Prof. Dr. A. Goerdt
Dr. L. Falke

TU Chemnitz
Sommersemester 2017
06.04.2017

Effiziente Algorithmen / Theoretische Informatik III

1. Übung

1. Aufgabe: Wir Betrachten *Dijkstras Algorithmus* für *kürzeste Wege* in gerichteten Graphen mit *nichtnegativen* Kantengewichten.

(a) Wiederholen Sie die Funktionsweise des Algorithmus!

(b) Welche Laufzeiten ergeben sich mit verschiedenen Datenstrukturen (*Array*, *Heap*) zur Verwaltung der Menge Q?

(c) Überlegen Sie sich, warum der *Dijkstra-Algorithmus*, unabhängig von der verwendeten Datenstruktur, im Allgemeinen keine Laufzeit besser als $O(|V| \cdot \log |V|)$ erreichen kann.

2. Aufgabe: Wir verwenden in *Dijkstras Algorithmus* einen *Heap*.

(a) Welche Operationen muß der Heap zur Verfügung stellen?

(b) Implementieren Sie diese Operationen in Pseudocode und analysieren Sie die Laufzeit.

(c) Geben Sie an, wie aus n Elementen in Zeit $O(n)$ ein Heap aufgebaut werden kann.

(d) Kann die Operation `DeleteMin` so implementiert werden, dass die k-malige Ausführung von `DeleteMin` insgesamt die Zeit $O(k)$ braucht?

(e) Welche Operationen werden vom Heap *nicht* zufriedenstellend unterstützt?

3. Aufgabe: Beweisen Sie die folgenden Sätze.

(a) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n, k \geq 1$ ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

(b) Für alle $n \geq 0$ ist

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

(c) Für alle $k, l, n \in \mathbb{N}$, $k \leq l + n$ gilt

$$\binom{l+n}{k} = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \cdot \binom{n}{k-i}.$$

Dabei gilt $\binom{a}{b} = 0$ falls $a < b$ ist.

Hinweis: Arbeiten Sie mit der „kombinatorischen Interpretation“ der Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned}\binom{l+n}{k} &= \#\ k\text{-elementige Teilmengen einer } (l+n)\text{-elementigen Menge} \\ &= \#\ k\text{-elementige Teilmengen einer Menge,} \\ &\quad\ \text{die aus } l \text{ „roten“ und } n \text{ „schwarzen“ Elementen besteht.}\end{aligned}$$