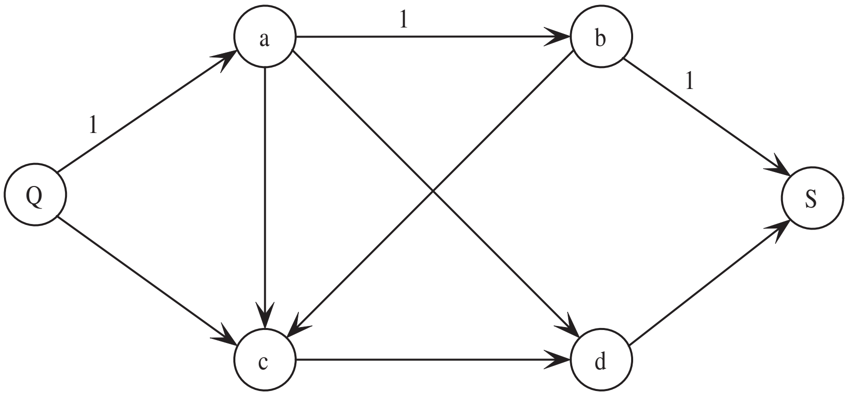
Technische Universität Chemnitz Wintersemester 2001/02
Professur Theoretische Informatik
Prof. Dr. A. Goerdt, Dipl.-Inf. F. Schädlich

9. Übung „Theoretische Informatik I“
Lösungsvorschläge

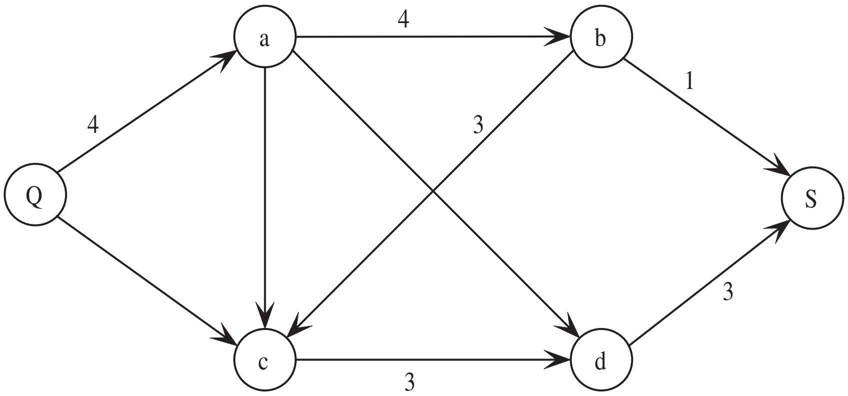
Aufgabe 9.1:

Beschrieben werden die Markierungen, die zu flußvergrößernden Quelle-Senke-Wegen führen und die aktuellen Flüsse im Netzwerk.

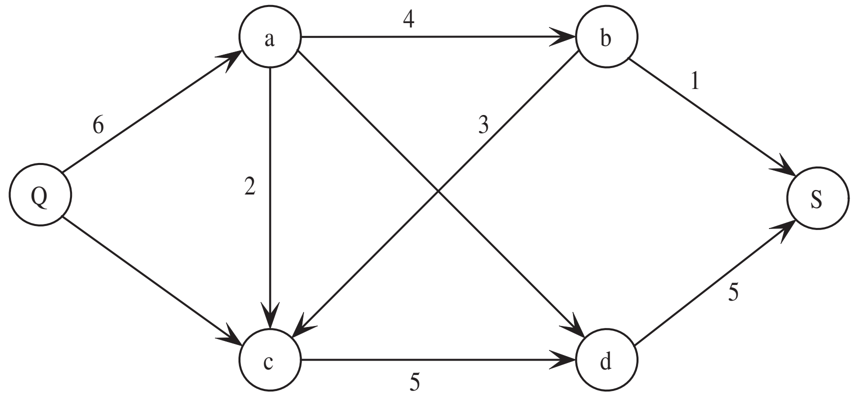
Weg $Q\ a\ b\ S$: Flußerhöhung um 1



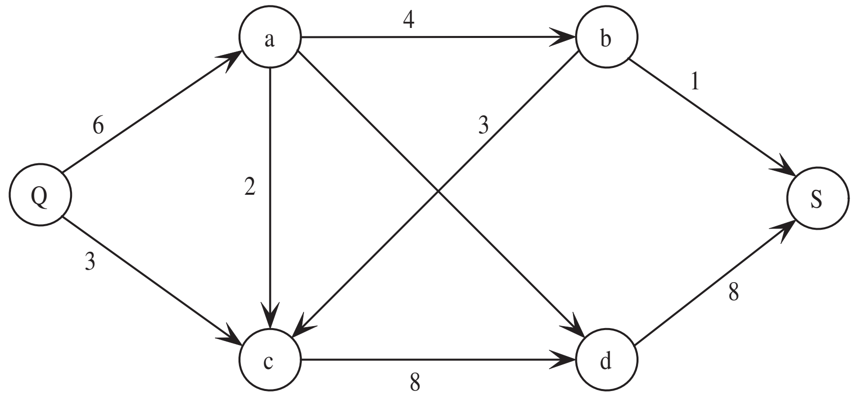
Weg $Q\ a\ b\ c\ d\ S$: Flußerhöhung um 3



Weg $Q\ a\ c\ d\ S$: Flußerhöhung um 2



Weg $Q\ c\ d\ S$: Flußerhöhung um 3



Markierungsversuch: $Q\ a\ d\ c\ b\ a$
Senke kann nicht markiert werden, also ist der Fluß ϕ maximal mit Wert $w(\phi) = 9$.

Aufgabe 9.2:

$G = (V, E, c)$ ist ein Netzwerk mit dem zulässigen Fluß f, der Quelle Q sowie der Senke S. D. h. es gelten folgende drei Bedingungen:

$$\begin{aligned} f(u,v) &\leq c(u,v) && (1)\\ f(u,v) &= -f(v,u) && (2)\\ \forall u \in V\backslash\{Q,S\}: \quad \sum_{v\in V} f(u,v) &= 0\ . && (3) \end{aligned}$$

Die zugeordnete Restkapazität $c_f\colon V \times V \to \mathbb{N}$ beträgt $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$. Hierdurch ist der zugeordnete (gerichtete und gewichtete) Restgraph $G_f = (V, E_f, c_f)$ durch $E_f = \{(u,v) \mid c_f(u,v) > 0\}$ bestimmt. (Dieser Restgraph muß nicht unbedingt ein korrektes Netzwerk sein, da Kanten in die Quelle Q hinein bzw. Kanten aus der Senke S heraus führen können. Trotzdem kann es in diesem Graphen einen zulässigen Fluß geben.)

Ist $g\colon V \times V \to \mathbb{Z}$ ein zulässiger Fluß in G_f, so gelten:

$$\begin{aligned} g(u,v) &\leq c_f(u,v) && (4)\\ g(u,v) &= -g(v,u) && (5)\\ \forall u \in V\backslash\{Q,S\}: \quad \sum_{v\in V} g(u,v) &= 0\ . && (6) \end{aligned}$$

Der Fluß $h = f + g$ mit $h(u,v) = (f+g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v)$ in G ist genau dann ein zulässiger Fluß, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

$$h(u,v) \leq c(u,v) \tag{7}$$
$$h(u,v) = -h(v,u) \tag{8}$$
$$\forall u \in V \backslash \{Q,S\} : \quad \sum_{v \in V} h(u,v) = 0 \ . \tag{9}$$

Dies wird nun im einzelnen nachgewiesen:

Aus der Bedingung 4 folgt:

$$\begin{aligned} g(u,v) &\leq c_f(u,v) \\ \Rightarrow g(u,v) &\leq c(u,v) - f(u,v) \\ \Rightarrow g(u,v) + f(u,v) &\leq c(u,v) \\ \Rightarrow h(u,v) &\leq c(u,v) \ . \end{aligned}$$

Aus den Bedingungen 2 und 5 erhält man sofort:

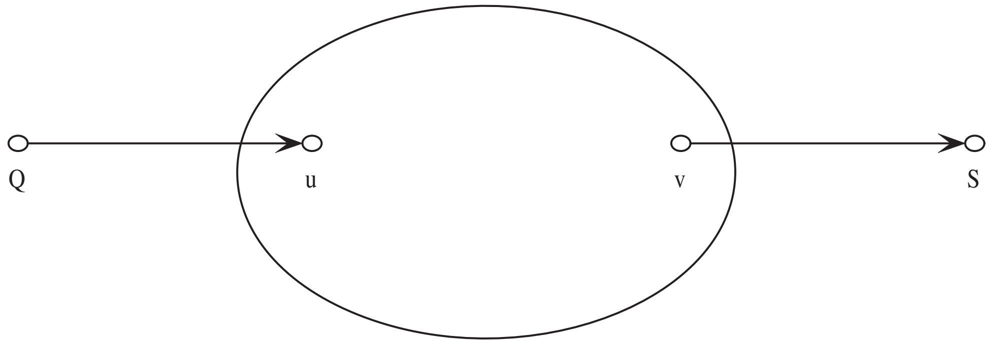
$$\begin{aligned} f(u,v) + g(u,v) &= -f(v,u) - g(v,u) \\ \Rightarrow h(u,v) &= -h(v,u) \ . \end{aligned}$$

Addiert man die Summen aus den Bedingungen 3 und 6, so gilt für alle $u \in V \backslash \{Q,S\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} f(u,v) + \sum_{v \in V} g(u,v) = 0 \\ \Rightarrow \sum_{v \in V} (f(u,v) + g(u,v)) = 0 \\ \Rightarrow \sum_{v \in V} h(u,v) = 0 \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 9.3:

Baue Netzwerk für den Graphen $G = (V,E)$ wie folgt:



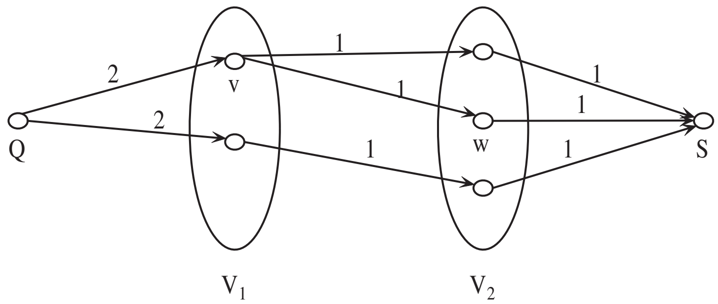
mit $c(e) = 1 \ \forall e \in E, \ c((Q,u)) = \infty$ und $c((v,S)) = \infty$. Offenbar gilt wegen $c(e) = 1 \ \forall e \in E$:

Behauptung: Ein ganzzahliger maximaler Fluß ϕ_{max} in dem Netzwerk korrespondiert zur maximalen Anzahl A kantendisjunkter Wege in G.

Offenbar gilt $A \leq w(\phi)$ für jeden Fluß, da jeder einzelne von mehreren kantendisjunkten Wegen einen Fluß vom Wert 1 liefert. Andererseits liefert ein ganzzahliger Fluß sofort eine Kollektion kantendisjunkter Wege in G.

Aufgabe 9.4:

Baue aus dem bipartiten Graphen folgendes Netzwerk:



Die Beschränkung $c(w, S) = 1\ \forall w \in V_2$ garantiert, daß zwei Personen nicht die gleiche Tätigkeit zugewiesen wird.

Die Beschränkung $c(Q, v) = 2\ \forall v \in V_1$ garantiert, daß einer Person maximal zwei Tätigkeiten zugeordnet werden. Bei der Zuordnung von maximal zwei Tätigkeiten können also Flußalgorithmen verwendet werden.

Wenn jeder Person entweder keine oder zwei Tätigkeiten zugewiesen werden, so helfen Flußalgorithmen nicht. Man kann zwar durch untere Schranken eine Mindestauslastung der Kanten erzwingen, die Größe des Flusses variiert aber auf einer Kante in einem Intervall.