

Theoretische Informatik II

11. Übung

1. Aufgabe: Zeigen Sie, dass das folgende *Subset-Multisum-Problem* \mathcal{NP} -vollständig ist:

- Gegeben:
 - n positive Zahlen $\{a_1, \dots, a_n\}$ und
 - eine positive ganze Zahl b .
- Frage: Kann b als Summe von den a_i dargestellt werden, wenn die a_i beliebig oft verwendet werden dürfen?

Hinweis: Die Reduktion für das *Subset-Sum-Problem* kann für das *Subset-Multisum-Problem* angepasst werden. Es müssen dafür sichergestellt werden, dass die Korrekturterme nicht mehrfach verwendet werden. Außerdem sind Überträge ein Problem. Eine Lösung für die Überträge ist es, Spiegelsymmetrische Zahlen zu verwenden.

2. Aufgabe: Zeigen Sie, dass das folgende Problem kürzester Wege \mathcal{NP} -vollständig ist:

- Gegeben:
 - Ein Graph $G(V, E)$ in dem jede Kante e_i mit einem Paar (x_i, y_i) nicht-negativer ganzer Zahlen beschriftet sind,
 - ein Startknoten s ,
 - ein Zielknoten t und
 - eine positive ganze Zahl k .
- Frage: Gibt es einen Pfad $(e_{i_1}, \dots, e_{i_j})$ von s nach t , sodass sowohl $\left(\sum_{l=1}^j x_{i_l}\right) \leq k$ als auch $\left(\sum_{l=1}^j y_{i_l}\right) \leq k$ gelten? Es sollen also für einen „optimalen“ Pfad sowohl die erste als auch die zweite Komponente hinreichend klein sein.

Hinweis: Es ist sinnvoll, das Problem auf das *Subset-Sum-Problem* zu reduzieren. Wenn ein a_i verwendet wird, soll eine Kante $(a_i, 0)$ im Pfad verwendet werden, ansonsten soll eine Kante $(0, a_i)$ verwendet werden. Es ist außerdem hilfreich $(0, 0)$ Kanten zu verwenden.

3. Aufgabe: Zeigen Sie, dass das Problem kürzester einfacher Wege in gewichteten Graphen \mathcal{NP} -vollständig ist, wenn negative Kantengewichte erlaubt sind.

Zeigen Sie außerdem, dass es ein Polynom gibt, sodass das Problem mit dynamischen Programmieren in $\mathcal{O}(p(n)2^n)$ gelöst werden kann.

4. Aufgabe: Zeigen Sie, dass 4-Färbbarkeit \mathcal{NP} -vollständig ist.