Technische Universität Chemnitz Sommersemester 2002
Professur Theoretische Informatik
Prof. Dr. A. Goerdt, Dipl.-Inf. F. Schädlich, Dipl.-Inf. A. Lanka

6. Übung „Theoretische Informatik II“
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Chomsky Normalform:
Alle Regeln haben die Form $A \to a$ oder $A \to BC$.

a) $S \to ab \mid aSb$

$A \to a$, $B \to b$
$S \to AB$, $S \to ASB$

„Chomsky-Normalform:“
$A \to a$, $B \to b$
$S \to AB$, $S \to AZ$
$Z \to SB$

b) $T \to a \mid (T) \mid T + T$

$T \to a$, $K_L \to ($, $K_R \to)$, $P \to +$
$T \to K_L T K_R$, $T \to TPT$

„Chomsky-Normalform:“
$T \to a$
$T \to K_L Z$, $Z \to TK_R$
$T \to TX$, $X \to PT$

c) $S \to aB \mid bA$
$A \to aS \mid bAA \mid a$
$B \to bS \mid aBB \mid b$

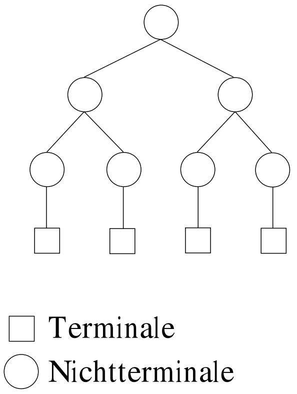
$X \to a$, $Y \to b$
$S \to XB \mid YA$
$A \to a \mid XS \mid YAA$
$B \to b \mid YS \mid XBB$

„Chomsky-Normalform:“
$X \to a$, $Y \to b$
$S \to XB \mid YA$
$A \to a \mid XS \mid YP$, $P \to AA$
$B \to b \mid YS \mid XQ$, $Q \to BB$

Aufgabe 2

Der Ableitungsbaum bzw. der Syntaxbaum eines Wortes $x \in L$ hat das Aussehen eines Binärbaumes, wenn man die Blätter (Terminalsymbole) abschneiden würde. Somit hätte jeder Knoten 0 oder 2 Söhne.

Anzahl der Ableitungsschritte = Anzahl der Nichtterminalsymbole im Baum
= Anzahl der Knoten des Binärbaumes = $2n - 1$

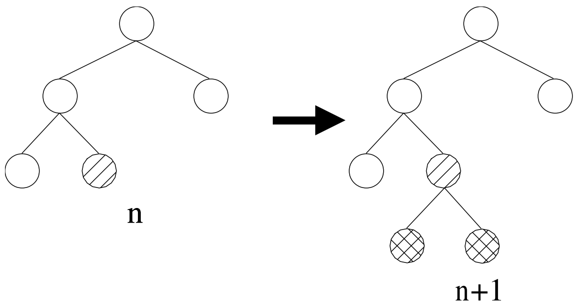


Der binäre Baum und der Ableitungsbaum haben offensichtlich die gleiche Anzahl von Blättern.

Beweis:
Sei n die Anzahl der Blätter und k die Anzahl der Knoten (inkl. Blätter) im Baum. Wir betrachten den Baum ohne Terminalsymbole. Daraus folgt die Behauptung:
$k = 2n - 1$

IA: $n = 1 \Rightarrow 1$ Knoten $(2n - 1 = 1)$

IS: Jeder binäre Baum mit $n + 1$ $(n \geq 1)$ Blättern läßt sich aus einem binären Baum mit n Blättern konstruieren, indem ein Blatt zu einem Knoten mit zwei Söhnen (Blätter) umgewandelt wird.



$\Rightarrow$ Ein binärer Baum mit $n + 1$ Blättern besitzt $2n + 1 = 2(n + 1) - 1$ Knoten.
$\Rightarrow$ Liegt die Grammatik in Chomsky-Normalform vor, so braucht man $O(|x|)$ Schritte zum Ableiten des Wortes x.

Aufgabe 3

Pumping Lemma:
Wenn L kontextfrei ist, dann existiert eine Konstante n, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ eine Darstellung $z = uvwxy$ existiert, die folgende Eigenschaften hat:
(1) $vx \neq \varepsilon$, also $|vx| \geq 1$
(2) $|vwx| \leq n$
(3) $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i = 0, 1, 2, ...$

a) $L = \{a^m : m = 3^l \text{ für } l \in \mathbb{N}\}$
Gegenannahme: L sei kontextfrei. Damit gilt das Pumping-Lemma, die Konstante hierfür sei n. Betrachten wir nun das Wort $z = a^m$ mit $m = 3^n$, so gehört $z = a^{3^n}$ zur Sprache.
$\Rightarrow |z| = m = 3^n \Rightarrow z = uvwxy$ mit (1), (2) und (3)
Aus (1) und (2) folgt: $1 \leq |vx| \leq n \Rightarrow 1 \leq |vx| \leq 3^n$
Aus (3) folgt: $uv^2wx^2y = a^{3^n+|vx|} \in L \Rightarrow 3^n + |vx|$ ist 3er Potenz.
$|vx| \geq 1 \Rightarrow 3^n < 3^n + |vx|$
$|vx| \leq m = 3^n \Rightarrow 3^n + |vx| \leq 2 \cdot 3^n \Rightarrow 3^n < 3^n + |vx| \leq 2 \cdot 3^n$
$\Rightarrow 3^n < 3^n + |vx| < 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$
$\Rightarrow 3^n + |vx|$ liegt zwischen 2 Dreierpotenzen $\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ L ist nicht kontextfrei.

b) $L = \{a^ib^jc^l : 0 \leq i < j < l\}$
Gegenannahme: L sei kontextfrei. Damit gilt das Pumping-Lemma, die Konstante hierfür sei n. Betrachten wir nun das Wort $z = a^nb^{n+1}c^{n+2}$, so gehört z zur Sprache.
$\Rightarrow |z| = 3n + 3 > n \Rightarrow z = uvwxy$ mit (1), (2) und (3)
$\Rightarrow |vwx| \leq n$ und damit enthält vx maximal 2 Sorten von Terminalen wegen der Behauptung (2)

Vorbemerkung:
Das Wort $a^nb^{n+1}c^{n+2}$ ist so gewählt, dass es beim Hinzufügen eines a's bzw. b's oder beim Entfernen eines b's oder c's nicht mehr zur Sprache gehört.

1. Fall: vx enthält kein a, also nur b's und/oder c's:
Es wird $k = 0$ gesetzt. $\Rightarrow z' = uwz$. In z wurde gegenüber z mindestens ein b oder nur c's entfernt. $\Rightarrow$ Die Bedingung $0 \leq i < j < l$ ist verletzt.

2. Fall: vx enthält a's und / oder b's:
Es wird $k \geq 2$ gesetzt. Damit ist die Bedingung $0 \leq i < j < l$ ist verletzt.

3. Fall: vx enthält a's, b's und c's:
Verletzt die Bedingung (2) des Pumping Lemmas, da $|vwx| \geq |vx| > n$.

$\Rightarrow$ L ist nicht kontextfrei.

c) $L = \{a^lb^lc^m : 0 \leq l \leq m \leq 2l\}$
Gegenannahme: L sei kontextfrei. Sei n die Pumping-Lemma-Zahl non L. Nehmen $z = a^nb^nc^n$ (siehe auch Aufgabe b) $\Rightarrow |z| = 3n \Rightarrow z = uvwxy$ mit (1), (2) und (3)
$\Rightarrow vwx$ und damit vx enthält maximal 2 Sorten Terminale wegen (2)

1. Fall: vx enthält kein a, also nur b's und/oder c's:
Setzen $k = 0$. Damit ist z kürzer geworden und die Bedingung $0 \leq l \leq m \leq 2l$ ist

verletzt.

2. Fall: vx enthält a's, aber keine b's und c's:
Setzen $k \geq 2$. Damit ist die Anzahl a's $\neq$ Anzahl b's.

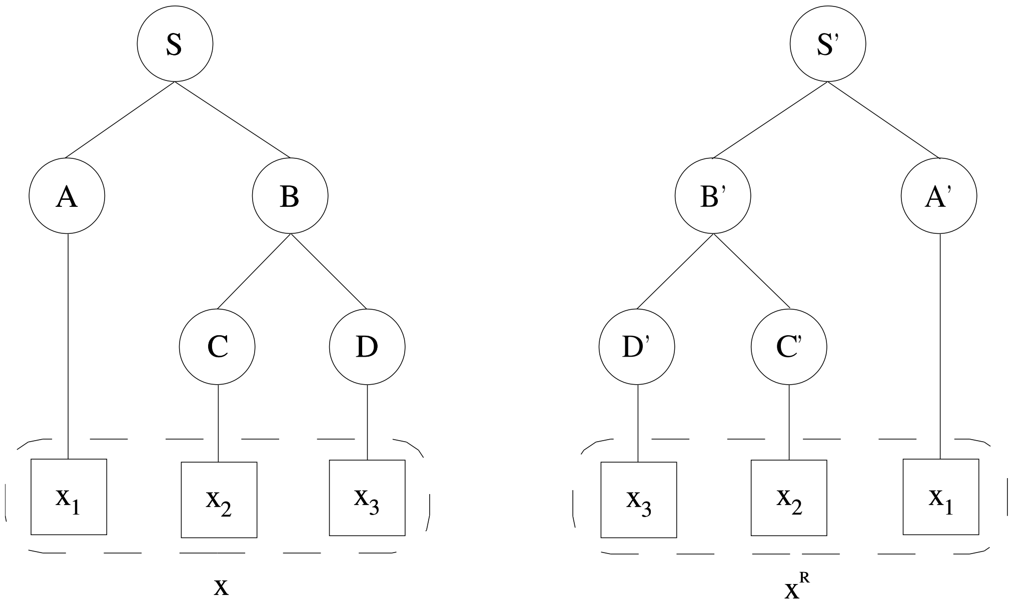
3. Fall: vx enthält a's und b's:
Setzen $k = 2n$. Damit ist die Bedingung $0 \leq l \leq m \leq 2l$ ist verletzt, da $l \geq 2n$ sein wird.

4. Fall: vx enthält a's, b's und c's:
Verletzt die Bedingung (2) des Pumping Lemmas, da $|vwx| \geq |vx| > n$.

$\Rightarrow$ L ist nicht kontextfrei.

Aufgabe 4

Man überführt die Grammatik in Chomsky-Normalform und erhält z. B. folgenden Ableitungsbaum für ein Wort $x = x_1x_2x_3$:



Nun vertausche man alle linken mit allen rechten Söhnen, d. h. alle Regeln in CNF der Art $A \rightarrow BC$ durch $A' \rightarrow C'B'$ ersetzen.
$\Rightarrow$ Ableitungsbaum „gespiegelt“
$\Rightarrow$ Sprache „gespiegelt“
Gibt es also eine Ableitung für das Wort in der einen Sprache, so existiert eine analoge, „gespiegelte“ Ableitung für x^R in der anderen Sprache.