Prof. Andreas Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Sommersemester 2021

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Algorithmen
5. Übung

1. Aufgabe

Seien n_1 und n_2 teilerfremde ganze Zahlen. Wir betrachten die Abbildung des chinesischen Restsatzes:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}^*_{n_1 n_2} &\quad\to\quad \mathbb{Z}^*_{n_1} \times \mathbb{Z}^*_{n_2} \\ x &\quad\mapsto\quad (x \mod n_1, x \mod n_2) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle x, y die Gleichungen

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

und

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

gelten.

Die Addition und Multiplikation sind in $\mathbb{Z}^*_{n_1} \times \mathbb{Z}^*_{n_2}$ jeweils komponentenweise zu verstehen.

2. Aufgabe

Seien a, n_1 und n_2 ganze Zahlen mit $\mathrm{ggT}(a, n_1 n_2) = 1$.

Zeigen Sie $\mathrm{ggT}(a \mod n_1, n_1) = 1 = \mathrm{ggT}(a \mod n_2, n_2)$.

3. Aufgabe

Finden Sie die Lösungen zu den folgenden beiden chinesischen Restsatzproblemen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 & (3) \\ x &\equiv 6 & (7) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x &\equiv 4 & (8) \\ x &\equiv 7 & (13) \end{aligned}$$

4. Aufgabe

Sei $\mathrm{EW}(n)$ die Anzahl der Einheitswurzeln modulo n.

(a) Seien n_1 und n_2 teilerfremde Zahlen. Zeigen Sie

$$\mathrm{EW}(n_1 n_2) = \mathrm{EW}(n_1) \cdot \mathrm{EW}(n_2).$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des chinesischen Restsatzes alle Einheitswurzeln von $6, 12, 15$ und 35.

(c) Sei p eine beliebige Primzahl und k eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie alle Einheitswurzeln von p^k. Zeigen Sie dafür zuerst, dass die Einheitswurzeln von p^k die Form $np \pm 1$ haben müssen.

(d) Bestimmen Sie $EW(n)$ für $n = 2^i p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k}$.