log_2 \frac{n}{2} = \log_2 n - 1$ wichtig ist.

Nächstes Ziel: Verbesserung der Multiplikation durch nur noch 3 rekursive Aufrufe mit jeweils $\frac{n}{2}$ vielen Bits. Analysieren wir zunächst die Laufzeit.



$\log_2 n$ divide-, conquer Schritte + Zeit an n Blättern.

1. Stufe $d \cdot n$, 2. Stufe $3 \cdot d \cdot \frac{n}{2}$

3. Stufe $3 \cdot 3 \cdot d \cdot \frac{n}{4}$, ..., $\log_2 n$-te Stufe: $3^{\log_2 n - 1} d \cdot 2$

Blätter $3^{\log_2 n} \cdot d \cdot 1$

(11.24)

~~Damit ist~~

$T(n)$

$$= \sum_{i=0}^{\log_2 n} 3^i \cdot d \cdot \frac{n}{2^i}$$

$$= d \cdot n \cdot \sum \left(\frac{3}{2}\right)^i$$

$$= d \cdot n \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n + 1} - 1}{\underbrace{\frac{3}{2} - 1}_{= 1/2}}$$

geom. Reihe, vgl. S. 11.20

$$\le \cancel{2} d n \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n}$$

$$= 3 d n \cdot 2^{\log_2\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \log_2 n}$$

$$= 3 d n \cdot n^{\overbrace{\log_2\left(\frac{3}{2}\right)}^{<1}}$$

$$= 3 d n \cdot n^{\log_2 3 - \overbrace{\log_2 2}^{=1}}$$

$$= 3 d \, n^{\log_2 3} = O(n^{1,59})$$

für $b > 0$
$\log_b n = \log_b 2 \cdot \log_2 n$
$b^{\log_b n} = n$
$b^{\log_b 2 \cdot \log_2 n} = n$

Also tatsächlich besser als $O(n^2)$.

Fassen wir zusammen:

2 Aufrufe mit $\frac{n}{2}$, linearer Zusatzaufwand

$$T(n) = d\,n \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n} \underbrace{\frac{2^i}{2^i}}_{=1} = \Theta(n \cdot \log n)$$

auf jeder Stufe $d \cdot n$: 2 Aufrufe, halbe Größe

3 Aufrufe

$$T(n) = d \cdot n \sum \left(\frac{3}{2}\right)^i = O(d \cdot n^{\log_2 3})$$

3 Aufrufe, halbe Größe

4 Aufrufe

$$T(n) = d\,n \cdot \sum \left(\frac{4}{2}\right)^i = d \cdot n \cdot n = O(n^2).$$

4 Aufrufe, halbe Größe

Aufgabe: Stellen Sie für den Fall der 3 Aufrufe die Rekursionsgleichungen auf und beweisen Sie $T(n) = O(n^{\log_2 3})$ durch eine ordnungsgemäße Induktion.

Zurück zur Multiplikation.

$$\overbrace{a_1 - a_n}^{a=} = \overbrace{a_1 - a_{\frac{n}{2}}}^{a' :=} \overbrace{a_{\frac{n}{2}+1} - a_n}^{a'' :=}$$

$$\overbrace{b_1 - b_n}^{b=} = \overbrace{b_1 - b_{\frac{n}{2}}}^{b' :=} \overbrace{b_{\frac{n}{2}+1} - b_n}^{b'' :=}$$

Wir können uns einen Aufruf einsparen durch Erlauben einer zusätzlichen Additionen. Wir beobachten zunächst allgemein:

$(x-y)\cdot(u-v)$

$= x(u-v) + y\cdot(u-v)$

$= x\cdot u - x\cdot v + y\cdot u - y\cdot v$

Eine explizite Mult. und 4 implizite (aber in Summe).

Wir verwenden jetzt $a'b'' + a''b'$
auf einen Schlag zu ermitteln:

$$(a' - a'')(b'' - b')$$

$$= a'b'' - a'b' - a''b'' + a''b'$$

Und: $a'b'$, $a''b''$ brauchen wir
sowieso und

$$a'b'' + a''b' = \underbrace{(a' - a'')}\underbrace{(b'' - b')} + a'b' + a''b''.$$

< 0 möglich

Das Programm:

$\vdots$

$m_1 = \text{Mult}\left(a', b', \frac{n}{2}\right)$

$m_3 = \text{Mult}\left(a'', b'', \frac{n}{2}\right)$

if $a' - a'' < 0$, $b'' - b' < 0$

$m_2 = \text{Mult}\left(a'' - a', b' - b'', \frac{n}{2}\right)$

// $|a'' - a'|, |b' - b''| < 2^{\frac{n}{2}-1}$

if $a' - a'' \geq 0$, $b'' - b' < 0$

$\vdots$

$\text{return}\left(m_1 \cdot 2^n + \underbrace{(m_2 + m_1 + m_3)}_{\text{Zeit } O\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot 2^{\frac{n}{2}} + m_3\right)$

Damit für die Zeit

$T(1) \leq d$

$T(n) \leq d \cdot n + 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow O\left(n^{\log_2 3}\right)$.

Also Add. linear, nicht bekannt für Mult.

Wir gehen jetzt nicht davon aus, daß die Basisoperationen in $O(1)$ Zeit durchzuführen sind.

Erinnern wir uns an die Matrizenmultiplikation: quadratische Matrizen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

und allgemein haben wir bei 2 $n \times n$ - Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & — & a_{1n} \\ | & & | \\ a_{n1} & — & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & — & b_{1n} \\ | & & | \\ b_{n1} & — & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{i2} \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{in} \\ & & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{ni} b_{in} \end{pmatrix}$$

Laufzeit ist, pro Eintrag des Ergebnisses: n Multiplikationen, $n-1$ Additionen, also $\underline{O(n)}$. Bei n^2 Einträgen $O(n^3)$ $= O((n^2)^{3/2})$. Überraschend war seinerzeit, daß es besser geht, mit divide-and-conquer.

Wir könnten einen divide-and-conquer Ansatz gehen & Teilen nur die Matrizen einmal auf:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

A_{ij} sind $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ - Matrizen (wir nehmen wieder an, n 2'er Potenz)

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{in} \\ \vdots & & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni} b_{i1} & \cdots & \sum a_{ni} b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Es 16)

$$C_{11} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{i\frac{n}{2}} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{\frac{n}{2}i} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{\frac{n}{2}i} b_{i\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

Es 18)

$$A_{11} \cdot B_{11} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n/2} a_{1i} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n/2} a_{1i} b_{i\frac{n}{2}} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n/2} a_{\frac{n}{2}i} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n/2} a_{\frac{n}{2}i} b_{i\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

Es 14)

$$A_{12} B_{21} = \begin{pmatrix} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} a_{1i} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} a_{1i} b_{i\frac{n}{2}} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} a_{\frac{n}{2}i} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} a_{\frac{n}{2}i} b_{i\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

Dann

$$C_{11} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21}$$

$$C_{12} = A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22}$$

Das ergibt die Rekursion für geeignetes d:

$$T(1) \le d$$

$$T(n) \le \underbrace{d \cdot n^2}_{\text{Linear in der \# Einträge}} + 8 \cdot T\Big(\underbrace{\tfrac{n}{2}}_{\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4} \text{ Einträge}}\Big).$$

Erwartung: $T(n) \le d n^2 \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n} \underbrace{\left(\frac{8}{4}\right)^i}_{=2^i} = \Theta(n^3).$

$T(n) \le d n - 4 \cdot T(\ldots)$

$T(n) \le d n + 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right)$

Am Aufrufbaum bekommen wir :

1. Stufe $d \cdot n^2$

2. Stufe $8 \cdot d \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2$

3. Stufe $8 \cdot 8 \cdot d \cdot \left(\frac{n}{4}\right)^2$

$\vdots$

$\log_2 n$-te Stufe $8^{\log_2 n - 1} \cdot d \cdot \left(\frac{n}{2^{\log_2 n - 1}}\right)^2$ $\underbrace{}_{= 2}$

Blätter $8^{\log_2 n} \cdot d$

Also würde

$$T(n) \le d \cdot n^2 \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n} \left(\frac{8}{4}\right)^i$$

$$= d \cdot n^2 \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^i$$

$$= d \cdot n^2 \cdot \frac{2^{\log_2 n + 1} - 1}{1}$$

$$\le 2 d\, n^2 n \text{ , also } \Theta(n^3).$$

Schließlich noch die Induktion: Versuchen wir es mit $T(n) \le 2 \cdot d \cdot n^3 - d \cdot n^2$.

Die Behauptung gilt für $n = 1$. Dann kommen wir zum Induktionsschluß:

$$T(n) \le d \cdot n^2 + 8 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\le dn^2 + 8 \cdot 2d \cdot \frac{n^3}{8} - \overset{2}{\cancel{8}} \cdot d \cdot \frac{n^2}{\underset{1}{\cancel{4}}}$$

$$= 2dn^3 - d \cdot n^2.$$ Klappt gut!

Angenommen, wir könnten ähnlich wie bei der Multiplikation großer Zahlen eine der 8 Multiplikationen der $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ - Matrizen einsparen. Wir bekommen dann nur noch 7 rekursive Aufrufe. Das führt auf die Rekurrenzen:

$$T(1) \le d$$

$$T(n) \le d \cdot n^2 + 7 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right)$$

Mittels des Baumes führt das dann auf:

$$T(n) \le d \cdot n^2 \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n} \left(\frac{7}{2^2}\right)^i$$

$$= d \cdot n^2 \cdot \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{\log_2 n + 1} - 1}{\frac{3}{4}} \qquad = \frac{7}{4} - 1$$

$$= d \cdot n^2 \cdot \frac{7}{3} \cdot n^{\log_2 7 - 2} - \frac{4}{3} \cdot d \cdot n^2$$

$$= \frac{7}{3} d \cdot n^{\log_2 7} - \frac{4}{3} d \cdot n^2 .$$

Also $O(n^{\log_2 7})$.

Schließlich der Versuch einer Induktion:

$$T(n) = \frac{7}{3} d \cdot n^{\log_2 7} - \frac{4}{3} d \cdot n^2$$

Für $n = 1$ gilt die Behauptung, da $\frac{7}{3} - \frac{4}{3} = 1$.

$$T(n) \le d \cdot n^2 + 7 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\le d \cdot n^2 + 7 \cdot \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 7} - 7 \cdot \frac{4}{3} \cdot d \cdot \frac{n^2}{4}$$

$$= \frac{7}{3} n^{\log_2 7} - \frac{4}{3} d \cdot n^2 .$$

Beachte, daß $\frac{7}{3}$ vorne braucht man für den Induktionsanfang!

Wir brauchen immer noch:

$$C_{1,1} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{21}$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}.$$

Wir suchen jetzt 7 Produkte von $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ - Matrizen, $P_1, \ldots, P_7$, so daß die $C_{i,j}$ ohne weitere Multiplikation von Matrizen festgestellt werden können. Wir erlauben Produkte der A_{ij}, B_{ij} ...

$(A_{1,1} - A_{21})(B_{11} + B_{21})$

und ähnlich. Dazu eine Notation:

Es ist zum Beispiel

$$C_{11} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21}$$

Obere Hälfte von A

Linke Hälfte von B

$$= (A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}) \cdot \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix}$$

untere Hälfte

Dafür schreiben wir jetzt:

$$\begin{array}{c|c} & B_{11} \quad B_{21} \quad B_{12} \quad B_{22} \\ \hline \begin{array}{c} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{array} & \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array} = C_{1,1}$$

Noch ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} - & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = (-A_{11} - A_{12}) \cdot B_{11}$$

Beachte: Matrizenprodukt ist assoziativ, d.h. $(A \cdot B) C = A \cdot (B \cdot C)$ für alle A, B, C $n \times n$-Matrizen. Nicht kommutativ, d.h. $A \cdot B = B \cdot A$ gilt im allgemeinen nicht.

Etwa: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

In unserer Schreibweise suchen wir jetzt:

$$C_{1,1} = \begin{array}{c|cccc} & B_{11} & B_{21} & B_{12} & B_{22} \\ \hline A_{11} & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{12} & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ A_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

$$C_{1,2} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

$$C_{2,1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$$

$$C_{22} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

Um sieben Produkte, $P_1, \ldots, P_7$ mit jeweils einer Multiplikation zu ermitteln.

Irgendwie muß man anfangen.

$Q_{1,2} = P_1 + P_2$

P_1 könnte sein $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

P_2 " $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

und $C_{1,2} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = P_1 + P_2$. So leicht geht es nicht. Es könnte auch sein:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = (A_{11} + A_{12}) B_{22}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = A_{11}(B_{12} - B_{22}).$$

Dann $C_{1,2} = P_1 + P_2$

Gibt es andere Matrizen für ein einzelnes Produkt?

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = A_{11}\cdot(B_{12}+B_{22})$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & - & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & - & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = (A_{11}-A_{12}+A_{21}-A_{22})\cdot B_{21}$$

Beachte: Die A_{ij} immer linke!

Wir nehmen jetzt für C_{12}

$$C_{12} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{P_1 :=} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{P_2 :=}$$

$$P_1 = A_{11}(B_{12}-B_{22})$$

$$P_2 = (A_{11}+A_{12})\cdot B_{22}.$$

Ebenso für

$$C_{2,1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{P_3 :=} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{P_4 :=}$$

$$P_3 = (A_{21} + A_{22}) B_{11}$$

$$P_4 = A_{22}(-B_{11} + B_{21})$$

und $\quad C_{21} = P_3 + P_4 = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$

Haben 4 Multiplikationen verbraucht und $C_{1,2}$ und $C_{2,1}$ erzielt. Noch nichts Neues!

Haben noch 3 Multiplikationen für

$$C_{11} = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad C_{22} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix}$$

Beachte

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

die Hauptdiagonale lautet nach.

$$C_{11} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22}$$

Versuchen wir einmal 2 Produkte auf der rechten Seite gleichzeitig zu berechnen:

muß weg.

$$P_5 = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix}$$

Beachte: P_5 ist auch ein einzelnes Produkt von Matrizen!

muß weg.

$$P_5 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22})$$ Muß weg.

$$P_5 = \underbrace{A_{11} B_{11}}_{\text{In } C_{11}} + \underbrace{A_{11} B_{22}}_{\text{In } P_2, P_1} + \underbrace{A_{22} B_{11}}_{P_3, P_4} + \underbrace{A_{22} B_{22}}_{\text{In } C_{22}}$$

Abhilfe schafft hier zunächst einmal:

$P_5 + P_4 - P_2$

$$= \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & - & - \\ \cdot & \cdot & - & - \\ - & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & - \\ \cdot & \cdot & - & - \\ \cdot & \cdot & - & \cdot \\ \cdot & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$= A_{11} \cdot B_{11} + A_{22} B_{21} + A_{22} B_{22} - A_{12} B_{22}$$

Addition von

$$P_6 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & - & \cdot & - \end{pmatrix}$$

P_6 ist auch ein einzelnes Produkt.

$$P_6 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$

Dann $P_6 = A_{12} B_{21} + A_{12} B_{22} - A_{22} B_{21} - A_{22} B_{22}$.

$$(P_5 + P_4 - P_2) + P_6 = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = C_{11}$$

$P_6 = \left(-1 \quad \cdots \right)$

Für $C_{2,2}$ auch wieder beginnend mit P_5:

$P_5 + P_1 - P_3$

$$= \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix}.$$

Vgl. oben $P_5 + P_4 - P_2$!

Haben noch eine Multiplikation frei:

$$P_7 = \begin{pmatrix} + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & - & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$P_7 = (A_{11} - A_{21})(B_{11} + B_{21})$$

$$(P_5 + P_1 - P_3) - P_7 = \begin{pmatrix} + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & - & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} = C_{22} .$$

Also $P_1, \dots, P_7$ tun es auch

insgesamt $O(n^{\log_2 7})$.

Literatur: Cormen, Leiserson, Rivest, Schöning