Prof. Andreas Goerdt
A. Lanka

TU Chemnitz
Sommersemester 2004
01.07.2004

Theoretische Informatik III

7. Übung

1. Aufgabe

   a) Es sei $\mathcal{W} = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (gemäß Definition der Vorlesung). Seien $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen und $(X_1 + X_2)(\omega)$ sei gegeben durch

   $$(X_1 + X_2)(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega).$$

   Zeigen Sie

   $$\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2].$$

   b) Betrachten Sie das zufällige Experiment des n-maligen Münzwurfes. Bei der Münze tritt „Kopf“ mit Wahrscheinlichkeit p und „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ auf. Definieren Sie eine Zufallsvariable X, welche die Anzahl der geworfenen „Köpfe“ des Experimentes zählt. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$ einmal mit und einmal ohne geeignete Indikator-Zufallsvariablen.

2. Aufgabe

   Wieviele Personen sollten sich in einem Raum befinden, damit man erwarten kann, daß mindestens zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben?

3. Aufgabe

   Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ eine Zufallsvariable. Beweisen Sie die Markov-Ungleichung: Für $a > 0$ ist

   $$\mathrm{Pr}[X \geq a] \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}.$$

4. Aufgabe

   Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Beweisen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung

   $$\mathrm{Pr}\left[|X - \mathbf{E}[X]| \geq a\right] \leq \frac{\mathbf{V}[X]}{a^2},$$

   wobei $\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}^2[X]$ die Varianz von X ist.

5. Aufgabe

   Betrachten Sie das zufällige Experiment des n-maligen Münzwurfes mit einer fairen Münze. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der geworfenen „Köpfe“ zählt. Zeigen Sie $\Pr[|X - \mathbf{E}[X]| \geq n^{3/4}] \to 0$. Beachten Sie, daß für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\mathbf{V}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}[X_i].$$