Prof. Andreas Goerdt
Frank Schädlich

TU Chemnitz
Sommersemester 2003

Theoretische Informatik III

6. Übung

1. Aufgabe

Zeigen Sie das „Halbierungs-Lemma“:

Ist $n > 0$, n geradzahlig, dann sind die Quadrate der n n-ten Einheitswurzeln die $\frac{n}{2}$ $\frac{n}{2}$-ten komplexen Einheitswurzeln.

2. Aufgabe

Zeigen Sie für alle $a \in \mathbb{C}, a \neq 1$:

$$\sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

3. Aufgabe

Demonstrieren Sie das „Summations-Lemma“ für $n = 3$.

4. Aufgabe

Betrachten Sie den Restklassenring $\mathbb{Z}_m$ mit $m = 2^{tn/2} + 1$ und $t, n > 0$ sowie $t, n \in \mathbb{N}$. Es sei $n = 2^l$ mit $l \in \mathbb{N}$ und $l \geq 1$.

(a) Bestimmen Sie eine primitive n-te Einheitswurzel ω_n.

(b) Beweisen Sie für alle $a \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j = \prod_{j=0}^{l-1} \left(1 + a^{\left(2^j\right)}\right) \ .$$

(c) Zeigen Sie explizit für alle k mit $1 \leq k < n$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\omega_n^k\right)^j = 0 \ .$$