Technische Universität Chemnitz Wintersemester 2001/02
Professur Theoretische Informatik
Prof. Dr. A. Goerdt, Dipl.-Inf. F. Schädlich

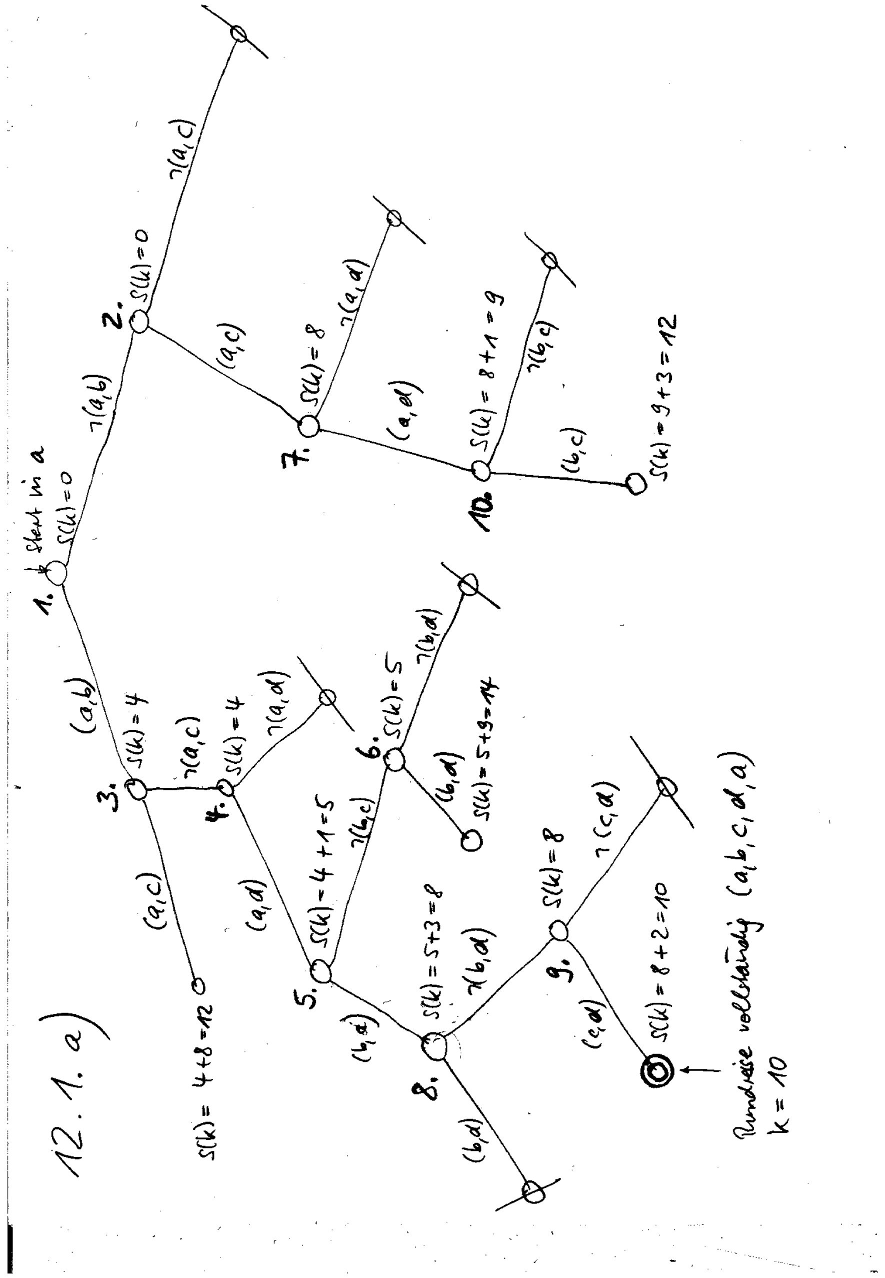
12. Übung „Theoretische Informatik I“
Lösungsvorschläge

Die Musterlösungen bzw. Lösungsvorschläge für die 12. Übung sind noch nicht fertig. Statt dessen gibt es erst einmal ein paar kurze Hinweise.

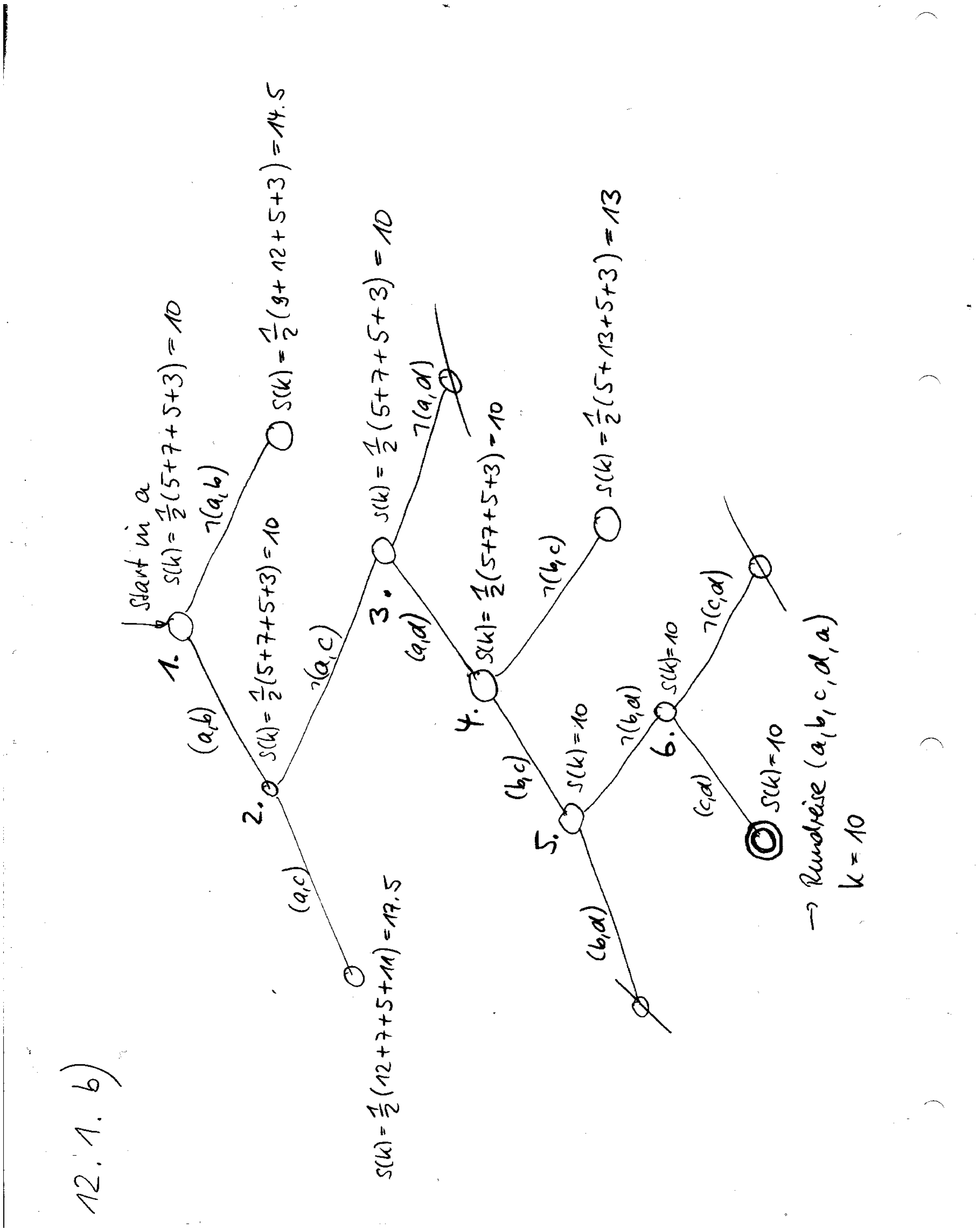
Aufgabe 12.1:

Die minimale Rundreise ist abcda mit den Kosten 10.

a)



b)


12.1. b)
Start in a
1.
S(k) = 1/2(5+7+5+3) = 10
(a,b)
¬(a,b)
S(k) = 1/2(9+12+5+3) = 14.5
2.
S(k) = 1/2(5+7+5+3) = 10
(a,c)
¬(a,c)
S(k) = 1/2(12+7+5+11) = 17.5
3.
S(k) = 1/2(5+7+5+3) = 10
(a,d)
¬(a,d)
4.
S(k) = 1/2(5+7+5+3) = 10
¬(b,c)
S(k) = 1/2(5+13+5+3) = 13
(b,c)
5.
S(k) = 10
(b,d)
¬(b,d)
6.
S(k) = 10
¬(c,d)
(c,d)
S(k) = 10
→ Rundreise (a,b,c,d,a)
k = 10

c)

12. 1c)

zur Berechnung der S(k) → siehe nächstes Blatt

1. $M = \begin{pmatrix} \infty & 4 & 8 & 1 \\ 4 & \infty & 3 & 9 \\ 8 & 3 & \infty & 2 \\ 1 & 9 & 2 & \infty \end{pmatrix}$ $S(k) = 8$

(a,b):

4. $M_1' = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 9 \\ 8 & \infty & \infty & 2 \\ 1 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$ $S(k) = 10$

$\neg(a,b)$:

2. $M_1'' = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 8 & 1 \\ 4 & \infty & 3 & 9 \\ 8 & 3 & \infty & 2 \\ 1 & 9 & 2 & \infty \end{pmatrix}$ $S(k) = 7$ $:= 8$

Schätzung hat sich verschlechtert

→ Wählen das Max. mit der Vorgängermatrix

(b,c):

5. $M_4' = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty \\ 8 & \infty & \infty & 2 \\ 1 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ $S(k) = 10$

$\neg(b,c)$:

$M_4'' = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 9 \\ 8 & \infty & \infty & 2 \\ 1 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$ $S(k) = 16$

(a,c):

$M_2' = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 8 & \infty \\ 4 & \infty & \infty & 9 \\ \infty & 3 & \infty & 2 \\ 1 & 9 & \infty & \infty \end{pmatrix}$ $S(k) = 16$

$\neg(a,c)$:

3. $M_2'' = \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & 1 \\ 4 & \infty & 3 & 9 \\ 8 & 3 & \infty & 2 \\ 1 & 9 & 2 & \infty \end{pmatrix}$ $S(k) = 8$

(c,a):

$M_5' = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty \\ 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ ↯

d isoliert

$\neg(c,a)$:

6. $M_5'' = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 \\ 1 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ $S(k) = 10$

→ Rundreise $r = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\}$

$k = 10$

(a,d):

$M_3' = \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & 1 \\ 4 & \infty & 3 & \infty \\ 8 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 9 & 2 & \infty \end{pmatrix}$ $S(k) = 10$

$\neg(a,d)$:

$M_3'' = \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 3 & 9 \\ 8 & 3 & \infty & 2 \\ 1 & 9 & 2 & \infty \end{pmatrix}$ ↯

a isoliert

Berechnung der unteren Schranken für 12.1.c)

1 $$M = \begin{pmatrix} \infty & 4 & 8 & 1 \\ 4 & \infty & 3 & 9 \\ 8 & 3 & \infty & 2 \\ 1 & 9 & 2 & \infty \end{pmatrix} \qquad M^{(4)} = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 7 & 0 \\ 1 & \infty & 0 & 6 \\ 6 & 1 & \infty & \infty \\ 0 & 8 & 1 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = 3 \\ m_3 = 2 \\ m_4 = 1 \end{array}$$

$$M^{(4,4)} = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 7 & 0 \\ 1 & \infty & 0 & 6 \\ 6 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 7 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

$k_2 = 1$

$$S_k = \sum_i m_i + k_i = 8$$

$$M_1^{\prime(4)} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 6 \\ 6 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 1 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{l} m_1 = 4 \\ m_2 = 3 \\ m_1 = 1 \\ m_4 = 0 \end{array}$$

$\rightarrow S(k) = 10$

$$M_1^{\prime\prime(4)} = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 7 & 0 \\ 1 & \infty & 0 & 6 \\ 6 & 1 & \infty & 0 \\ 0 & 8 & 1 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = 3 \\ m_3 = 2 \\ m_4 = 1 \end{array}$$

$S(k) = 7$

---

2 $$M_2^{\prime(4)} = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty \\ 0 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & 1 & \infty & 0 \\ 0 & 8 & \infty & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{l} m_1 = 8 \\ m_2 = 4 \\ m_3 = 2 \\ m_4 = 1 \end{array}$$

$k_2 = 1 \rightarrow S(k) = 16$

$$M_2^{\prime\prime(4)} = \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & 0 \\ 1 & \infty & 0 & 6 \\ 6 & 1 & \infty & 0 \\ 0 & 8 & 1 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = 3 \\ m_3 = 2 \\ m_4 = 1 \end{array}$$

$k_2 = 1 \rightarrow S(k) = 8$

---

3 $$M_3^{\prime(4)} = \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & 0 \\ 1 & \infty & 0 & \infty \\ 5 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 7 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = 3 \\ m_3 = 3 \\ m_4 = 2 \end{array}$$

$k_1 = 1 \rightarrow S(k) = 10$

---

4 $$M_4^{\prime(4)} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ 6 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{l} m_1 = 4 \\ m_2 = 3 \\ m_3 = 2 \\ m_4 = 1 \end{array}$$

$\rightarrow S(k) = 10$

$$M_4^{\prime\prime(4)} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 \\ 6 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 1 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{l} m_1 = 4 \\ m_2 = 9 \\ m_3 = 2 \\ m_4 = 1 \end{array}$$

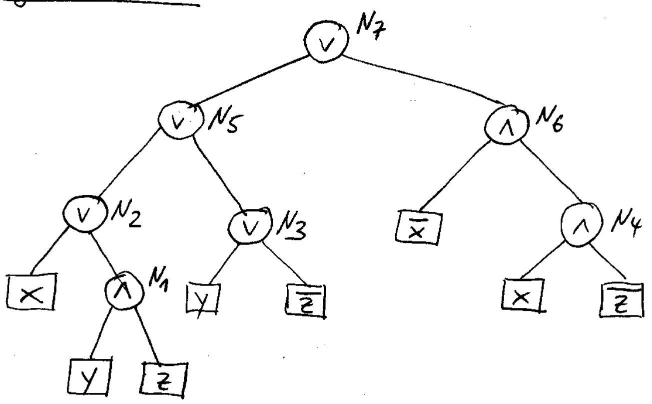
$S(k) = 16$

Aufgabe 12.2:

12.2.

a) F: $(x \vee (y \wedge z)) \vee (y \vee \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge (x \wedge \bar{z}))$

Syntaxbaum:



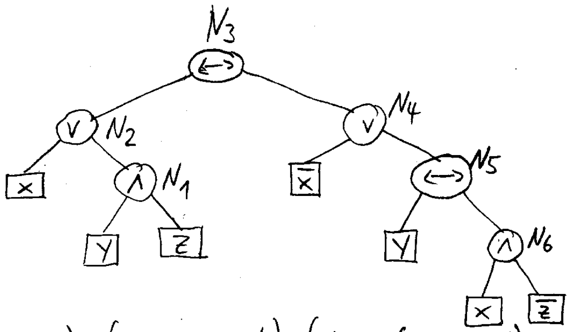
$$F': (N_1 \leftrightarrow y \wedge z) \wedge (N_2 \leftrightarrow N_1 \vee x) \wedge (N_3 \leftrightarrow y \vee \bar{z}) \wedge (N_4 \leftrightarrow x \wedge \bar{z}) \wedge$$
$$(N_5 \leftrightarrow N_2 \vee N_3) \wedge (N_6 \leftrightarrow \bar{x} \wedge N_4) \wedge (N_7 \leftrightarrow N_5 \vee N_6) \wedge N_7$$

$$(N_1 \leftrightarrow y \wedge z) \equiv (\overline{N_1} \vee y \wedge z) \wedge (N_1 \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \equiv (\overline{N_1} \vee y) \wedge (\overline{N_1} \vee z) \wedge (N_1 \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$
$$(N_2 \leftrightarrow N_1 \vee x) \equiv (\overline{N_2} \vee N_1 \vee x) \wedge (N_2 \vee \overline{N_1} \wedge \bar{x}) \equiv (\overline{N_2} \vee N_1 \vee x) \wedge (N_2 \vee \overline{N_1}) \wedge (N_2 \vee \bar{x})$$
$$(N_3 \leftrightarrow y \vee \bar{z}) \equiv (\overline{N_3} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (N_3 \vee \bar{y}) \wedge (N_3 \vee z)$$
$$(N_4 \leftrightarrow x \wedge \bar{z}) \equiv (\overline{N_4} \vee x) \wedge (\overline{N_4} \vee \bar{z}) \wedge (N_4 \vee \bar{x} \vee z)$$
$$(N_5 \leftrightarrow N_2 \vee N_3) \equiv (\overline{N_5} \vee N_2 \vee N_3) \wedge (N_5 \vee \overline{N_2}) \wedge (N_5 \vee \overline{N_3})$$
$$(N_6 \leftrightarrow \bar{x} \wedge N_4) \equiv (\overline{N_6} \vee \bar{x}) \wedge (\overline{N_6} \vee N_4) \wedge (N_6 \vee x \vee \overline{N_4})$$
$$(N_7 \leftrightarrow N_5 \vee N_6) \equiv (\overline{N_7} \vee N_5 \vee N_6) \wedge (N_7 \vee \overline{N_5}) \wedge (N_7 \vee \overline{N_6})$$

a)

12.2. b) $F: (x \vee (y \wedge z)) \leftrightarrow (\bar{x} \vee (y \leftrightarrow (x \wedge \bar{z})))$

Syntaxbaum:



$$F': (N_1 \leftrightarrow y \wedge z) \wedge (N_2 \leftrightarrow x \vee N_1) \wedge (N_3 \leftrightarrow (N_2 \leftrightarrow N_4)) \wedge$$
$$(N_4 \leftrightarrow \bar{x} \vee N_5) \wedge (N_5 \leftrightarrow (y \leftrightarrow N_6)) \wedge (N_6 \leftrightarrow x \wedge \bar{z}) \wedge N_3$$

$$(N_1 \leftrightarrow y \wedge z) \equiv (\bar{N}_1 \vee y) \wedge (\bar{N}_1 \vee z) \wedge (N_1 \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$
$$(N_2 \leftrightarrow x \vee N_1) \equiv (\bar{N}_2 \vee x \vee N_1) \wedge (N_2 \vee \bar{x}) \wedge (N_2 \vee \bar{N}_1)$$
$$(N_3 \leftrightarrow (N_2 \leftrightarrow N_4)) \equiv N_3 \leftrightarrow (\bar{N}_2 \vee N_4) \wedge (\bar{N}_4 \vee N_2)$$
$$\equiv (\bar{N}_3 \vee (\bar{N}_2 \vee N_4)) \wedge (\bar{N}_4 \vee N_2) \wedge (N_3 \vee (N_2 \wedge \bar{N}_4) \vee (N_4 \wedge \bar{N}_2))$$
$$\equiv (\bar{N}_3 \vee \bar{N}_2 \vee N_4) \wedge (\bar{N}_3 \vee \bar{N}_4 \vee N_2) \wedge ((N_3 \vee N_2) \wedge (N_3 \vee \bar{N}_4) \vee N_4 \wedge \bar{N}_2)$$
$$\equiv (\bar{N}_3 \vee \bar{N}_2 \vee N_4) \wedge (\bar{N}_3 \vee \bar{N}_4 \vee N_2) \wedge$$
$$(N_4 \vee (N_3 \vee N_2) \wedge (N_3 \vee \bar{N}_4)) \wedge (\bar{N}_2 \vee (N_3 \vee N_2) \wedge (N_3 \vee \bar{N}_4))$$
$$\equiv (\bar{N}_3 \vee \bar{N}_2 \vee N_4) \wedge (\bar{N}_3 \vee \bar{N}_4 \vee N_2) \wedge (N_4 \vee N_3 \vee N_2) \wedge (\bar{N}_2 \vee N_3 \vee \bar{N}_4)$$
$$(N_4 \leftrightarrow \bar{x} \vee N_5) \equiv (\bar{N}_4 \vee \bar{x} \vee N_5) \wedge (N_4 \vee x) \wedge (N_4 \vee \bar{N}_5)$$
$$(N_5 \leftrightarrow (y \leftrightarrow N_6)) \equiv (\bar{N}_5 \vee \bar{y} \vee N_6) \wedge (\bar{N}_5 \vee \bar{N}_6 \vee y) \wedge (N_6 \vee N_5 \vee y) \wedge (\bar{y} \vee N_5 \vee N_6)$$
$$(N_6 \leftrightarrow x \wedge \bar{z}) \equiv (\bar{N}_6 \vee x) \wedge (\bar{N}_6 \vee \bar{z}) \wedge (N_6 \vee \bar{x} \vee z)$$

b)

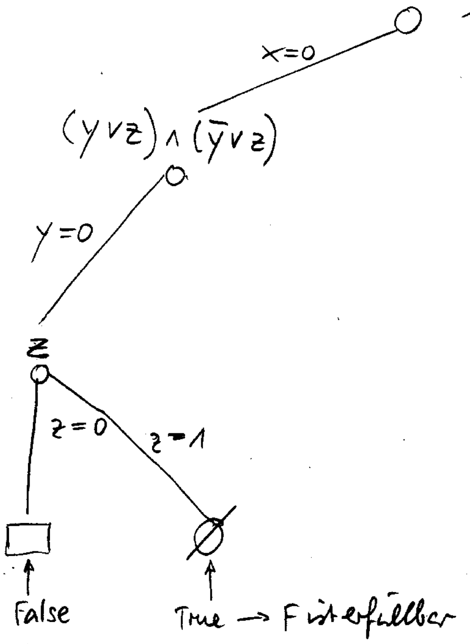
Aufgabe 12.3:

a) Die Formel ist erfüllbar. Die Davis-Putnam-Prozedur sollte $x = 0$, $y = 0$ und $z = 1$ finden, wenn die Variablen in alphabetischer Reihenfolge getestet werden. Der Baum der Davis-Putnam-Prozedur ist ein (nicht vollständiger) binärer Baum mit zwei Blättern. Das untere rechte Blatt sollte die *leere Formel* beinhalten. Auf dem Weg zur Wurzel findet man hier die erste erfüllende Belegung der Variablen. Da die Davis-Putnam-Prozedur nach der ersten erfüllenden Belegung abbricht, wären weitere erfüllende Belegungen denkbar, finden sie alle!

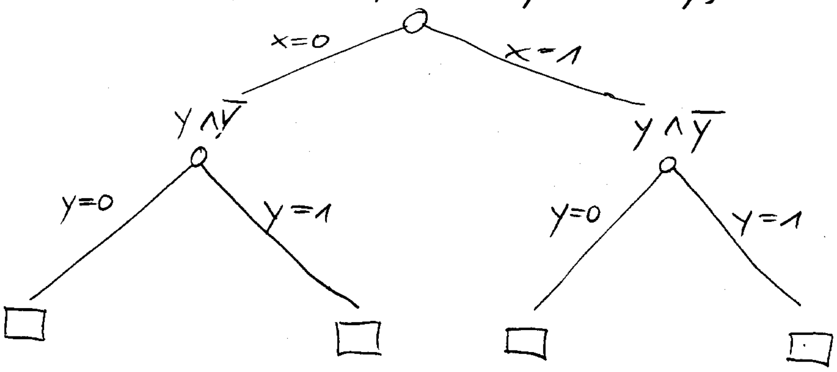
b) Die Formel ist nicht erfüllbar. Der Baum der Davis-Putnam-Prozedur sollte bei dieser Formel ein vollständiger binärer Baum mit vier Knoten sein. An jedem Knoten muß eine *leere Klausel* vermerkt sein.

12.3.

a) F: $(x \lor y \lor z) \land (x \lor \bar{y} \lor z) \land (\bar{x} \lor \bar{y} \lor \bar{z})$



b) F: $(x \lor y) \land (x \lor \bar{y}) \land (\bar{x} \lor y) \land (\bar{x} \lor \bar{y})$



→ F ist nicht erfüllbar