Prof. Andreas Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Sommersemester 2021

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Algorithmen
2. Übung

1. **Aufgabe**

   Zeigen Sie die Ungleichung

   $$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{3n}{k}\right)^k$$

   ohne die eulersche Zahl zu verwenden.

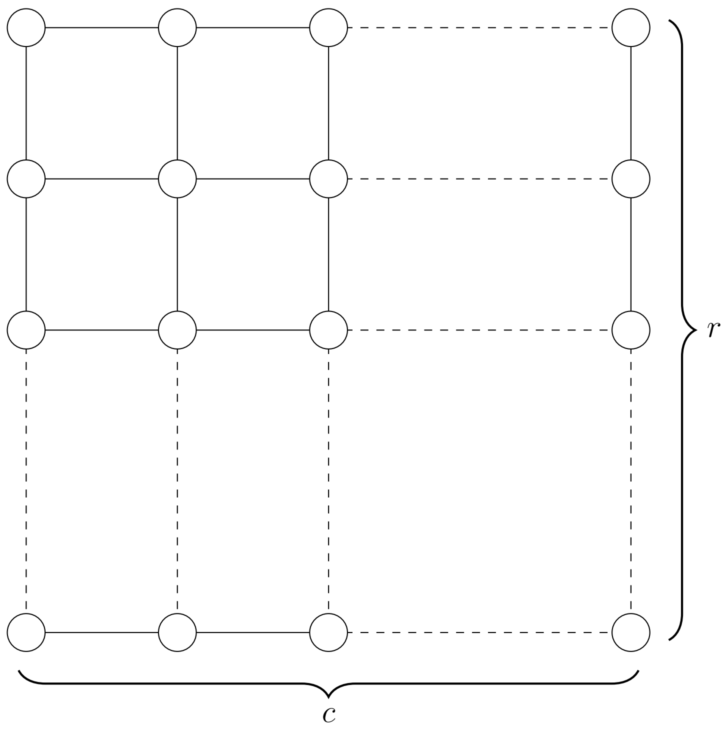
   Hinweis: Zeigen Sie zuerst mit der Gleichung

   $$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^0b^{n-0} + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}a^nb^{n-n}$$

   dass die Ungleichungen $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$ und $1+\frac{k}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^k$ gelten.

2. **Aufgabe**

   Wir betrachten den Rechtecksgittergraphen mit $r \cdot c$ Knoten:



   Dieser Graph besteht aus $r \cdot c$ Knoten, die in einem Rechteckgitter liegen. Die Kanten verbinden jeweils die horizontal und vertikal benachbarten Knoten.

   Wir wollen mit Backtracking die unabhängige Menge maximaler Größe bestimmen.

   Zeigen Sie, dass der Backtrackingbaum mindestens $2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ Knoten enthält.

3. **Aufgabe**

   In der Vorlesung haben wir den Quotienten $\frac{t_k}{t_{k-1}} = \frac{n+k-1}{k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}}$ betrachtet.

   (a) Gibt es Werte n, k sodass $\frac{t_k}{t_{k-1}} = 1$ gilt?

   (b) k_0 ist die größte ganze Zahl k, sodass $\frac{t_k}{t_{k-1}} \geq 1$ gilt. Geben Sie alle n an, sodass $k_0 \leq \log_2 n$ gilt.

4. **Aufgabe**

   Zeigen Sie mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ gilt, und dass für festes n die Werte $\binom{n}{k}$ in Richtung zur Mitte (also zu $k = n/2$) streng monoton steigen.