Prof. Andreas Goerdt
Andreas Berger

TU Chemnitz
Wintersemester 2002/03

Parallele Algorithmen

5. Übung

1. Aufgabe

Bei der Analyse der parallelen Algorithmen zum Suchen, Mischen und Sortieren sind wir davon ausgegangen, dass zwei Elemente in den Eingabefeldern paarweise verschieden sind. Wie kann man auch Eingabefolgen mit gleichen Elementen behandeln?

2. Aufgabe

Gegeben sei ein sortiertes Feld X mit n Zahlen und eine weitere Zahl z. Zusätzlich sei $t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion mit $1 \leq t(n) \leq \log n$.

Geben Sie einen Algorithmus an, der die Anzahl Rang$(z : X)$ derjenigen Elemente aus X bestimmt, die kleiner als z sind. Ihr Algorithmus sollte nicht mehr als $\mathcal{O}(t(n))$ parallele Zeit benötigen und dabei nur $\mathcal{O}(t(n) \cdot n^{\frac{1}{t(n)}})$ Operationen ausführen.

3. Aufgabe

Wir beschäftigen uns mit Pattern-Matching. Sei $W = \{0,1\}^*$ die Menge aller Wörter über dem binären Alphabet $\{0,1\}$ und $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ die Menge aller ganzzahligen 2×2-Matrizen. Für zwei Wörter $v, w \in W$ sei $k = v \oplus w$ die Konkatenation. Wir definieren wie im Skript eine „Fingerabdruck"-Funktion $f : W \mapsto \mathbb{Z}^{2\times 2}$ mit

$$f(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $v, w \in W$ setzen wir

$$f(v \oplus w) = f(v) \cdot f(w).$$

(a) Zeigen Sie, dass f wohldefiniert ist. Weisen Sie dazu nach, dass $f(a \oplus b) = f(c \oplus d)$ für $a \oplus b = c \oplus d$ ist.

Wir wollen jetzt Lemma 5.20 aus dem Skript beweisen.

(b) Zeigen Sie, dass f injektiv ist. Wie lässt sich ein Wort w zu einem gegebenen Fingerabdruck $f(w)$ bestimmen?

(c) Die Determinante $\det M$ einer 2×2-Matrix $m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist definiert als

$$\det M = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Weisen Sie nach, dass $\det f(w) = 1$ für alle $w \in W$.

(d) Wir definieren die Folge von Fibonacci-Zahlen F_m $(m \geq 1)$ wie folgt: $F_1 = F_2 = 1$ und $F_m = F_{m-2} + F_{m-1}$ für $m > 2$. Sei $w \in W$ ein Wort mit Länge $|w| = m$ und $f(w) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ sein Fingerabdruck. Zeigen Sie, dass $a_i \leq F_{m+1}$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.