Technische Universität Chemnitz Sommersemester 2002
Professur Theoretische Informatik
Prof. Dr. A. Goerdt, Dipl.-Inf. F. Schädlich, Dipl.-Inf. A. Lanka

2. Übung „Theoretische Informatik II“
Lösungsvorschläge

1. Aufgabe

(a) Die Grammatik ist eine Typ-2-Grammatik, da die Länge der Regeln auf der linken Seite immer kleiner oder gleich der Länge der Regeln auf der rechten Seite ist und die linke Seite einer Regel jeweils nur aus einem Nichtterminalsymbol besteht.
Für jede Regel $w_L \to w_R \in R$ gilt: $|w_L| \leq |w_R|$ und $w_L \in \Sigma$.
Die Sprache, die von dieser Grammatik erzeugt wird, beschreibt die Menge aller korrekt geklammerten Ausdrücke, die "a", "(", ")" und "+" verwenden.
Man kann keine Typ-3-Grammatik bilden, da es sonst Probleme mit einer korrekten Klammerung geben würde.

(b) Die Grammatik ist eine Typ-3-Grammatik, da die Länge der Regeln auf der linken Seite immer kleiner oder gleich der Länge der Regeln auf der rechten Seite ist und die linke Seite einer Regel jeweils nur aus einem Nichtterminalsymbol besteht und die rechte Seite einer Regel entweder aus einem Terminalsymbol oder aus einem Terminalsymbol gefolgt von einem Nichtterminalsymbol besteht.
Für jede Regel $w_L \to w_R \in R$ gilt: $|w_L| \leq |w_R|$, $w_L \in \Sigma$ und $w_R \in \Sigma \cup \Sigma V$.
Die Sprache, die von dieser Grammatik erzeugt wird, ist die folgende:
$L(G) = \{a^n b a^m \mid m \geq 1, n \geq 0\}$.

(c) Die Grammatik ist eine Typ-1-Grammatik, da die Länge der Regeln auf der linken Seite immer kleiner oder gleich der Länge der Regeln auf der rechten Seite ist.
Für jede Regel $w_L \to w_R \in Rgilt : |w_L| \leq |w_R|$
Die Sprache, die von dieser Grammatik erzeugt wird, ist die folgende:
$L(G) = \{a^n ab, a^n ba \mid n \geq 0\}$.

Man kann diese Grammatik auch als Typ-2-Grammatik angeben:

$$
\begin{aligned}
P = \{\; & S \to ab,\\
& S \to aS,\\
& S \to ba\}
\end{aligned}
$$

Man kann diese Grammatik auch als Typ-3-Grammatik angeben:

$$
\begin{aligned}
P = \{\; & S \to aS,\\
& S \to aB,\\
& S \to bA,\\
& A \to a,\\
& B \to b\}
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe

Eine Sprache ist eine reguläre Sprache, wenn sie eine Typ-3-Grammatik besitzt. Wenn es gelingt eine Typ-3-Grammatik für eine Sprache zu finden, so ist damit bewiesen, daß diese eine reguläre Sprache ist.

$L_1 = \{a^m b^n : m, n \geq 0\}$

$$\begin{aligned} P = \{\ & S \rightarrow \varepsilon, \\ & S \rightarrow aT, \\ & S \rightarrow a, \\ & S \rightarrow bB, \\ & S \rightarrow b, \\ & T \rightarrow aT, \\ & T \rightarrow a, \\ & T \rightarrow bB, \\ & T \rightarrow b, \\ & B \rightarrow b, \\ & B \rightarrow bB\} \end{aligned}$$

Nach den Kriterien von Chomsky ist diese Grammatik eine Typ-3-Grammatik und somit ist die damit erzeugte Sprache eine reguläre Sprache.

$L_2 = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

$$\begin{aligned} P = \{\ & S \rightarrow \varepsilon, \\ & S \rightarrow T, \\ & T \rightarrow ab, \\ & T \rightarrow aTb\} \end{aligned}$$

Dies ist nach den Kriterien von Chomsky eine Typ-2-Grammatik. Durch die letzte Regel gelingt es nicht, aus ihr eine Typ-3-Grammatik zu bauen. Somit ist die erzeugte Sprache keine reguläre sondern eine kontextfreie Sprache.

3. Aufgabe

(a) $$\begin{aligned} P = \{\ & S \rightarrow c, \\ & S \rightarrow aSa, \\ & S \rightarrow bSb\} \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} P = \{\ & S \rightarrow \varepsilon, \\ & S \rightarrow T, \\ & T \rightarrow a, \\ & T \rightarrow b, \\ & T \rightarrow aa, \\ & T \rightarrow bb, \\ & T \rightarrow aTa, \\ & T \rightarrow bTb\} \end{aligned}$$

(c) $P = \{ S \to \varepsilon,$
$S \to T,$
$T \to aT,$
$T \to aTb,$
$T \to ab,$
$T \to a\}$

(d) $P = \{ S \to Tb,$
$T \to a,$
$T \to BTB,$
$B \to a,$
$B \to b\}$

(e) $P = \{ S \to \varepsilon,$
$S \to T,$
$T \to aTb,$
$T \to aaTb,$
$T \to ab,$
$T \to aab\}$

(f) $P = \{ S \to \varepsilon,$
$S \to A,$
$S \to AB,$
$S \to B,$
$A \to ab,$
$A \to aAb,$
$B \to a,$
$B \to aB\}$

4. Aufgabe

Soll eine Typ-3-Grammatik so erweitert werden, daß mit ihr auch das leere Wort ϵ gernerierbar ist, müssen folgende Schritte durchgeführt werden:

- Ein neues Startsymol S' einführen.
- $S' \to \varepsilon$ einfügen
- Alle Regeln, die das alte Startsymbol auf der linken Seite einer Regel enthalten, nochmals mit dem neuen Startsymbol S' schreiben.

Es gilt also:
$G' = (V', \Sigma, P', S')$ mit: $V' = V \cup \{S'\}$ sowie $S' \notin V$ und $S' \notin \Sigma$
$P' = P \cup \{S' \to \varepsilon\} \cup \{S' \to \alpha \mid (S \to \alpha) \in P\}$.
Das in der Vorlesung eingeführte Verfahren ist nur auf Typ 1 - und Typ-2-Grammatiken anwendbar.

5. Aufgabe

$$
\begin{aligned}
L &= \{a^n b^n c^n d^n : n \geq 1\} \\
G &= (V, \Sigma, P, S) \\
V &= \{A, B, C, D, S\} \\
\Sigma &= \{a, b, c, d\} \\
P &= \{ \\
& \quad S \rightarrow aSBCD, \\
& \quad S \rightarrow aBCD, \\
& \quad aB \rightarrow ab, \\
& \quad bB \rightarrow bb, \\
& \quad bC \rightarrow bc, \\
& \quad cC \rightarrow cc, \\
& \quad cD \rightarrow cd, \\
& \quad CB \rightarrow BC, \\
& \quad DB \rightarrow BD, \\
& \quad DC \rightarrow CD \\
& \}
\end{aligned}
$$