Prof. Andreas Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Sommersemester 2021

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Algorithmen
3. Übung

1. **Aufgabe** Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

   Zeigen Sie die Linearität des Erwartungswertes:

$$E[aX + Y] = aE[X] + E[Y]$$

2. **Aufgabe** n Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sind unabhängig, wenn für alle Kombinationen $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ von n reellen Zahlen gilt:

$$\begin{aligned} &Pr[X_1 = r_1 \wedge X_2 = r_2 \wedge \cdots \wedge X_n = r_n] \\ &\quad = Pr[X_1 = r_1] \cdot Pr[X_2 = r_2] \cdot \ldots \cdot Pr[X_n = r_n] \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass es n Zufallsvariablen gibt, die nicht unabhängig sind, sodass jeweils $n-1$ der Zufallsvariablen unabhängig sind.

   Hinweis: Sie können für X_1 bis X_{n-1} unabhängige Münzwürfe verwenden.

3. **Aufgabe**

   Es sei $c > 0$ eine Konstante. Betrachten Sie zufällige Graphen G mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p = p(c, n)$. Ein Dreieck ist ein vollständiger Teilgraph, welcher genau drei Knoten enthält.

   (a) Berechnen Sie die erwartete Anzahl an Dreiecken in G für $p = c/n$.

   (b) Zeigen Sie mittels der Markoff-Ungleichung, dass G mit hoher Wahrscheinlichkeit kein Dreieck enthält, wenn $p = o(1/n)$, z. B. $p = 1/(n \log n)$, gilt.

   (c) Zeigen Sie, daß G mit hoher Wahrscheinlicheit ein Dreieck enthält, wenn $p = \omega(1/n)$, z. B. $p = (1 \log n)/n$, gilt. Nutzen Sie hierzu die Tschebyscheff-Ungleichung.

4. **Aufgabe**

   Wir betrachten Zufallsgraphen mit Kantenwahrscheinlichkeit $p = 0.5$. Zeigen Sie mit Hilfe der Markoff-Ungleichung, dass es mit hoher Wahrscheinlichkeit keine unabhängige Menge der Größe $2\log(n)$ gibt.

5. **Aufgabe**

   Beweisen sie die unteren Chernoff-Schranken:

$$\text{Prob}[X \leq (1 - \delta E[X])] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}} \right)^{E[X]} \leq e^{-\frac{\delta^2}{2} E[X]}$$

   für die Zufallsvariable $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ mit $\text{Prob}[X_1 = 1] = p$ und $\text{Prob}[X_1 = 0] = 1 - p$.