Technische Universität Chemnitz Sommersemester 2002
Professur Theoretische Informatik
Prof. Dr. A. Goerdt, Dipl.-Inf. F. Schädlich, Dipl.-Inf. A. Lanka

4. Übung „Theoretische Informatik II“
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:
Für jede reguläre Sprache L existiert eine Konstante $p > 0$, so dass sich jedes Wort $x \in L$ mit $|x| \geq p$ in $x = uvw$ zerlegen läßt. Die Zerlegung erfüllt folgende Bedingungen:

1. $|v| \geq 1$
2. $|uv| \leq p$
3. $uv^k w \in L \ \forall k = 0, 1, 2, ...$

$L = \{ss^R : s \in \{0,1\}^*\}$
Wir wählen ein Wort x mit der Länge $|x| \geq 2p$. Es ist also $xx^R \in L$ und es sollte eine Zerlegung $xx^R = uvw$ geben. Da bereits $x \geq 2p$ ist und $|uv| \leq p$ gilt, können wir sogar sagen: $xx^R = uvw'x^R$ also $x^R = w'^R v^R u^R$. Laut Pumping-Lemma ist $uw'x^R \in L$. Wir wählen $x = 1^p 0^p$, also $x^R = 0^p 1^p$ und $w' \in 1^* 0^*$. Es ist nun $uv \in 1^*$ und $1 \leq |uv| = t \leq p$. $\Rightarrow$ $uw'x^R = w'^R v^R u^R = 1^{(p-t)} 0^p 0^p 1^p$, angeblich in L. Das Wort fängt mit $(p-t) < p$ Einsen an, dann kommen $2p$ Nullen und danach p Einsen $\Rightarrow$ das Wort kann nicht zur Sprache gehören $\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ L ist nicht regulär.

Aufgabe 2

a) Dieses Pumping-Lemma gilt. Sei n die Anzahl der Zustände eines DEA, der L erkennt. Da das Teilwort x' aus mindestens n Buchstaben besteht, durchläuft der DEA während er x' abarbeitet mindestens einen Zustand zweimal. Er betritt also während der ersten n Buchstaben von x' ($|uv| \leq n$) ein Schleife $|v| \geq 1$. Diese Schleife kann beliebig oft wiederholt werden. Der Automat erkennt daher auch alle Wörter x_i, die dadurch entstehen, daß im Wort x das Teilwort x' durch $uv^i w$ ersetzt wird. Diese Wörter gehören somit auch zu L (3. Bedingung).

b) Sei $L \subseteq \Sigma^*$.

Wenn gilt:

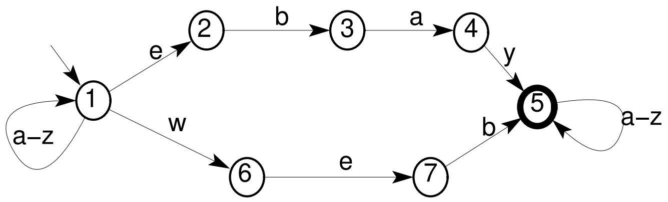
> Für jedes $n \geq 1$ gibt es ein $x \in L$, mit $|x| \geq n$, mit einem Teilwort x' mit $|x'| \geq n$, so daß für jede Zerlegung von $x' = uvw$ gilt:
> 1. $|uv| > n$
> oder
> 2. $|v| = 0$
> oder
> 3. Es gibt ein i, so daß x mit $uv^i w$ statt x' nicht in L liegt.

dann ist L nicht regulär.

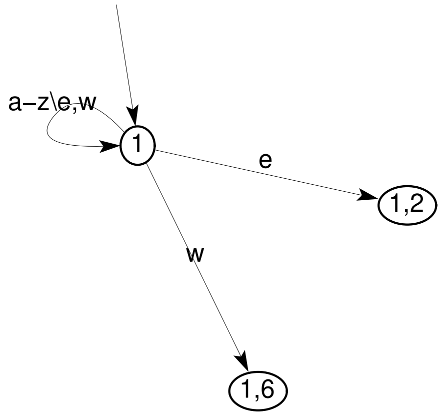
c) Sei $x = ca^n b^n$ und $x' = a^n$. Dann ist für $i = 2$ das Wort $ca^{n+|v|}b^n$ entweder nicht in L oder $|v| = 0$. Damit kann L nicht regulär sein.

Aufgabe 3

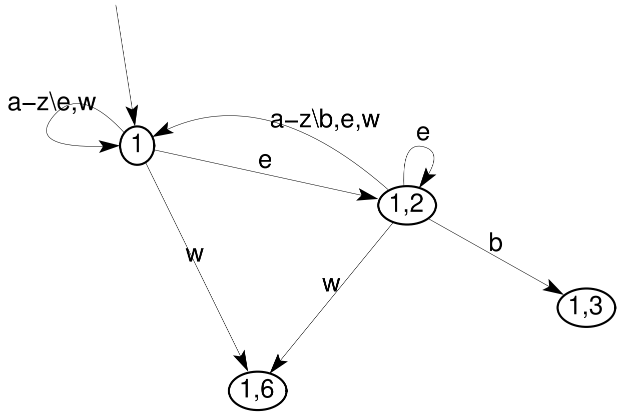
Ein möglicher DEA ist zum Beispiel dieser:



Der NEA beginnt mit Zustand 1 und liest das erste Zeichen. Ist dieses Zeichen ein e, kann er sich entscheiden, ob er in den Zustand 2 wechselt oder in 1 bleibt. Im DEA fügen wir daher einen Zustandswechsel von 1 zu 1,2 ein. Liest der NEA ein w, kann er sich entscheiden in 1 zu bleiben oder nach 6 zu wechseln. Daher fügen wir bei dem DEA einen Übergang von 1 zu 1,6 ein. Ist das gelesene Terminal irgendein Buchstabe außer e und w, bleibt der NEA auf jeden Fall im Zustand 1. Anfangs ergibt also sich dieser (noch unvollständige) DEA:



Wir vervollständigen die noch fehlenden Kanten systematisch. Nehmen wir an, wir sind im Zustand 1,2 im DEA (der NEA ist also im Zustand 1 oder 2). Ist das nächste Zeichen ein b und der NEA ist im Zustand 1, dann bleibt er auch in 1. Ist der NEA im Zustand 2, wechselt er nach 6. Er ist also nach dem Lesen von w entweder im Zustand 1 oder im Zustand 6. Wir fügen im DEA also eine Kante von 1,2 nach 1,6 ein. Liest der NEA im Zustand 1 oder 2 ein b, ist er anschließend im Zustand 1 oder 3. Wenn er nämlich in 1 war, bleibt er auch in 1. War er aber in 2, wechselt er von 2 nach 3. Es entsteht im DEA also eine Kante von 1,2 nach 1,3, die mit b beschriftet ist. Ist der NEA in 1 oder 2 und liest ein e, so ist er danach wieder in 1 oder 2. Das liegt daran, daß er im Zustand 1 die Wahl hat, ob er in 1 bleibt oder nach 2 wechselt. Ist er hingegen in 2, so kommt er nicht weiter. Im DEA kommt also eine Kante von 1,2 nach 1,2 dazu, an der ein e steht. Bei allen anderen Buchstaben ist der NEA zwangsweise im Zustand 1. Bis jetzt sieht unser DEA also so aus:



Wir machen so weiter, bis alle Zustäende des DEA vollständig beschriftet sind. Wenn wir damit fertig sind, markieren wir noch die Endzustände. Jeder Zustand des DEA, der einen der Endzustände des NEA enthält (also zum Beispiel 1,2,5), wird als Endzustand markiert. Schließlich ergibt sich folgender DEA: