Prof. Andreas Goerdt
Frank Schädlich TU Chemnitz
Sommersemester 2003

Theoretische Informatik III
7. Übung / Konsultation

1. Aufgabe

Berechnen Sie die DFT des Vektors $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Aufgabe

Beschreiben Sie die Verallgemeinerung des DFT-Algorithmus für den Fall, daß n eine Potenz von 3 ist. Geben Sie eine rekursive Formel zur Bestimmung der Laufzeit an und lösen Sie diese.

3. Aufgabe

(a) Es sei $\mathcal{W}$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (gemäß Definition der Vorlesung) mit der Wahrscheinlichkeit Pr. Wir haben zwei Zufallsvariablen:

$$X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Es sei $(X_1 + X_2)(\omega)$ durch

$$(X_1 + X_2)(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$$

definiert. Zeigen Sie

$$\mathrm{E}[X_1 + X_2] = \mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2] \ .$$

(b) Betrachten Sie das zufällige Experiment des n-maligen Münzwurfes. Die Ergebnisse „Kopf“ bzw. „Zahl“ für eine Münze seien gleich wahrscheinlich. Definieren Sie eine Zufallsvariable X, welche die Anzahl der geworfenen „Köpfe“ des Experimentes zählt. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}[X]$ mit und ohne Verwendung von geeigneten Indikator-Zufallsvariablen. Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis für eine „ungerechte“ Münze, bei der „Kopf“ mit einer Wahrscheinlichkeit p auftritt.

4. Aufgabe

Berechnen Sie das Geburtstagsphänomen: Wieviele Personen sollten sich in einem Raum befinden, damit man erwarten kann, daß mindestens zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben? Wieviele Marsianer würde man auf dem Mars benötigen?

5. Aufgabe

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ eine Zufallsvariable. Beweisen Sie die Markow-Ungleichung: Für $a > 0$ ist

$$\Pr[X \geq a] \leq \frac{\mathrm{E}X}{a} \ .$$

6. Aufgabe

Betrachten Sie folgendes Szenario einer Fernsehspielshow:
Hinter drei Toren seien zwei Nieten und ein Gewinn versteckt. Alle drei Möglichkeiten seien gleich wahrscheinlich. Ein Kandidat entscheidet sich (zufällig) für ein Tor a. Der Moderator öffnet daraufhin ein Tor b, hinter welchem sich eine Niete befinden muß. Der Kandidat hat nun die Möglichkeit, seine Wahl von Tor a auf Tor c zu ändern, bevor nun das von ihm gewählte Tor geöffnet wird. Zeigen Sie, daß es für den Kandidaten günstiger ist zu wechseln!