

Theoretische Informatik III

6. Übung

1. Aufgabe

Zeigen Sie für alle $a \in \mathbb{C}, a \neq 1$:

$$\sum_{j=0}^n a^j = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

2. Aufgabe

Demonstrieren Sie das „Summations-Lemma“ für $n = 3$.

3. Aufgabe

Betrachten Sie den Restklassenring \mathbb{Z}_m mit $m = 2^{tn/2} + 1$ und $t, n > 0$ sowie $t, n \in \mathbb{N}$.
Es sei $n = 2^l$ mit $l \in \mathbb{N}$ und $l \geq 1$.

a) Bestimmen Sie eine primitive n -te Einheitswurzel ω_n .

b) Beweisen Sie für alle $a \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j = \prod_{j=0}^{l-1} \left(1 + a^{(2^j)}\right).$$

c) Zeigen Sie für alle k mit $1 \leq k < n$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^k)^j \equiv 0 \pmod{m}.$$

d) Warum funktionieren in diesem Restklassenring die DFT und die inverse DFT?