Technische Universität Chemnitz
Professur Theoretische Informatik
Prof. Dr. A. Goerdt, Dipl.-Inf. F. Schädlich

Wintersemester 2001/02

13. Übung „Theoretische Informatik I“
Lösungsvorschläge

Aufgabe 13.1:

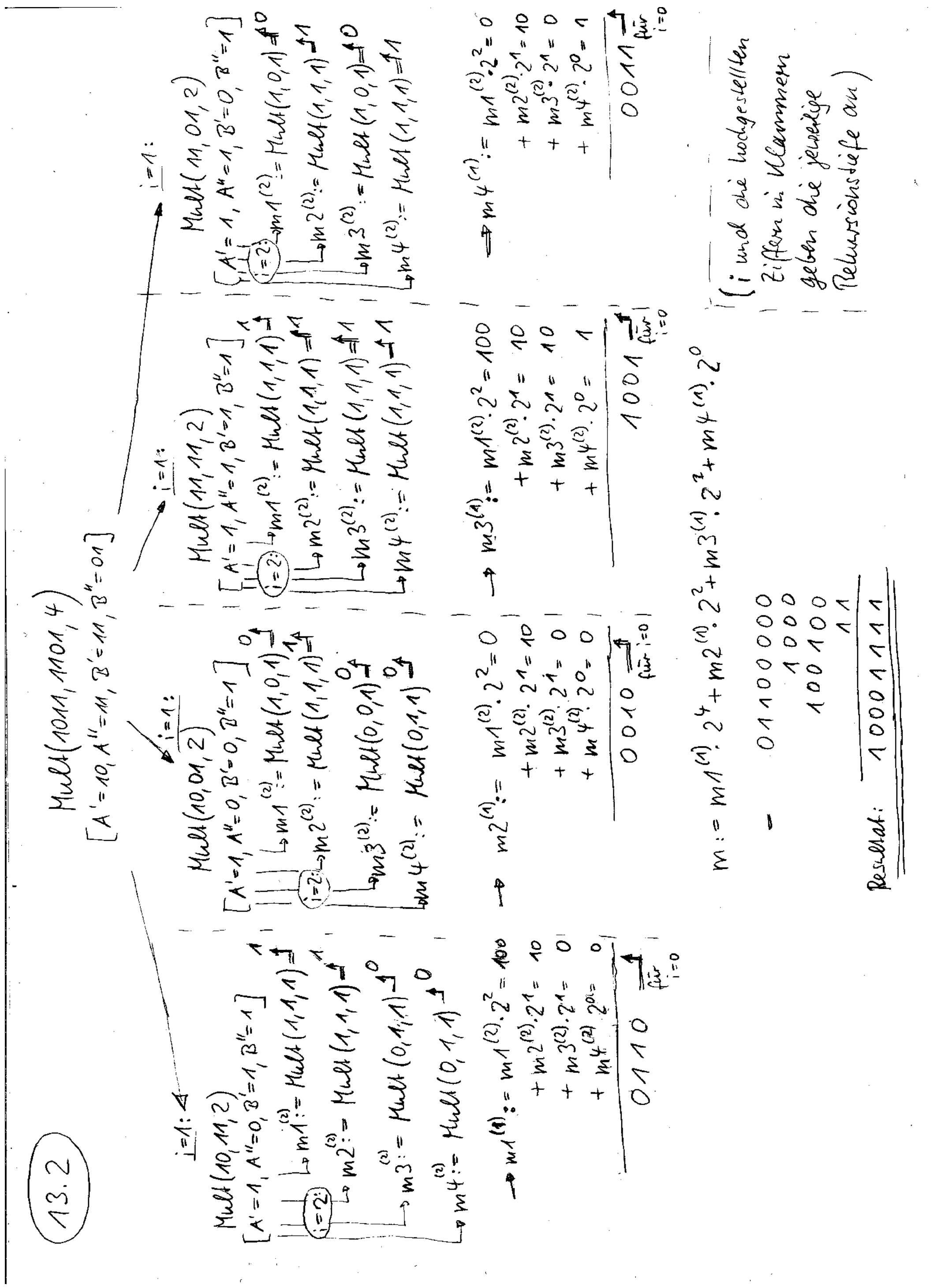
$$z_1 = a_1 + b_1 \imath$$
$$z_2 = a_2 + b_2 \imath$$

$$z = z_1 \cdot z_2$$

$$z = (a_1 + b_1 \imath)(a_2 + b_2 \imath)$$
$$z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\imath$$
$$z = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - a_1 b_2 + a_2 b_1 \ + \ a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\imath$$
$$z = ((a_1 + b_1)(a_2 - b_2) \ + \ a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\imath$$

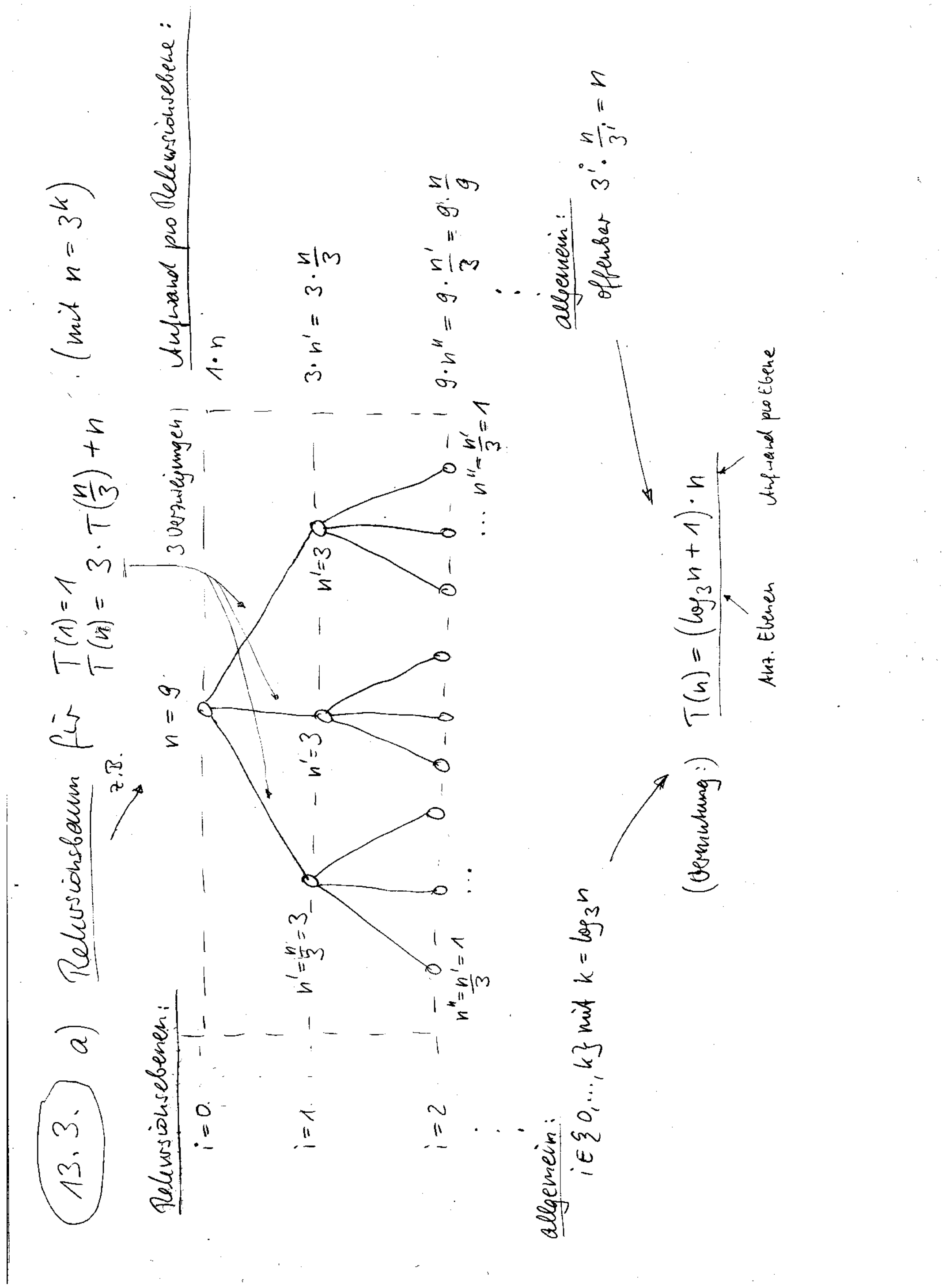
Aufgabe 13.2:

$1011 \cdot 1101 = 10001111$



Aufgabe 13.3:

a) Zunächst stellt man die Rekursion als Baum dar:

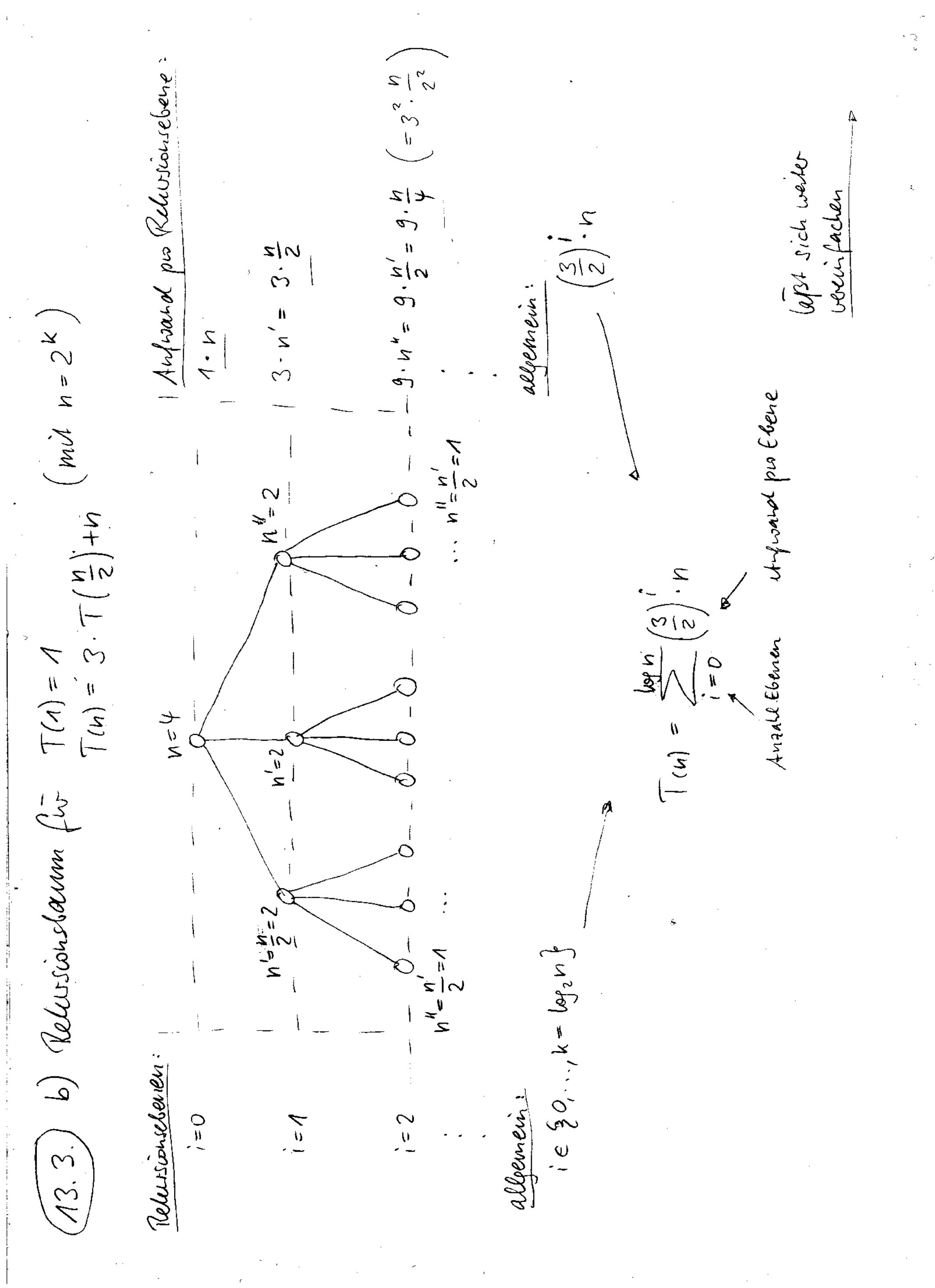


Hieraus liest man die Lösung

$$T(n) = n(\log_3 n + 1)$$

ab. Diese kann leicht induktiv bewiesen werden.

b) Zunächst stellt man die Rekursion als Baum dar:



Die gefundene Summenformel formt man nun weiter um:

13.3 b)

$$T(n) = \left(\sum_{i=0}^{(\log n)-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i \cdot n\right) + 1 = n \underbrace{\sum_{i=0}^{\log n} \left(\frac{3}{2}\right)^i}$$

$$\left[\text{eine geometr. Reihe} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}\right]$$

$$= n \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log n + 1} - 1}{\frac{1}{2}} = n \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log n} - 1}{\frac{1}{2}} \quad | \cdot 2$$

$$= n \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log n} - 2\right) = 3n \left(\frac{3}{2}\right)^{\log n} - 2n \quad | \, 3n \text{ ausklammern}$$

$$= 3n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\log n} - \frac{2}{3}\right) \quad \left[\log_2 n = \frac{\log_{\frac{3}{2}} n}{\log_{\frac{3}{2}} 2}\right]$$

$$= 3n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\log_{\frac{3}{2}} n}{\log_{\frac{3}{2}} 2}} - \frac{2}{3}\right) \quad \left[a^{\frac{\log_a n}{\log_a 2}} = \Big(\underbrace{a^{\log_a n}}_{= n}\Big)^{\frac{1}{\log_a 2}}\right]$$

$$= 3n \left(n^{\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} 2}} - \frac{2}{3}\right) = 3 \cdot n^1 \cdot n^{\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} 2}} - 2n$$

$$= 3 n^{\underbrace{\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} 2} + 1}} - 2n$$

$$\left[\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} 2} + 1 = \frac{\log_{\frac{3}{2}} 2 + 1}{\log_{\frac{3}{2}} 2} = \frac{\log_{\frac{3}{2}} 2 + \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)}{\log_{\frac{3}{2}} 2} \leftarrow [\log_a a = 1]\right.$$

$$= \frac{\log_{\frac{3}{2}} 3}{\log_{\frac{3}{2}} 2} \quad [\text{wegen } \log_c a + \log_c b = \log_c (ab)]$$

$$\left. = \log_2 3 \quad \left[\text{wegen } \log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}\right]\right]$$

$$\underline{T(n) = 3n^{\log_2 3} - 2n}$$

Induktionsbeweis $\longrightarrow$

Hieraus liest man die Lösung

$$T(n) = 3n^{log_2 3} - 2n$$

ab. Diese kann leicht induktiv bewiesen werden:

13.3 b) <u>Induktionsbeweis für $T'(n) = 3n^{\log_2 3} - 2n$</u>

IA $T'(1) = 3 \cdot 1^{\log_2 3} - 2 \cdot 1 = 1 = T(1)$

IV $T'(n) = 3n^{\log_2 3} - 2n$

(d.h. $T'(n)$ gilt für $i \in \{1, \dots, n\}$)

IS <u>Behauptung</u>:

$$T'(2n) = 3 \cdot (2n)^{\log_2 3} - 2(2n)$$

$$T'(2n) = 3 \cdot T\left(2 \cdot \frac{n}{2}\right) + 2n \leftarrow$$

aus $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ bzw. $T(2n) = 3T\left(2\frac{n}{2}\right) + 2n$

$$= 3 \cdot \underbrace{\left(3n^{\log_2 3} - 2n\right)}_{T(n) \text{ aus IV eingesetzt}} + 2n$$

$$= 9n^{\log_2 3} - 6n + 2n = 9n^{\log_2 3} - 4n$$

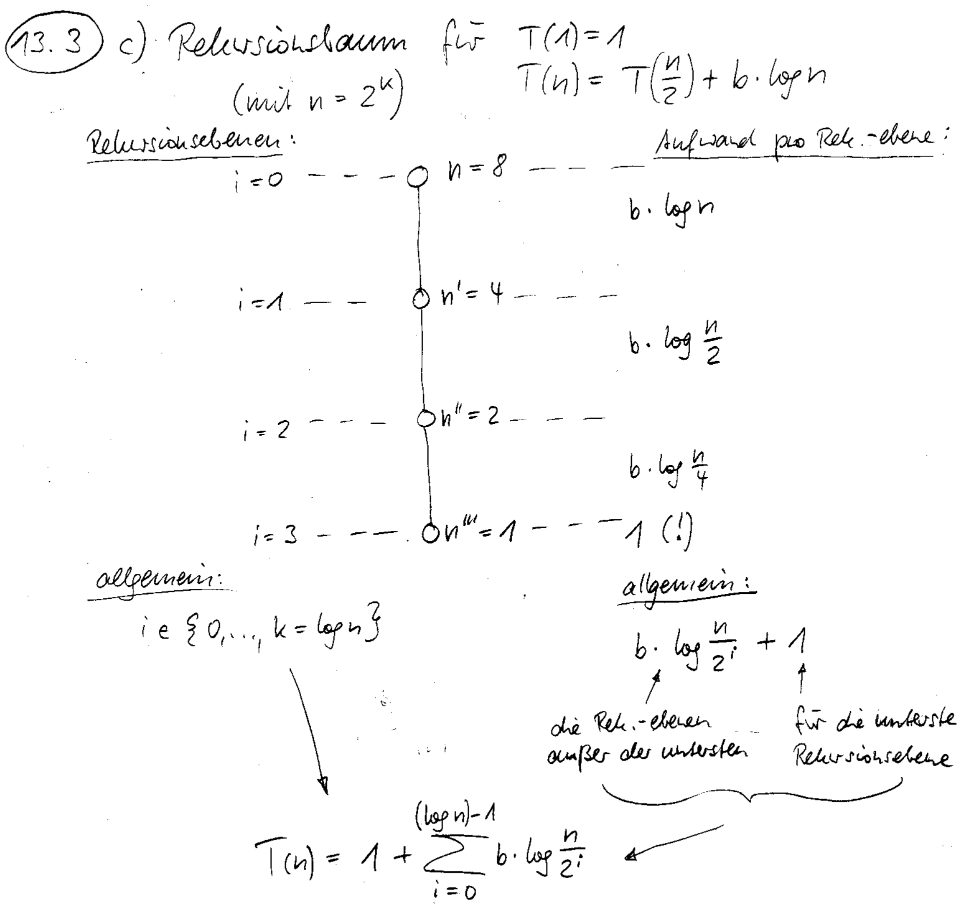
$$= 3 \cdot 3n^{\log_2 3} - 2 \cdot 2n$$

$$\left[3 = 2^{\log_2 3}\right]$$

$$= 3 \cdot 2^{\log_2 3} \cdot n^{\log_2 3} - 2(2n)$$

$$= 3 \cdot (2n)^{\log_2 3} - 2(2n) = T(2n)$$

c) Zunächst stellt man die Rekursion als Baum dar:



Hieraus liest man die Lösung

$$T(n) = 1 + \frac{b}{2}\left(\log_2 n + (\log_2 n)^2\right)$$

ab. Diese kann leicht induktiv bewiesen werden.

Aufgabe 13.4:

Berechnet man die ersten Werte $T(0), T(1), T(2), T(3), T(4) \dots$, so kann man zu der Vermutung $T(n) = \Theta(n)$ gelangen.

Für alle $n \geq 2$ wird nun mittels Induktion gezeigt:
$\frac{n}{2} + 1 \leq T(n) \leq n$
$\Rightarrow T(n) = \Theta(n)$.

Aufgabe 13.5:

a) Das Berechnen von $T(0), T(1), T(2), T(3), T(4) \dots$ führt schnell zu der Vermutung $T(n) = n$. Diese kann mittels Induktion bewiesen werden.

b) Das Ermitteln von $T(0), T(1), T(2), T(3), T(4) \ldots$ läßt vermuten, daß hier ein exponentieller Zusammenhang besteht. Man betrachtet zunächst dier Vermutung, daß $T(n) = x^n$ gilt. Setzt man dies in die Rekursionsformel ein, so erhält man $x^n = 10x^{n-1} - 16x^{n-2}$ bzw. daraus $x^2 - 10x + 16 = 0$. Das Auflösen dieser quadratischen Gleichung liefert die Lösungen $x_1 = 8$ und $x_2 = 2$. Beide Nullstellen müssen in die Lösung der Rekursion einfließen. Die beiden möglichen Potenzen 8^n und 2^n werden nun linear kombiniert: $T(n) = a \cdot 8^n + b \cdot 2^n$. Aus dem Rekursionsanfang $T(0) = 2 = a \cdot 8^0 + b \cdot 2^0$ und $T(1) = 10 = a \cdot b^1 + 8 \cdot 2^1$ gewinnt man nun ein Gleichungssystem, welches die Werte für a und b liefert. Man erhält die Lösung $T(n) = 8^n + 2^n$, welche mittels Induktion leicht bewiesen werden kann.

Aufgabe 13.6:

Die Matrizen A und B lassen sich durch jeweils k $n \times n$-Untermatrizen darstellen. Eine analoge Darstellung findet man auch für die Matrix C. Das Produkt $A \cdot B = C$ wird nun auf k^2 (a) bzw. k (b) Produkte der Untermatrizen zurückgeführt. Da es sich hierbei um quadratische Matrizen handelt, kann der Algorithmus nach Strassen eingesetzt werden. Die Laufzeit in a) ist nun k^2 mal die Laufzeit des Strassen-Algorithmus für das Produkt zweier $n \times n$-Matrizen. In b) erhält man k mal Strassen zuzüglich $O(k \cdot n^2)$ auf Grund der zusätzlich durchzuführenden Additionen.