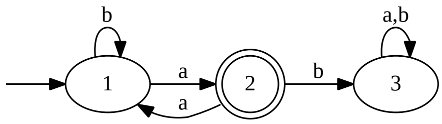
Theoretische Informatik II – 3. Übung

4. Aufgabe

Demonstrieren Sie die Konstruktion von regulären Ausdrücken zu gegebenen DFAs anhand des folgenden DFAs.



Gegeben ist ein *deterministischer endlicher Automat (DEA)* M mit der Zustandsmenge $Z = \{z_1, \dots z_n\}$. Den Startzustand bezeichnen wir mit z_1.

Gesucht ist ein *regulärer Ausdruck*, der die von M akzeptierte Sprache beschreibt. Oder anders ausgedrückt – die Menge aller Worte, die bei der Verarbeitung durch den Automaten zu einem der Endzustände führen.

Wie kommt man jetzt zu diesen regulären Ausdrücken? Betrachten wir zunächst zwei Zustände z_i und z_j des Automaten. Eine Möglichkeit, um von z_i zu z_j zu kommen, ist auf dem direkten Weg (wenn es ein $a \in \Sigma$ gibt mit $\delta(z_i, a) = z_j$). Der reg. Ausdruck dafür ist leicht zu finden. Es kann aber auch noch weitere Möglichkeiten über diverse Zwischenzustände geben. Für alle diese Möglichkeiten müssen die reg. Ausdrücke geeignet zusammengesetzt werden.

Die Idee ist nun, die Menge der erlaubten Zwischenzustände systematisch zu vergrößern. Wir benutzen die folgende Notation.

$R^k_{i,j}$ bezeichnet die Menge von Worten $x \in \Sigma^*$ bzw. den regulären Ausdruck für den gilt:

> Der Automat befindet sich im Zustand z_i und gelangt durch das Lesen von x in den Zustand z_j. Dabei werden außer den Zuständen z_i und z_j *keine* Zustände mit einer Nummer $> k$ betreten.

Für $k = 0$, also ohne Zwischenzustände gilt:

- Für $i \neq j$: $R^0_{i,j} = \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\}$ oder als regulärer Ausdruck geschrieben: $R^0_{i,j} = (a_1|a_2|\dots)$ mit $\delta(z_i, a_l) = z_j$.

  Beachte: Wenn es keinen direkten Übergang von z_i nach z_j gibt, kann $R^0_{i,j}$ auch die leere Menge sein. Wir schreiben dann $R^0_{i,j} = \emptyset$.

- Für $i = j$: In diesem Fall kommt noch das leere Wort dazu, da sich der Automat bereits im richtigen Zustand befindet.

  Wir erhalten $R^0_{i,j} = \{\varepsilon\} \cup \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\}$ bzw. $R^0_{i,j} = (\varepsilon|a_1|a_2|\dots)$ mit $\delta(z_i, a_l) = z_j$.

Das ganze läßt sich jetzt für weitere Zwischenzustände fortsetzen. Wenn wir den Ausdruck für eine bestimmte Menge an Zwischenzuständen bereits gefunden haben (k Stück, z.B. $k = 0$) geschieht für den nächsten ($k + 1$ Stück, z.B. $k + 1 = 1$) folgendes.

Wir nehmen alles, was wir bisher gefunden haben. Das ist $R^k_{i,j}$ und *dazu* kommen die Möglichkeiten, den Zustand z_{k+1} zu nutzen. Dazu müssen wir zuerst zum Zustand z_{k+1} hinkommen, ohne ihn zu betreten. Das haben wir bereits in $R^k_{i,k+1}$ berechnet. Dann können wir entweder direkt weiter zu z_j gehen, ohne z_{k+1} nochmal zu betreten (das entspricht $R^k_{k+1,j}$). Oder wir gehen vorher noch zu anderen Zuständen und kehren aber zu z_{k+1} zurück.

Das ergibt dann den folgenden regulären Ausdruck:

$$R^{k+1}_{i,j} = R^k_{i,j} | R^k_{i,k+1} (R^k_{k+1,k+1})^* R^k_{k+1,j}$$

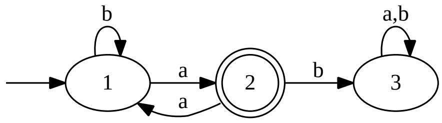
Dazu noch die folgenden Anmerkungen:

- Sollte $R^k_{i,j} = \emptyset$ sein, dann fällt der Teil vor dem | weg. Es gibt nach Definition dann keine Möglichkeit, von z_i nach z_j nur über $\{z_1, \ldots, z_k\}$ zu kommen.
- Sollte $R^k_{i,k+1}$ oder $R^k_{k+1,j} = \emptyset$ sein, dann fällt der hintere Teil weg. Zu diesem Zeitpunkt kann z_{k+1} noch nicht betreten bzw. geeignet verlassen werden.

Der zum Automaten gehörende reguläre Ausdruck ergibt sich dann wie folgt. Wir verbinden alle Ausdrücke, die vom Startzustand in einen der Endzustände führen, wobei alle Zustände als Zwischenzustände erlaubt sind.

$$R = R^n_{1,e_1} | R^n_{1,e_2} | \ldots \quad \text{mit } e_i \in E$$

Im Automat der Aufgabe gibt es nur einen Endzustand. Wir suchen daher nur einen Ausdruck für $R^3_{1,2}$.



$$
\begin{aligned}
R^0_{1,1} &= \varepsilon|b \\
R^0_{1,2} &= a \\
R^0_{1,3} &= \emptyset \\
R^0_{2,1} &= a \\
R^0_{2,2} &= \varepsilon \\
R^0_{2,3} &= b \\
R^0_{3,1} &= \emptyset \\
R^0_{3,2} &= \emptyset \\
R^0_{3,3} &= \varepsilon|a|b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^1_{1,2} &= R^0_{1,2}|R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^*R^0_{1,2} &&= a|\Big((\varepsilon|b)(\varepsilon|b)^*a\Big) = b^*a \\
R^1_{2,2} &= R^0_{2,2}|R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^*R^0_{1,2} &&= \varepsilon|\Big(a(\varepsilon|b)^*a\Big) = \varepsilon|(ab^*a) \\
R^1_{1,3} &= R^0_{1,3}|R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^*R^0_{1,3} &&= \emptyset \\
R^1_{2,3} &= R^0_{2,3}|R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^*R^0_{1,3} &&= b \\
R^1_{3,3} &= R^0_{3,3}|R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^*R^0_{1,3} &&= \varepsilon|a|b \\
R^1_{3,2} &= R^0_{3,2}|R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^*R^0_{1,2} &&= \emptyset
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{1,2} &= R^1_{1,2}|R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^*R^1_{2,2} &&= (b^*a)|\Big((b^*a)(\varepsilon|(ab^*a))^*(\varepsilon|(ab^*a))\Big) = (b^*a)(ab^*a)^* \\
R^2_{1,3} &= R^1_{1,3}|R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^*R^1_{2,3} &&= (b^*a)((ab^*a)^*)b \\
R^2_{3,3} &= R^1_{3,3}|R^1_{3,2}(R^1_{2,2})^*R^1_{2,3} &&= \varepsilon|a|b \\
R^2_{3,2} &= R^1_{3,2}|R^1_{3,2}(R^1_{2,2})^*R^1_{2,2} &&= \emptyset
\end{aligned}
$$

$$
R^3_{1,2} = R^2_{1,2}|R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^*R^2_{3,2} = \underline{\underline{(b^*a)(ab^*a)^*}}
$$