Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU Chemnitz
Sommersemester 2013
19.06.2013

# Effiziente Algorithmen / Theoretische Informatik III

## 6. Übung

**1. Aufgabe:** Zeigen Sie, dass für $0 < l < 2n$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{n} \cdot l \cdot k\right) = \frac{1-(-1)^l}{2}$$

*Hinweis:* Benutzen Sie $\cos\phi = (\mathrm{e}^{i\cdot\phi} + \mathrm{e}^{-i\cdot\phi})/2$ und die Formel für die geometrische Reihe.

**2. Aufgabe:** Betrachten Sie die folgende Matrix $C = (c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ für die diskrete Cosinus-Transformation.

$$\begin{pmatrix}
\sqrt{\frac{1}{n}} & \sqrt{\frac{1}{n}} & \cdots & \sqrt{\frac{1}{n}} \\
\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 1 \cdot 1\right) & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 1 \cdot 3\right) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 1 \cdot (2n-1)\right) \\
\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 2 \cdot 1\right) & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 2 \cdot 3\right) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 2 \cdot (2n-1)\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot (n-1) \cdot 1\right) & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot (n-1) \cdot 3\right) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot (n-1) \cdot (2n-1)\right)
\end{pmatrix}$$

Für $i = 2, \ldots, n$ ist also $c_{ij} = \sqrt{2/n} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot (i-1) \cdot (2j-1)\right)$.

Zeigen Sie, dass $C$ orthogonal ist, d.h. alle Spalten haben die euklidische Norm 1 und je zwei verschiedene Spalten stehen senkrecht aufeinander.

*Hinweis:* Benutzen Sie $\cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 = (\cos(\phi_1+\phi_2) + \cos(\phi_1-\phi_2))/2$.

**3. Aufgabe:** Entwickeln Sie auf Basis der FFT, sowie der Beziehung $\cos\phi = (\mathrm{e}^{i\cdot\phi}+\mathrm{e}^{-i\cdot\phi})/2$ einen Algorithmus, der das Produkt $C \cdot a$ in Zeit $O(n \cdot \log n)$ berechnet.