Technische Universität Chemnitz Sommersemester 2002
Professur Theoretische Informatik
Prof. Dr. A. Goerdt, Dipl.-Inf. F. Schädlich, Dipl.-Inf. A. Lanka

7. Übung „Theoretische Informatik II“
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Es sei $|x| = n$ bzw. $x = x_1x_2...x_n$ mit $x_i \in \Sigma$. Das Wort $x_{i,j}$ ist das Teilwort von x, welches bei Position i beginnt und j Zeichen lang ist. Z. B. ist für $x = baaba$ $x_{2,3} = aab$. Es gilt ferner $x = x_{1,n}$ und $x_{i,1} = x_i$.

Im Feld $T(i,j)$ sollen die Variablen stehen, aus denen sich das Wort $x_{i,j}$ ableiten läßt. Das wird dynamisch generiert. Buchstaben können nur mit Regeln der Form $A \rightarrow a$ erzeugt werden, da die Grammatik in Chomsky-Normalform vorliegt. Wir füllen also die 1. Zeile der Tabelle mit:

$T(i,1) = \{A : (A \rightarrow x_i) \in P\}$.

Wir betrachten jetzt einen beliebigen anderen Tabellenplatz $T(i,j)$, z. B. $T(2,3)$.
Wir suchen: $T(2,3) = \{X : \text{es gibt eine Ableitung } X \Rightarrow^* x_{2,3} = x_2x_3x_4 = aab\}$.

Die Grammatik liegt in Chomsky-Normalform vor, d. h. jedes dieser X wird mit einer Regel der Art $X \rightarrow YZ$ umgeformt. Die Kombination YZ erzeugt nun genau 2 Teilwörter von $x_{2,3}$.
Wir betrachten alle Zerlegungen in 2 Teilwörter von $x_{2,3}$:

$$\begin{aligned} aab = x_{2,3} &= x_{2,1} \cdot x_{3,2} &&= a \cdot ab \\ &= x_{2,2} \cdot x_{4,1} &&= aa \cdot b \end{aligned}$$

Die Variablen, die diese Teilwörter generieren, haben wir schon (dynamisch) in der Tabelle eingetragen. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} T(2,3) \quad = \quad & \{(X : (X \rightarrow YZ) \in P \text{ und } Y \in T(2,1) \text{ und } Z \in T(3,2)) \;\cup \\ & (X : (X \rightarrow YZ) \in P \text{ und } Y \in T(2,2) \text{ und } Z \in T(4,1))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(2,3) \quad = \quad & \{(X : (X \rightarrow AS) \in P\} \quad \cup \quad (\text{Bem.: } A \in T(2,1), S \in T(3,2)) \\ & \{(X : (X \rightarrow CS) \in P\} \quad \cup \quad (\text{Bem.: } C \in T(2,1), S \in T(3,2)) \\ & \{(X : (X \rightarrow AC) \in P\} \quad \cup \quad (\text{Bem.: } A \in T(2,1), C \in T(3,2)) \\ & \{(X : (X \rightarrow CC) \in P\} \quad \cup \quad (\text{Bem.: } C \in T(2,1), C \in T(3,2)) \\ & \{(X : (X \rightarrow BB) \in P\} \quad \cup \quad (\text{Bem.: } B \in T(2,2), B \in T(4,1)) \end{aligned}$$

Wir finden nur die Regel $\{B \rightarrow CC\}$ in der Grammatik. Es ist also $T(2,3) = \{B\}$.
Analog verfährt man mit allen anderen Tabelleneinträgen.

Steht im Feld $(1,n) = (1,5)$ das Startsymbol S, so gibt es eine Ableitung $S \Rightarrow^* x = baaba$. Damit gehört x zur Sprache L.

x_i sei i-tes Zeichen in x für $1 \leq i \leq 5$
$x_{i,j} = x_ix_{i+1}...x_{i+j-1}$ (j Zeichen)

Tabelle:

	b	a	a	b	a
j \ i	1	2	3	4	5
1	B	A,C	A,C	B	A,C
2	S,A	B	S,C	S,A	
3		B	B		
4		S,A,C			
5	S,A,C				

$\Rightarrow$ Das Wort $x = baaba$ läßt sich aus S ableiten und ist damit Element der Sprache.

b)

Aufgabe 2

„$\Longrightarrow$“: Es gilt das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen.
Sei z ein beliebiges Wort aus L mit $|z| \geq n$. Dann existiert eine Zerlegung $z = uvw$ mit:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$
3. $uv^iw \in L \qquad \forall i \in \mathbb{N}$

Wir wollen zeigen, daß damit auch eine Zerlegung von z in $z = u'v'w'x'y'$ gibt, so daß gilt:

1. $|v'w'x'| \leq n$
2. $|v'x'| \geq 1$
3. $u'v'^iw'x'^iy' \in L \qquad \forall i \in \mathbb{N}$

Wir setzen $u' := \varepsilon$, $v' := \varepsilon$, $w' := u$, $x' := v$ und $y' := w$. Man kann leicht überprüfen, daß damit die Bedingung aus dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen erfüllt sind.
„$\Longleftarrow$“: Es gilt das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.
Sei z ein beliebiges Wort aus L mit $|z| \geq n$. Es existiert also eine Zerlegung von z in $z = u'v'w'x'y'$, so daß gilt:

1. $|v'w'x'| \leq n$
2. $|v'x'| \geq 1$
3. $u'v'^iw'x'^iy' \in L \qquad \forall i \in \mathbb{N}$

Wir wollen zeigen, daß es auch eine Zerlegung von z in $z = uvw$ gibt, so daß das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen gilt:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$

3. $uv^iw \in L \qquad \forall i \in \mathbb{N}$

Wir setzen $u := w'$, $v := v'x'$, $w := u'y'$. Überprüfen wir nun die Richtigkeit unseres Ergebnisses:

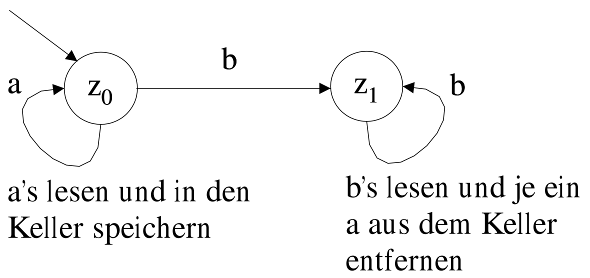
1. $|uv| = |w'v'x'| = |v'w'x'| \leq n$
2. $|v| = |v'x'| \geq 1$
3. $uv^iw = w'(v'x')^iu'y' = u'w'v'^ix'^iy' = u'v'^iw'x'^iy' \in L \qquad \forall i \in \mathbb{N}$

Bei 3. benutzen wir, daß das Alphabet aus nur einem Zeichen besteht und deswegen die Reihenfolge der Wortteile beliebig getauscht werden kann, ohne daß sich das Wort verändert.

Aufgabe 3

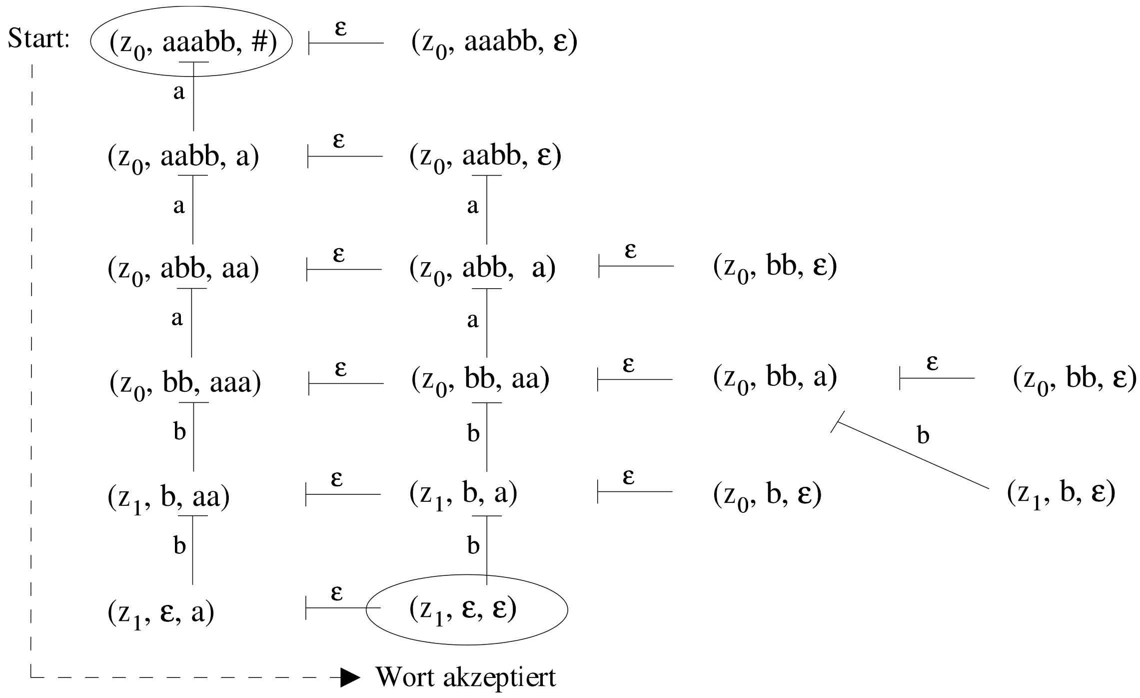
a) $L_1 = \{a^mb^n : m \geq n\}$

Zustände:
z_0 - a's lesen und in den Keller speichern
z_1 - b's lesen und je ein a aus dem Keller entfernen



(1) $\delta(z_0, a, \#) = \{(z_0, a)\}$
(2) $\delta(z_0, a, a) = \{(z_0, aa)\}$
(3) $\delta(z_0, \varepsilon, \#) = \{(z_0, \varepsilon)\} \leftarrow$ leeres Wort wird akzeptiert
(4) $\delta(z_0, \varepsilon, a) = \{(z_0, \varepsilon)\} \leftarrow a^*$ wird akzeptiert
(5) $\delta(z_0, b, a) = \{(z_1, \varepsilon)\}$
(6) $\delta(z_1, b, a) = \{(z_1, \varepsilon)\}$
(7) $\delta(z_1, \varepsilon, a) = \{(z_1, \varepsilon)\}$

b) Konfigurationsverlauf eines Kellerautomaten für die Sprache $L = \{a^mb^n : m \geq n\}$ bei Eingabe des Wortes $x = aaabb$:



Aufgabe 4

a) $L_2 = \{a^m b^n c^p d^q : m + n = p + q\}$

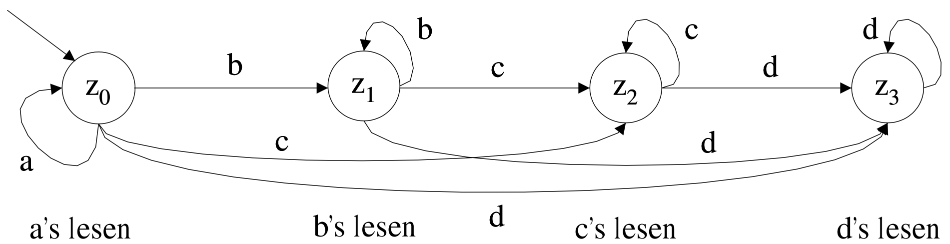
Zustände:

z_0 - a's lesen und ein x in den Keller speichern

z_1 - b's lesen und ein x in den Keller speichern

z_2 - c's lesen und je ein x aus dem Keller entfernen

z_3 - d's lesen und je ein x aus dem Keller entfernen



$\delta(z_0, \varepsilon, \#) = \{(z_0, \varepsilon)\} \leftarrow$ leeres Wort wird akzeptiert

$\delta(z_0, a, \#) = \{(z_0, x)\}$

$\delta(z_0, a, x) = \{(z_0, xx)\}$

$\delta(z_0, b, \#) = \{(z_1, x)\}$

$\delta(z_0, b, x) = \{(z_1, xx)\}$

$\delta(z_0, c, x) = \{(z_2, \varepsilon)\}$

$\delta(z_0, d, x) = \{(z_3, \varepsilon)\}$

$\delta(z_1, b, x) = \{(z_1, xx)\}$

$\delta(z_1, c, x) = \{(z_2, \varepsilon)\}$

$\delta(z_1, d, x) = \{(z_3, \varepsilon)\}$

$\delta(z_2, c, x) = \{(z_2, \varepsilon)\}$

$\delta(z_2, d, x) = \{(z_3, \varepsilon)\}$

$\delta(z_3, d, x) = \{(z_3, \varepsilon)\}$

b) $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* : |w|_a = 2|x|_b\}$
$\Gamma = \{\#, +1, +2, -1, -2\}$

$+1$: ein a gelesen, ein a fehlt noch, ein b fehlt
$+2$: zwei $a's$ gelesen, kein a fehlt, ein b fehlt
-1 : ein a fehlt, ein a gelesen, ein b gelesen
-2 : zwei $a's$ fehlen, kein a gelesen, ein b gelesen

$\delta(z, \varepsilon, \#) = \{(z, \varepsilon)\}$ akzeptieren (auch das leere Wort ε)
$\delta(z, a, \#) = \{(z, +1\#)\}$ (*)
$\delta(z, a, +1) = \{(z, +2)\}$
$\delta(z, a, +2) = \{(z, +1+2)\}$
$\delta(z, a, -1) = \{(z, \varepsilon)\}$
$\delta(z, a, -2) = \{(z, -1)\}$
$\delta(z, b, \#) = \{(z, -2\#)\}$ (*)
$\delta(z, b, +2) = \{(z, \varepsilon)\}$
$\delta(z, b, -1) = \{(z, -1-2)\}$
$\delta(z, b, -2) = \{(z, -2-2)\}$
$\delta(z, b, +1) = \{(z, -1)\}$
$\delta(z, b, +2) = \{(z, \varepsilon)\}$

(*) Das Kellerstapelsymbol $\#$ wird nicht entfernt, damit auch das Wort $w = w_1 w_2$ mit $w_i \in L_3$ korrekt erkannt wird.

c) $L_4 = \{a^m b^n : n \leq m \leq 2n\}$

Aus der erzeugenden kontextfreien Grammatik G $= (V, \Sigma, P, S')$ mit
$P = \{S' \to \varepsilon \mid S,$
$S \to aSb \mid aaSb \mid ab \mid aab\},$
konstruieren wir einen äquivalenten Kellerautomat, der die gleiche Sprache akzeptiert.

$M = (\{z\}, \Sigma, \Gamma, \delta, z, \#)$
$\Gamma = V \cup \Sigma,\ \# = S'$

Für jede Regel $A \to \alpha \in R \quad (\alpha \in V \cup \Sigma^*)$ wird dem Kellerautomaten die Regel $\delta(z, \varepsilon, A) \to (z, \alpha)$ hinzugefügt. Ferner ergänzt man für die Terminalsymbole aus $\Sigma:\ \delta(z, a, a) \to (z, \varepsilon)$.
Dadurch erhält man folgenden Kellerautomaten, der L_4 erkennt:

$\delta(z, \varepsilon, S') = \{(z, \varepsilon), (z, S)\}$
$\delta(z, \varepsilon, S) = \{(z, aSb), (z, aaSb), (z, ab), (z, aab)\}$
$\delta(z, a, a) = \{(z, \varepsilon)\}$
$\delta(z, b, b) = \{(z, \varepsilon)\}$