9. Flüsse in Netzwerken

$G = (V, E)$ gerichtet, Kostenfunktion $\kappa: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$. Hier nenn $\kappa(u,v)$ = die Kapazität von (u,v). Stellen uns vor (u,v) stellt eine Verbindung dar, durch die etwas fließt (Wasser, Strom, Autos, ...). Dann bedeutet $\kappa(u,v) = 20$ zum Beispiel:

- ≤ 20 Liter Wasser pro Sekunde
- ≤ 10 produzierte Waren pro Tag...

Definition

Ein Flußnetzwerk ist ein gewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit

$\Omega : V \times V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $\Omega(u,v) = 0$ falls $(u,v) \notin E$.

Außerdem 2 ausgezeichnete Knoten

- $s \in V$, Quelle (source), [illegible]
- $t \in V$, Ziel (target, sink)

Wir verlangen noch: Jeder Knoten $v \in V$ ist auf einem Weg

$$s \longrightarrow v \longrightarrow t$$

□

Ziel: Ein möglichst starker Fluß pro Zeiteinheit von s nach t.

Fluß durch $u \longrightarrow v \in E$ ist

$f(u,v) \in \mathbb{R}^+$.

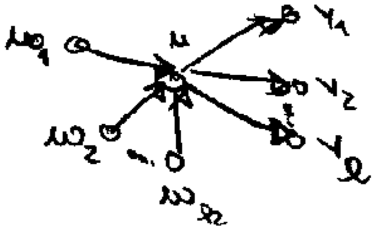
Es muß bei einem Fluß f gelten

Diese Seite mußte aus rechtlichen Gründen entfernt werden!

- $f(u,v) \le c(u,v)$

- Was zu u hinfließt muß auch wegfließen (sofern $u \ne s$, $u \ne t$).

Also



dann $\sum_{i=1}^{k} f(w_i,u) = \sum_{i=1}^{l} f(u,v_i)$.

Prinzip: Methode der Erweiterungspfade (Ford-Fulkerson 1950er Jahre)

1. Beginne mit dem Fluß 0, $f(u,v) = 0$ für alle (u,v)

2. Suche einen Weg (Erweiterungspfad)

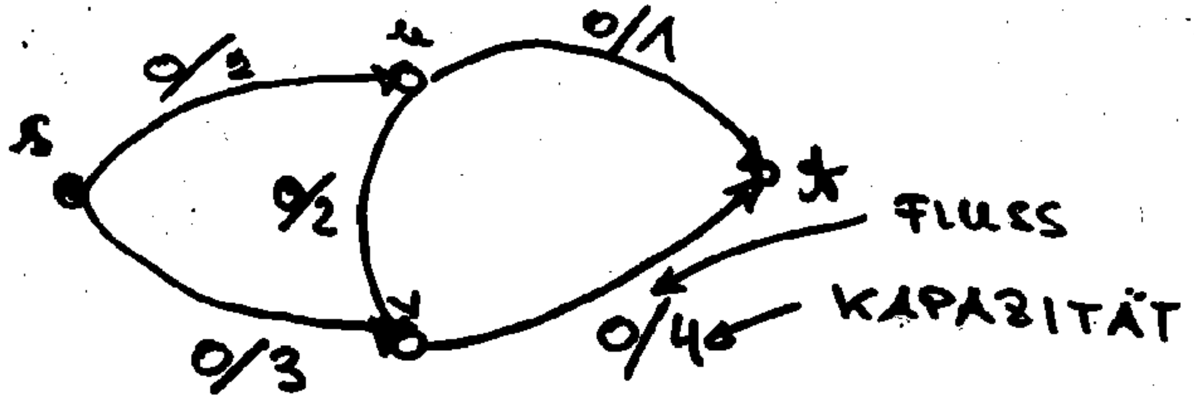
$$s = v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k = t$$

so daß für alle i

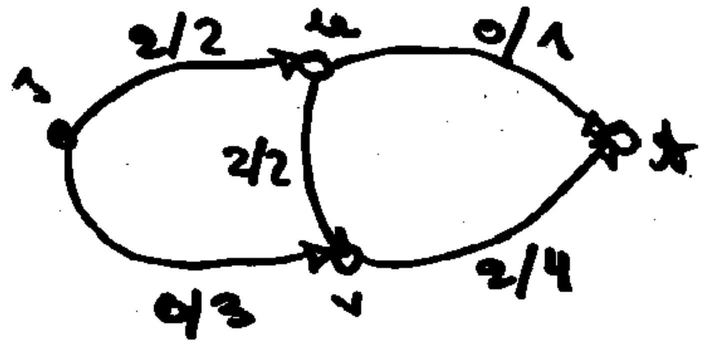
$$f(v_i, v_{i+1}) \lneq c(v_i, v_{i+1}).$$

3. Erhöhe den Fluß entlang des Weges so weit es geht. Dann bei 2. weiter.

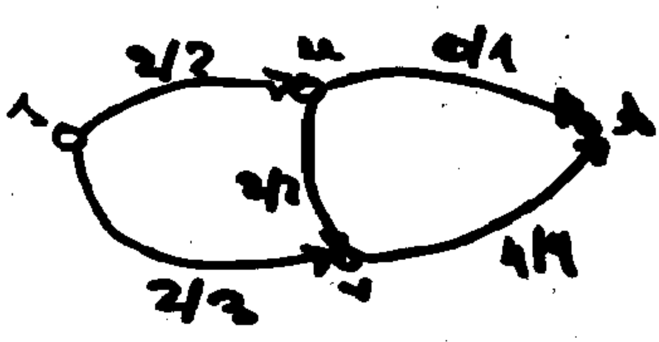
WIESO NEGATIVE FLÜSSE?



WEG (s, u, v, t) +2

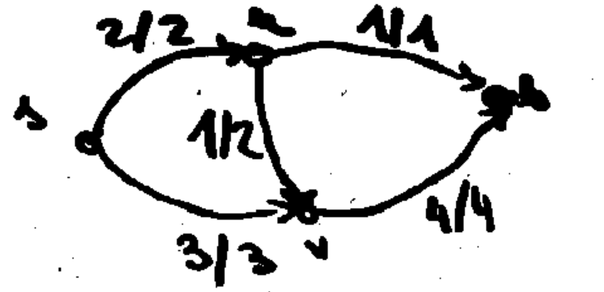


WEG (s, v, t) +1



KEIN ERWEITERUNGSPFAD.

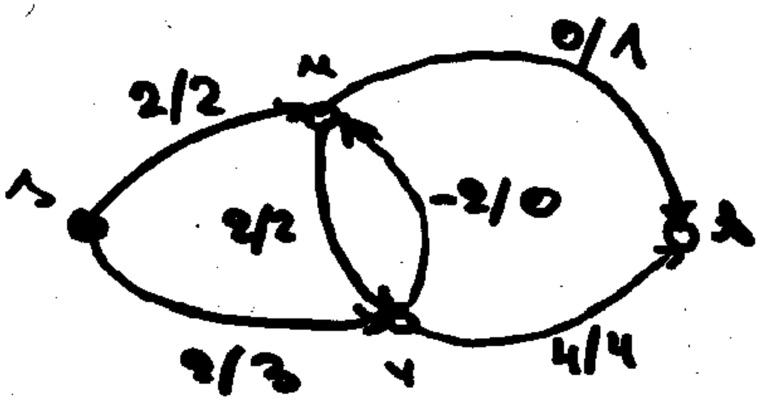
ABER



GRÖSSER!

$\overrightarrow{2.6a}$

MIT NEGATIVEN FLÜSSEN.



IMMER $f(u,v) = -f(v,u)$.

[illegible] $f\ (s, v, u, t) + 1$

GIBT MAXIMALEN FLUSS.

Wir lassen auch $f(u,v) < 0$ zu.

Definition

Ein Fluß ist eine Funktion

$$f: V \times V \to \mathbb{R}$$

mit

- $f(u,v) \leq c(u,v)$ für alle u,v (Kapazitätsbedingung)
- $f(u,v) = -f(v,u)$ (Symmetrie)
- Für alle $u \neq s$, $u \neq t$ gilt

$$\sum_{v \in V} f(u,v) = 0 \quad \text{(Kirchhoffsches Gesetz)}$$

$$\underbrace{f(u,w_1)}_{= -f(w_1,u)} + f(u,w_2) + f(u,v_1) + f(u,v_2) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$f(w_1,u) + f(w_2,u) = f(u,v_1) + f(u,v_2)$$

$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)$ ist der Wert von f.

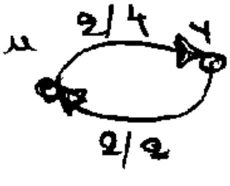
Problem: Maximaler Fluß!!!

- Immer ist $f(u,u) = -f(u,u) = 0$, da $c(u,u) = 0$, da nie $(u,u) \in E$.

- Auch $f(u,v) = f(v,u) = 0$ wenn $(u,v), (v,u) \notin E$. Denn es ist $f(u,v) = -f(v,u)$ also ein Wert > 0.

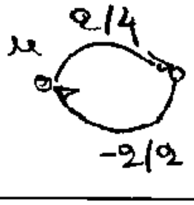
- Ist $f(u,v) \neq 0$ so $\overset{u}{\circ} \longrightarrow \overset{v}{\circ} \in E$ oder $\overset{v}{\circ} \longrightarrow \overset{u}{\circ} \in E$.

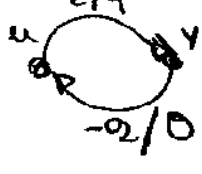
- Nicht sein kann



wegen $f(u,v) = -f(v,u)$. Hier würden wir setzen $f(u,v) = f(v,u) = 0$

wir können (müssen) kürzen,

Also 

oder 

geht.

Diese Seite mußte aus rechtlichen Gründen entfernt werden!

Definition

Gegeben ist das Flußnetzwerk $G=(V,E)$ mit Kapazität $\Omega : V\times V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ und ein zulässiger Fluß $f: V\times V \to \mathbb{R}$.

- Das Restnetzwerk G_f mit Restkapazität Ω_f ist gegeben durch:

Ein

$$\Omega_f(u,v) = \Omega(u,v) - f(u,v) \geq 0,$$

$$E_f = \{(u,v) \mid \Omega_f(u,v) \gneq 0\}$$

$$G_f = (V, E_f)$$

Es ist $\Omega_f(u,v) \geq 0$, da $f(u,v) \leq \Omega(u,v)$

- Ein Erweiterungspfad von G und f ist ein einfacher Weg in G_f

$$W = \overset{s=v_0}{\circ} \to \overset{v_1}{\circ} \to \overset{v_2}{\circ} \to \dots \to \overset{v_k=t}{\circ}.$$

Die Restkapazität von W ist
$$\Omega_f(W) = \min\{\Omega_f(v_i,v_{i+1})\}.$$

Nach Definition $\Omega_f(v_i,v_{i+1}) \gneq 0$.

Es ist G_f ein Flußnetzwerk

und es ist

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

mit

$$g(v_i, v_{i+1}) = R_f(w) > 0$$

$$g(v_{i+1}, v_i) = -R_f(w) = -g(v_i, v_{i+1})$$

$$g(u,v) = 0 \text{ für } (u,v) \notin w$$

ein zulässiger Fluß auf G_f. $|g| = R_f(w)$.

Tatsächlich gilt nun sogar:

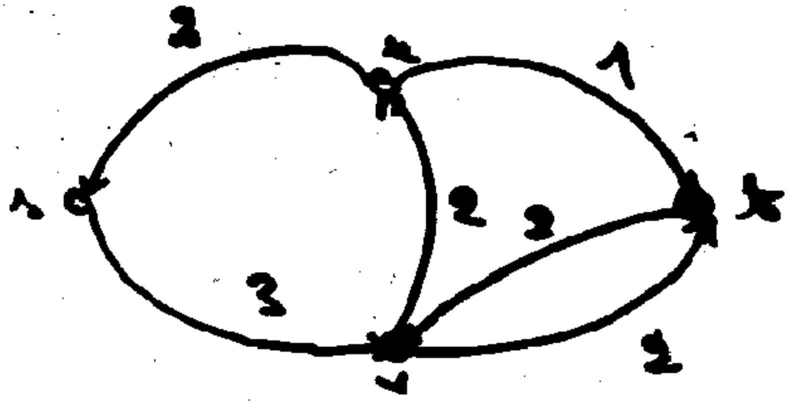
<u>Lemma:</u>

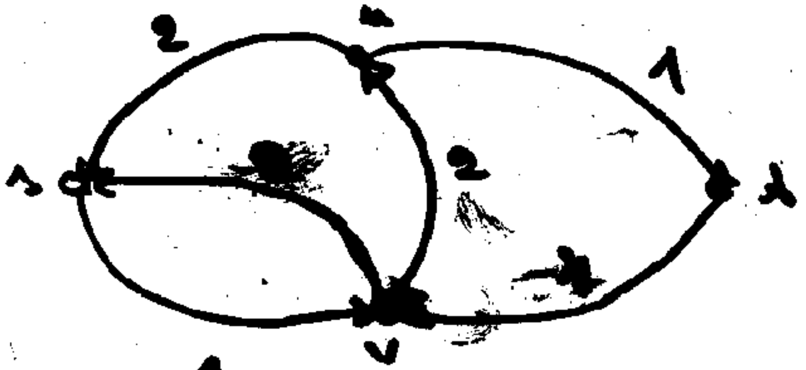
Sei G, k, f Flußnetzwerk mit zulässigem Fluß f. Sei G_f das Restnetzwerk. Sei g irgendein zulässiger Fluß auf G_f. Dann

$f+g$ Fluß auf G, $|f+g| = |f| + |g|$.

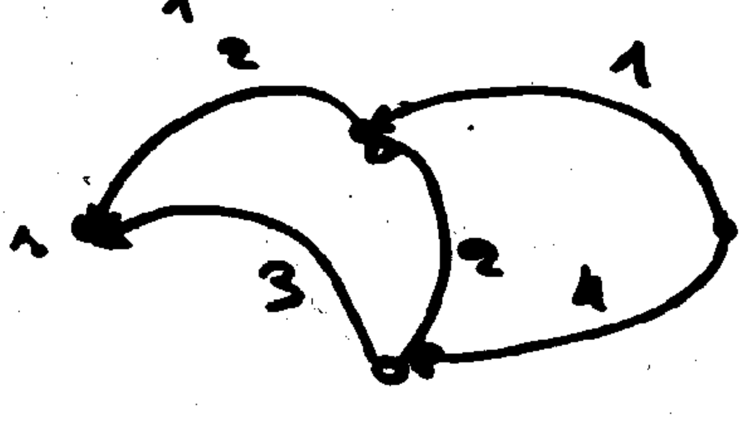
8.12

RESTNETZWERKE ZU 8.6, 8.6a





KAPAZITÄTEN IMMER ≥ 0 !



KEIN ERWEITERUNGSPFAD.

Beweis: Also müssen überlegen, daß $f+g$ zulässiger Fluß von G ist

Kapazitätsbedingung: Für g ist $g(u,v) \le c_f(u,v)$

$$g(u,v) \le c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v).$$

Also

$$(f+g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v)$$

$$= f(u,v) + g(u,v)$$

$$\le f(u,v) + c(u,v) - f(u,v) = c(u,v).$$

Symmetrie

$$(f+g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v)$$

$$= f(u,v) + g(u,v)$$

$$= -f(v,u) - g(v,u)$$

$$= -(f+g)(v,u)$$

Kirchhoff: Sei $u \in V \setminus \{s, t\}$, dann

$$\sum_{v \in V} (f+g)(u,v)$$

$$= \sum_{v \in V} \big(f(u,v) + g(u,v) \big)$$

$$= \sum_{v \in V} f(u,v) + \sum_{u \in V} g(u,v)$$

$$= 0.$$

Schließlich

$$|f+g| = \sum_{v \in V} (f+g)(s,v) = |f| + |g|. \quad \square$$

<u>Algorithmus</u> (Ford-Fulkerson)

1. $f(u,v) = 0$ für alle $u, v \in V$.
1. $f(u,v) = 0$ für alle $u, v \in V$
2. while Es gibt Weg $s \rightsquigarrow t$ in G_f {
3. $W :=$ ein Erweiterungspfad in G_f;
4. $g :=$ Fluß in G_f mit $g(u,v) = r_f(W)$
für $u \to v \in W$, wie oben
5. $f := f + g$ }

gib f als maximalen Fluß aus.

Diese Seite mußte aus rechtlichen Gründen entfernt werden!

2.15

Definition

Ein Schnitt eines Flußnetzwerks $G = (V, E)$ ist eine Partition S, T von V, d.h. $V = S \cup T$ mit $s \in S$ und $t \in T$.

- Kapazität von S, T ≥ 0

$$c(S,T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c(u,v)$$

$u \in S$, $v \in T$

- Ist f ein Fluß, so

$$f(S,T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(u,v) .$$

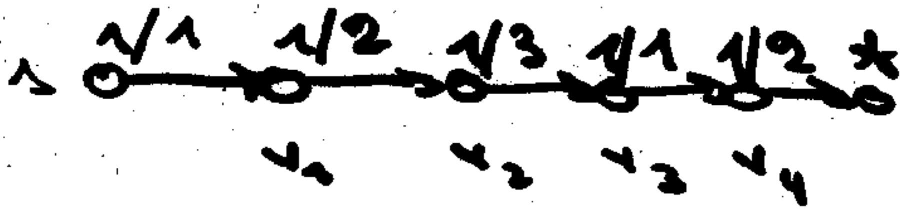
□

Immer ist

$$f(S,T) \leq c(S,T)$$

und $|f| = f(\{s\}, V \setminus \{s\})$.

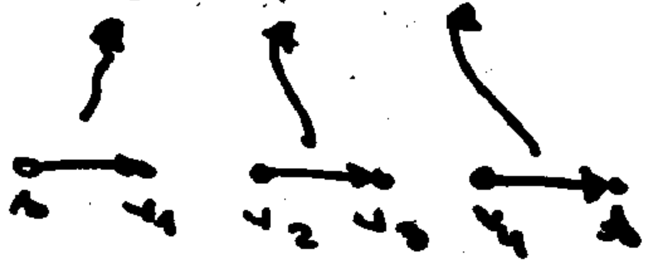
EIN FLUSSNETZWERK



$S = \{s, v_2, v_4\}$

$T = \{v_1, v_3, t\}$

$c(S,T) = 1 + 3 + 2 = 6$



$F(S,T) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$

BETRAG DES FLUSSES.

S, T IN MEHREREN STÜCKEN ⇒ KEIN MINIMALER SCHNITT.

Tatsächlich gilt sogar für jeden Schnitt S, T, daß

$$f(S,T) = |f|$$

Induktion über $|S|$. $|S| = 1$, dann $S = \{s\}$, dann gilt es.

Sei $|S| = l+1$, $v \in S \setminus \{s\}$, sei

$$S' = S \setminus \{v\}, \quad T' = T \cup \{v\}.$$

Dann

$$f(S,T)$$

$$= f(S', T') + \sum_{u \in S} f(u,v) + \sum_{u \in T} f(v,u)$$

$$= |f| + \sum_{u \in V} f(v,u) = |f|.$$

Also: Für jeden Schnitt $|f| \leq c(S,T)$.

Also auch

$$\max\{|f| \mid f \text{ Fluß}\}$$

$$\leq \min\{\Omega(S,T) \mid S,T \text{ Schnitt}\}$$

Es gibt einen Fluß f^*, der diese obere Schranke erreicht,

$$f^* = \min\{\Omega(S,T) \mid S,T \text{ Schnitt}\}.$$

Satz (Min cut max flow Satz, minimaler Schnitt, maximaler Fluß)

Ist f ein zulässiger Fluß in G.
Äquivalent sind (1), (2) und (3).

(1) f ist maximaler Fluß.

(2) G_f hat keinen Erweiterungspfad

(3) Es gibt einen Schnitt S,T so daß
$|f| = \Omega(S,T)$.

Summe
$f(S,T)=|f|$
$\Omega(S,T)\geq|f|$

(2.20)

__Beweis:__

(1) $\Rightarrow$ (2) gilt da f maximal, gälte (2) nicht, dann auch (1) nicht.

(2) $\Rightarrow$ (3) Setze

$S = \{u \in V \mid$ Es gibt Weg $s \to u$ in $G_f\}$

$T = V \setminus S$

Dann $s \in S$ und $t \in T$, da kein Erweiterungspfad nach (2). Also S, T ist trennender Schnitt.

Für $u \in S$, $v \in T$ gilt:

$0 = c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$

Also $c(u,v) = f(u,v)$.

Dann $|f| = f(S,T)$

$= \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(u,v) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c(u,v) = c(S,T)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) gilt da immer $|f| \leq \Omega(A, B)$

□

Korrektheit von Ford-Fulkerson: Invariante:

f_e ist zulässiger Fluß

Quintessenz: Am Ende ist f_e maximaler Fluß. (min cut max flow).

Termination: $f_e(S, T)$ erhöht sich jedesmal.

Laufzeit von Ford Fulkerson?

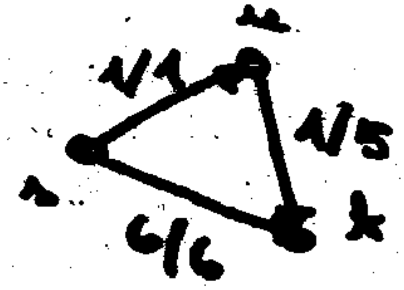
Bei ganzzahligen Kapazitäten

rechtl $O(|E| \cdot |f^*|)$, wobei

f^* ein maximaler Fluß ist.

Rationale Zahlen: Normieren.

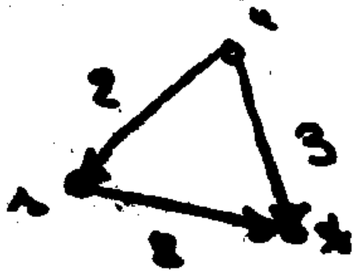
MIN. SCHNITT = MAX. FLUSS



FLUSS f

$S = \{s, u\}$ $T = \{t\}$

$\kappa(S,T) = f(S,T) = 7$



$S = \{s\}$, $T = \{u, t\}$ $\kappa(S,T) = 8$

$S = \{s, u\}$, $T = \{t\}$ $\kappa(S,T) = 11$

$|f| \leq 8.$

VERGLEICHE AUCH S.15