Technische Universität Chemnitz Sommersemester 2002
Professur Theoretische Informatik
Prof. Dr. A. Goerdt, Dipl.-Inf. F. Schädlich, Dipl.-Inf. A. Lanka

1. Übung „Theoretische Informatik II“

Lösungsvorschläge

1. Aufgabe

(a) $A^* = \{a^n | n \geq 0\} = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots\}$

(b) $B^+ = \{b^n | n \geq 1\} = \{b, bb, bbb, \dots\}$

(c) $(AB)^* = \{ab\}^* = \{(ab)^n | n \geq 0\} = \{\varepsilon, ab, abab, ababab, \dots\}$

(d) $A^*B^* = \{a\}^*\{b\}^* = \{a^n b^m | m, n \geq 0\}$

(e) $(A \cup B)^* = \Sigma^*$

(f) $(A \cap B)^* = (\{\})^* = (\emptyset)^* = \{\varepsilon\}$ (leere Wort)

(g) $(AB)^* \cap (A^*B^*) = \{\varepsilon, ab\}$

(h) $\overline{B^*} = \Sigma^* \backslash B^* = \{uav | u, v \in \Sigma^*\} = \{a, ab, bab, \dots\}$
(alle Wörter die mindestens ein a enthalten)

(i) $\overline{(A \cup B)^*} = \overline{\Sigma^*} = \Sigma^* \backslash \Sigma^* = \{\} = \emptyset$ (leere Menge)

2. Aufgabe

Rekursive Definitionen:

(a) $ab \in L$
$\omega \in L \Rightarrow a\omega b \in L$

(b) $aaaab \in L$
$\omega \in L \Rightarrow aaa\omega \in L$

(c) $\epsilon \in L$
$\omega \in L \Rightarrow \forall x \in \Sigma : x\omega x \in L$

(d) $\epsilon \in L$
$\forall x \in \Sigma : x \in L$
$\omega \in L \Rightarrow \forall x \in \Sigma : x\omega x \in L$

Grammatiken:

(a) $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$
$G = (\Sigma, V, P, S)$ mit
$\Sigma = \{a, b\}$
$V = \{S\}$

$$P = \{\ S \to ab,\\ \quad S \to aSb\}$$

(b) $L = \{a^{3n+1} b : n \geq 1\}$
$G = (\Sigma, V, P, S)$ mit
$\Sigma = \{a, b\}$
$V = \{S\}$

$$P = \{\ S \to aaaab,\\ \quad S \to aaaS\}$$

(c) $L = \{w^R w : w \in \Sigma^*\}$
$G = (\Sigma, V, P, S)$ mit
$\Sigma = \{a, b\}$
$V = \{S\}$

$$P = \{\ S \to \varepsilon,\\ \quad S \to aSa,\\ \quad S \to bSb\}$$

(d) $L = \{w \in \Sigma^* | w^R = w\}$
$G = (\Sigma, V, P, S)$ mit
$\Sigma = \{a, b\}$
$V = \{S\}$

$$P = \{\ S \to \varepsilon,\\ \quad S \to a,\\ \quad S \to b,\\ \quad S \to aSa,\\ \quad S \to bSb\}$$

3. Aufgabe

(a) Wir müssen die kleinste Relation R^+ finden, die R enthält und deren Paare die Transportbedingung erfüllen.
$R^+ = \{(1,2),(2,3),(3,4),(5,4),(1,3),(1,4),(2,4)\}$

(b) Wir müssen die kleinste Relation R^* finden, die R^+ enthält und deren Elemente in Relation zu sich selbst stehen.
$R^* = \{(1,2),(2,3),(3,4),(5,4),(1,3),(1,4),(2,4),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

(c) Wir müssen die kleinste Relation $R^=$ finden, die R enthält und wo alle Paare symmetrisch sind. Es ist also

$$\begin{aligned} R^= &= R \cup \{(y,x) | (x,y) \in R\} \\ &= \{(1,2),(2,3),(3,4),(5,4),(2,1),(3,2),(4,3),(4,5)\}. \end{aligned}$$

4. Aufgabe

Eine Relation R ist eine Äquivalenzrelation, falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

(a) Wähle drei ganze Zahlen i, j und k. So ist $i = i$ (reflexiv), aus $i = j$ folgt $j = i$ (symmetrisch) und aus $i = j$ und $j = k$ folgt $i = k$ (transitiv). Da die Relation R_1 diese drei Eigenschaften erfüllt, ist diese eine Äquivalenzrelation. Also gibt es unendlich viele Äquivalenzklassen, die alle nur ein Element enthalten.

(b) Definiere die Äquivalenzklasse so, dass alle Menschen in ihr enthalten sind, die zur gleichen Stunde und am gleichen Tag eines Jahres geboren wurden. Somit kann es bei 365 Tagen im Jahr mit je 24 Stunden 8760 verschiedene Äquivalenzklassen geben. Wähle aus einer dieser Klassen drei Menschen aus. Analog zu (a) kann man zeigen, dass R_2 eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Es existieren nun im Gegensatz zu (b) unendlich viele Äquivalenzklassen. Zwei Personen gehören der gleichen Äquivalenzklasse an, falls Sie zur gleichen Stunde und am gleichen Tag und im gleichen Jahr geboren wurden. Analog zu (a) kann man zeigen, dass R_3 eine Äquivalenzrelation ist.

5. Aufgabe

reflexiv:
Sei R reflexiv. Ist R^{-1} auch reflexiv? Es müßte also für alle $a \in S \;\; aR^{-1}a$ gelten.
R ist reflexiv $\Rightarrow$ für alle a ist $(a, a) \in R \Rightarrow$ (lt. Definition) $(a, a) \in R^{-1} \Rightarrow R^{-1}$ ist reflexiv.
Analog kann man dies auch für transitive und symmetrische Eigenschaften zeigen.

Bemerkung: Es gilt nicht immer, daß R^{-1} die gleichen Eigenschaften wie R hat. Eine solche Eigenschaft, die in R aber nicht unbedingt in R^{-1} gelten kann, ist die Nacheindeutigkeit:

R ist nacheindeutig genau dann, wenn für beliebige $x, y, y' \in S$ aus xRy und xRy' sofort $y = y'$ folgt.