

## Theoretische Informatik III

### 7. Übung

1. Aufgabe:

Formulieren Sie den Algorithmus der Vorlesung für die schnelle DFT.

2. Aufgabe:

Betrachten Sie das zufällige Experiment des  $n$ -maligen Münzwurfes. Bei der Münze tritt „Kopf“ mit Wahrscheinlichkeit  $p$  und „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  auf. Definieren Sie eine Zufallsvariable  $X$ , welche die Anzahl der geworfenen „Köpfe“ des Experimentes zählt. Bestimmen Sie den Erwartungswert  $\mathbf{E}[X]$  einmal mit Hilfe von geeigneten Indikator-Zufallsvariablen.

3. Aufgabe:

Es sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  eine Zufallsvariable. Beweisen Sie die Markov-Ungleichung: Für  $a > 0$  ist

$$\Pr[X \geq a] \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Definition des Erwartungswertes.

4. Aufgabe:

Es sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable. Beweisen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung

$$\Pr[|X - \mathbf{E}[X]| \geq a] \leq \frac{\mathbf{V}[X]}{a^2},$$

wobei  $\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}^2[X]$  die Varianz von  $X$  ist.

5. Aufgabe:

Betrachten Sie das zufällige Experiment des  $n$ -maligen Münzwurfes mit einer fairen Münze. Sei  $X$  die Zufallsvariable, die die Anzahl der geworfenen „Köpfe“ zählt. Zeigen Sie  $\Pr[|X - \mathbf{E}[X]| \geq n^{3/4}] \rightarrow 0$ . Beachten Sie, daß für unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt

$$\mathbf{V}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}[X_i].$$