Prof. Andreas Goerdt
Frank Schädlich

TU Chemnitz
Sommersemester 2003

Theoretische Informatik III

7. Übung - Lösungsvorschläge

1. **Aufgabe**

Fouriertransformation im Stetigen
Sei $f(x)$ eine Funktion, die in $[0, 2\pi]$ integrierbar und periodisch mit einer Periodenlänge von 2π ist, dann kann man $f(x)$ in die Fourierkoeffizienten zerlegen:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x \quad k = 0, 1, \ldots && \text{Realteil} \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x \quad k = 0, 1, \ldots && \text{Imaginärteil} \\
\text{oder} \quad c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \quad k = \pm 0, \pm 1, \ldots
\end{aligned}$$

Diese Zerlegung wird als harmonische Analyse bezeichnet. Die Harmonische Synthese stellt die Umkehrung dar.

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Fouriertransformation im Diskreten
Analog gilt folgendes:

$$\begin{aligned}
c_k &= \sum_{j=0}^{n-1} f(j)\omega_n^{kj} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \\
\text{bzw.} \quad a_k &= \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(j)\cos\left(\frac{2}{n}kj\pi\right) && \text{Realtei l} \\
b_k &= \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(j)\sin\left(\frac{2}{n}kj\pi\right) && \text{Imaginärteil} \\
f(x) &= \sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} \left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)
\end{aligned}$$

Dabei ist ω_n eine n-te primitive Einheitswurzel, es gilt also $\omega_n^n = 1$ und (für den Körper der komplexen Zahlen) $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Die DFT ist eine lineare Abbildung mit $\mathrm{DFT}(x) = Ax$ wobei $A = (a_{i,j})_{i,j=0}^{n-1}$ mit $a_{i,j} = \omega_n^{ij}$ Für das vorliegende Beispiel mit $n = 4$ gilt also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2-2i \\ -2 \\ -2+2i \end{pmatrix}$$

2. **Aufgabe**

Bisher wurde davon ausgegangen, daß n eine Zweierpotenz ist. FFT läßt sich allerdings auch so modifizieren, daß n eine beliebige Potenz sein kann. Sei nun $n = 3^t$. Analog zu den Betrachtungen in 2. kann man

$$c_k = \sum_{j=0}^{n-1} f(j)\omega_n^{kj}$$

zu dem Polynom

$$C(x) = f_0x^0 + f_x^1 + f_2x^2 + \ldots + f_{n-1}x^{n-1}$$

entwickeln. Nun läßt sich C(x) in die drei Teile

$$\begin{aligned} C^{[0]}(x) &= f_0x^0 + f_3x^1 + f_6x^2 + \ldots + f_{n-3}x^{\frac{n}{3}-1} \\ C^{[1]}(x) &= f_1x^0 + f_4x^1 + f_7x^2 + \ldots + f_{n-2}x^{\frac{n}{3}-1} \\ C^{[2]}(x) &= f_2x^0 + f_5x^1 + f_8x^2 + \ldots + f_{n-1}x^{\frac{n}{3}-1} \end{aligned}$$

zerlegen und es gilt $C(x) = C^{[0]}(x^3) + xC^{[1]}(x^3) + x^2C^{[2]}(x^3)$. Mit $x = \omega_n^k$ ist offensichtlich $C(x) = c_k$. Wegen des *cancellation lemmas* gilt $\left(\omega_n^k\right)^3 = \omega_{\frac{n}{3}}^k$. Damit kann DFT mit n Elementen aus dreimaligem DFT mit $\frac{n}{3}$ Elementen berechnet werden.

Sei $T(n)$ die Laufzeit von FFT mit n Elementen. Ist $n = 1$, ist die Laufzeit in $\Theta(1)$ wegen $\mathrm{T}(1) \leq a + b$ (obere Schranke, a, b konst.) und $\mathrm{T}(1) \geq a$ (untere Schranke). Ist $n \geq 3$, gilt $T(n) = 3\mathrm{T}(\frac{n}{3}) + bn$, da drei mal DFT mit $\frac{n}{3}$ Elementen berechnet werden muß und bn Schritte zum Zusammenfügen der Ergebnisse (conquer) benötigt werden.

$$\begin{aligned} T(3) &= 3 \cdot T(1) + bn \\ T(9) &= 3(3(T(1) + bn) + bn \\ &\vdots \\ T(n) &= 3^t \cdot T(1) + t \cdot bn \quad \text{wegen } n = 3^t = \text{Rekursionstiefe} \end{aligned}$$

Mit[1] $t = \log_3 n$ gilt dann

$$\begin{aligned} T(n) &= 3^{\log_3 n} \cdot T(1) + log_3 n \cdot bn \\ T(n) &= n \cdot T(1) + b \cdot log_3 n \cdot n \\ \text{damit ist } T(n) &\text{ in } \Theta(n \log n) \\ &\quad \text{da } T(1) \text{ in } \Theta(1) \text{ und } b \cdot log_3 n \cdot n \text{ in } \Theta(n \log n) \end{aligned}$$

3. **Aufgabe**

(a) Es ist zu zeigen, daß der Erwartungswert der Summe zweier Zufallsvariablen gleich der Summe der Erwartungswerte dieser Zufallsvariablen ist:

[1] Obige Beziehung kann einfach bewiesen werden. Induktion über t. IA: $t = 1$ dann $T(1) = 3^1T(1) + 1bn$ w.A. IV: Behauptung gilt für $t = k$ IB: Behauptung gilt für $t = k + 1$ IS: $T(k + 1) = 3(T(k)) + bn = 3 \cdot 3^kT(1) + bn + kbn = 3^{k+1}T(1) + (k + 1)bn$. Mit IA folgt Behauptung.

Sei $Y(\omega) = (X_1 + X_2)(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$. Dann ist nach Definition des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}
EY &= \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot y(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot (x_1(\omega) + x_2(\omega)) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} (P(\omega)\cdot x_1(\omega)) \cdot \sum_{\omega\in\Omega} (P(\omega)\cdot x_2(\omega)) \\
E(X_1 + X_2) &= E(X_1) + E(X_2)
\end{aligned}$$

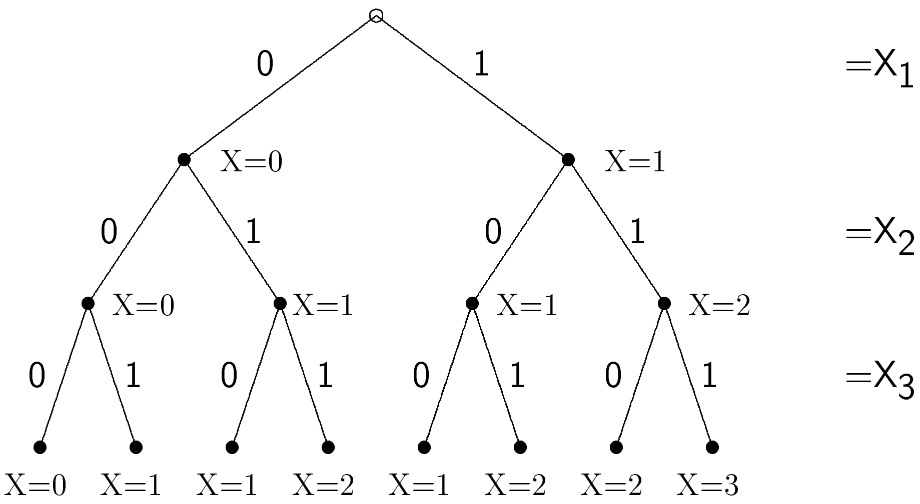
$\square$

Da sich diese Herleitung auch auf n statt 2 Summanden übertragen läßt, wurde soeben die Linearität des Erwartungswertes

$$E\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i (EX_i)$$

gezeigt. Diese Erkenntnis wird für (b) benötigt.

(b) Der Baum wird für $n = 3$ dargestellt. Von jedem Knoten geht jeweils eine Kante für Zahl ($= 0$) und Kopf ($= 1$) ab, was den Werten der Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 entspricht.
Die X an den Blättern geben die Werte der Zufallsvariablen X am Ende der Münzwurfexperimente an.



Wir betrachten ein Münzwurfexperiment, bei dem mit der Wahrscheinlichkeit p Kopf und mit $(1-p)$ Zahl auftritt. Der Münzwurf wird n mal wiederholt. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Würfen i mal Kopf auftritt, ist

$$P(X = i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

da die Zufallsvariable $X =$ *Anzahl des Auftretens von Kopf* binomialverteilt ist.

Daraus ergibt sich für den Erwartungswert:

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot P[X = i] \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \cdot \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i \cdot (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} p^i \cdot (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} n \cdot \frac{(n-1)!}{(i-1)!((n-1)-(i-1))!} p^i \cdot (1-p)^{n-i} \\
&= n \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^i \cdot (1-p)^{n-i} \\
&= n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i+1} \cdot (1-p)^{n-(i+1)} \\
&= n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p \cdot p^i \cdot (1-p)^{((n-1)-i)} \\
&= n \cdot p \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{((n-1)-i)} \\
&= n \cdot p \cdot (p + (1-p))^{n-1} \\
&= n \cdot p \cdot 1^{n-1} \\
&= n \cdot p
\end{aligned}
$$

Durch die Zerlegung der Zufallsvariable X in Indikatorzufallsvariablen und unter Ausnutzung der Linearität des Erwartungswertes kann dieser einfacher bestimmt werden. Es werden die Indikatorzufallsvariablen

$$
X_i = \begin{cases} 1 & \text{Kopf bei } i \text{ tem Münzwurf} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

eingeführt. Es ist also $X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Wie in (a) gezeigt wurde, ist

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{i=1}^{n} EX_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) \cdot X_i(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(P[\text{Kopf bei } i \text{ tem Münzwurf}] \cdot 1 + P[\text{Zahl bei } i \text{ tem Münzwurf}] \cdot 0 \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p \cdot 1 \\
&= n \cdot p \quad .
\end{aligned}$$

□

4. Aufgabe

Die Aufgabenstellung ermöglicht zwei verschiedene Auffassungen, die auch zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Zum einen kann berechnet werden, wieviele Personen erforderlich sind, damit der Erwartungswert für die Anzahl der Paare mit gleichem Geburtstag mindestens 1 beträgt. Zum anderen könnte man eine solches Übereinstimmen von Geburtstagen erwarten, wenn die Wahrscheinlichkeit hierfür hoch ist, beispielsweise mindestens 50% beträgt.

Beide Möglichkeiten werden zunächst allgemein gelöst. Es wird angenommen, daß ein Jahr genau t Tage umfaßt. Schaltjahre werden der Vereinfachung halber nicht betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig betrachtete Person genau am Tag i des Jahres Geburtstag hat, kann nun mit $1/t$ festgesetzt werden, wenn man annimmt, daß alle Geburten gleichmäßig über das Jahr verteilt sind.

Variante 1:

Wir betrachten die Indikatorzufallsvariable $X_{A,B}$. Sie sei gleich 1, wenn die (verschiedenen) Personen A und B am gleichen Tag Geburtstag haben, 0 sonst. Die Person A habe O. B. d. A. am Tag a Geburtstag. Die Person B hat nun mit der Wahrscheinlichkeit $1/t$ ebenfalls genau am Tag a Geburtstag. D. h. es gilt $\mathrm{p}[X_{A,B} = 1] = \mathrm{E}X_{A,B} = 1/t$.

Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl aller Paare (verschiedener Personen) zählt, die am gleichen Tag Geburtstag haben. Es ist nun n so zu wählen, so daß $\mathrm{E}X \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
X &= \sum_{A\neq B} X_{A,B} \\
\mathrm{E}X &= \sum_{A\neq B} \mathrm{E}X_{A,B} \qquad \text{(Linearität des Erwartungswertes)} \\
\mathrm{E}X &= \binom{n}{2}\frac{1}{t} \\
\frac{n(n-1)}{2t} &\geq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(n-1) &\geq 2t \\ n^2 - n - 2t &\geq 0 \\ n &\geq 1/2 + \sqrt{1/4 + 2t} \quad \text{ und } \quad n \leq 1/2 - \sqrt{1/4 + 2t} \end{aligned}$$

Auf der Erde (Mars) mit $t = 365$ (669) Tagen benötigt man also mindestens 28 (38) Personen.

Variante 2:

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A =$*Unter* n *Personen haben mindestens zwei den gleichen Geburtstag*, müßten wir nun die Anzahl $g(A)$ der für A günstigen atomaren Ereignisse ermitteln. Es erweist sich als wesentlich bequemer, zuerst die Anzahl $g(\bar{A})$ der für $\bar{A}$ günstigen atomaren Ereignisse zu berechnen. Das Ereignis $\bar{A}$ besteht darin, daß jede der n Personen an einem von allen anderen Geburtstagen verschiedenen Tag Geburtstag hat. Die Anzahl der für $\bar{A}$ günstigen atomaren Ereignisse ist (wieder unter Berücksichtigung der Reihenfolge)

$$g(\bar{A}) = \underbrace{t \cdot (t-1) \cdot (t-2) \cdot \ldots \cdot (t-(n-1))}_{n \text{ Faktoren}} = \frac{t!}{(t-n)!}.$$

Daraus erhalten wir

$$\mathrm{p}[A] = 1 - \mathrm{p}[\bar{A}] = 1 - \frac{g(\bar{A})}{k} = 1 - \frac{t!}{t^n \cdot (t-n)!}$$

Für $t = 365$ erhält man

n	10	20	22	**23**	24	30	40	50
p[A]	0,12	0,41	0,48	**0,51**	0,54	0,71	0,89	0,97

Man kann also ab etwa 23 Personen davon ausgehen, daß zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben.
Auf dem Mars ($t = 669$), würde man mindestens 31 Personen benötigen.

Variante 3:

Möchte man sich nicht auf die Wahrscheinlichkeitlehre verlassen, so wählt man $t + 1$ Personen aus. Dann gibt es immer zwei Personen, die am selben Tag Geburtstag feiern.

Bemerkungen:

Die Variante 3 ist natürlich absolut sicher. Mit der Variante 2 kann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Geburtstagsphänomens beliebig (hoch) gewählt werden. Variante 1 liefert einen Erwartungswert von 1. Für manche Aufgabenstellungen ist dies jedoch noch zu unsicher, man wünscht sich zwar E$X \geq 1$, möchte dies jedoch mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit erreichen. Ist bei einer solchen Aufgabenstellung der Parameter t variabel mit t sehr groß bzw. $t \to \infty$, so kann man eine (langsam wachsende) Funktion f wählen, so daß $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ und $f(t) \geq 1$ gilt. Dies ist beipspielsweise bei dieser Aufgabe für $f(t) = \log\log\log t$ der Fall. Nun führt man die gleiche Berechnung mit dem Ziel $\mathrm{E}X \geq 1 \cdot f(t)$ durch. Bei einer geschickten Wahl der Funktion f unterscheidet sich das Ergebnis kaum vom Ziel $\mathrm{E}X \geq 1$. Es gilt jedoch $\mathrm{E}X \to \infty$ für $t \to \infty$, so daß eine größere Sicherheit für das Eintreten des gewünschten Ereignisses vorliegt.

5. **Aufgabe**

Nach Definition Erwartungswert ist

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot X(\omega) \\
&= \underbrace{\sum_{\substack{\omega\in\Omega,\\ X(\omega)<a}} P(\omega)\cdot X(\omega)}_{\geq 0^{\dagger}} + \sum_{\substack{\omega\in\Omega,\\ X(\omega)\geq a}} P(\omega)\cdot X(\omega) \\
&\geq \sum_{\substack{\omega\in\Omega,\\ X(\omega)\geq a}} P(\omega)\cdot \underbrace{X(\omega)}_{\geq a^{\dagger}} \\
&\geq \sum_{\substack{\omega\in\Omega,\\ X(\omega)\geq a}} P(\omega)\cdot a \\
&\geq a\cdot \sum_{\substack{\omega\in\Omega,\\ X(\omega)\geq a}} P(\omega) \\
EX &\geq a\cdot P(X\geq a) \\
P(X\geq a) &\leq \frac{EX}{a} \quad .
\end{aligned}$$

□

6. **Aufgabe**

Vorab eine Bemerkung zur Aufgabenstellung. Das Szenario ist so gedacht, daß der Moderator ein Tor öffnet, welches nicht ausgewählt wurde. Ändert man die Show so, daß der Moderator ein beliebiges, also auch das ausgewählte Tor (mit Niete) öffnen darf und läßt man dem Kandidaten eine zweite Chance, so überlegt man sich leicht, daß es immer noch günstiger ist zu wechseln.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 wählt man das Tor mit dem Gewinn, mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 ist der Gewinn hinter einem der anderen beiden Tore versteckt. Ändert der Kandidat seine Meinung nicht, so gewinnt er mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 befindet sich der Gewinn hinter den anderen beiden Toren. Davon muß der Moderator eines (eine Niete) öffnen. D. h. der Gewinn muß mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 hinter dem anderen, nicht gewählten Tor versteckt sein. Es ist also besser zu wechseln.

†Da alle $P(\omega) \in [0\dots1]$ und alle $X(\omega) \geq 0$.