

Theorie der Programmiersprachen

4. Übung

1. Aufgabe:

Man zeige, dass folgendes Korrespondenzproblem eine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{cccc} x_1 = 001 & x_2 = 01 & x_3 = 01 & x_4 = 10 \\ y_1 = 0 & y_2 = 011 & y_3 = 101 & y_4 = 001 \end{array}$$

(Achtung: die kürzeste Lösung besteht aus 66 Indizes. Ohne Computereinsatz kann man dieses Problem jedoch auch „von Hand“ lösen, wenn man die Lösung rückwärts aufbaut
Hinweis: offensichtlich ist der letzte Index $i_{66} = 3$, da nur x_3 und y_3 eine gemeinsame abschließende Bitfolge (01) haben.)

2. Aufgabe:

Man zeige, dass das *Postsche Korrespondenz-Problem* über dem einelementigen Alphabet entscheidbar ist.

3. Aufgabe:

Man zeige, dass das Gültigkeitsproblem (und damit auch das Erfüllbarkeitsproblem) der Prädikatenlogik bereits für Formeln ohne Funktionssymbole unentscheidbar ist.

4. Aufgabe:

Man zeige, dass die folgende Variante des Postschen Korrespondenzproblem es entscheidbar ist.

gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$,
wobei $x_i, y_i \in \{0, 1\}^+$.

gefragt: Gibt es Folgen von Indizes $i_1, i_2, \dots, i_n, n \geq 1$,
und $j_1, j_2, \dots, j_m, m \geq 1$ mit $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n} = y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_m}$?

5. Aufgabe:

In der *monadischen* Prädikatenlogik dürfen die Formeln keine Funktionssymbole enthalten und alle Prädikate müssen einstellig (monadisch) sein.

Man zeige: Falls eine Aussage F der monadischen Prädikatenlogik mit den einstelligen Prädikatensymbolen P_1, \dots, P_n erfüllbar ist, dann gibt es bereits ein Modell für F der

Mächtigkeit 2^n . Hieraus folgere man, dass Erfüllbarkeits- (und Gültigkeits-) problem für Formeln der monadischen Prädikatenlogik entscheidbar ist!

Hinweis: Man zeige, dass der Grundbereich eines jeden Modells \mathcal{A} für F in 2^n Äquivalenzklassen unterteilt werden kann. Die Äquivalenz zweier Elemente $u, v \in U_{\mathcal{A}}$ ergibt sich aus ihrem gleichartigen Verhalten bzgl. $P_1^{\mathcal{A}}, \dots, P_n^{\mathcal{A}}$. Sodann kann man ein neues Modell \mathcal{B} für F definieren, wobei die Elemente von $U_{\mathcal{B}}$ gerade diese Äquivalenzklassen sind.

6. Aufgabe:

Man zeige, dass das folgendes Problem unentscheidbar ist.

gegeben: Die Beschreibung eines Algorithmus' A .

gefragt: Stoppt A nach endlicher Zeit, wenn A auf seiner eigenen Beschreibung als Eingabe gestartet wird?