Übung 7 – Hidden Markov Modelle (HMM)

Beispiel 1 – Einfaches HMM

♣		♣		♣		♣
♣		♣		♢		♢
♣		♢		♢		♢
♣		♠		♢		♠
♢	> 3	♠	> 4	♢	> 2	♡
♢	$\Rightarrow$	♠	$\Rightarrow$	♠	$\Rightarrow$	♡
♢		♠		♠		♡
♢		♠		♡		♡
♠		♠		♡		♡
♡		♡		♡		♡
$s1$		$s2$		$s3$		$s4$

Einfaches HMM

- Mit diesem HMM können zufällige Folgen von Karten erzeugt werden (nur Farbwerte).
- Ablauf:

1. Man beginnt mit Stapel *s*1.
2. Dann wird zufällig eine Karte aus dem aktuellen Stapel gezogen, die Farbe notiert und die Karte zurückgelegt.
3. Anschließend wird gewürfelt. Liegt das Ergebnis über dem in der Abbildung bei dem Stapel angegeben Wert, wechselt man zum nächsten Stapel. Ansonsten bleibt man bei dem aktuellen Stapel.
4. Jetzt geht man wieder zu Schritt 2.

Beispiel

Stapel	$s1$	$s1$	$s1$	$s2$	$s2$	$s3$	$\ldots$
Farbe	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	
Würfel	2	3	5	2	6	1	

Übertragung auf Sprachsignale

Zufallsexperiment		Sprachsignale
Kartenstapel	$\Leftrightarrow$	Laut
Farbwert	$\Leftrightarrow$	Merkmalsgröße

Zufallsexperiment		Sprachsignale		HMM
Kartenstapel	$\Leftrightarrow$	Laut	$\Leftrightarrow$	Zustand
Farbwert	$\Leftrightarrow$	Merkmalsgröße	$\Leftrightarrow$	Symbol

Modellparameter

$$e = (1,0,0,0)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{1\diamondsuit} = 0,4 & b_{1\heartsuit} = 0,1 & b_{1\spadesuit} = 0,1 & b_{1\clubsuit} = 0,4 \\ b_{2\diamondsuit} = 0,1 & b_{2\heartsuit} = 0,1 & b_{2\spadesuit} = 0,6 & b_{2\clubsuit} = 0,2 \\ b_{3\diamondsuit} = 0,4 & b_{3\heartsuit} = 0,3 & b_{3\spadesuit} = 0,2 & b_{3\clubsuit} = 0,1 \\ b_{4\diamondsuit} = 0,2 & b_{4\heartsuit} = 0,6 & b_{4\spadesuit} = 0,1 & b_{4\clubsuit} = 0,1 \end{pmatrix}$$

Vorwärts – Algorithmus

$$\alpha_n(i) = P(o_1, o_2, \ldots, o_n, S_n = i \mid \lambda)$$

$$\alpha_1(i) = e_i \cdot b_{io_1} \qquad 1 \le i \le N$$

$$\alpha_{n+1}(i) = b_{io_{n+1}} \cdot \sum_{j=1}^{N} \alpha_n(j) \cdot a_{ji} \qquad \begin{array}{l} 1 \le i \le N \\ 1 \le n \le T-1 \end{array}$$

$$P(o \mid \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_n(i) \cdot \beta_n(i) \quad \xrightarrow[n=T]{} \quad \boxed{P(o \mid \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)}$$

Auftrittswahrscheinlichkeiten

$$Y = \{\diamondsuit,\ \diamondsuit,\ \clubsuit,\ \spadesuit,\ \diamondsuit,\ \heartsuit,\ \heartsuit\}$$

q_4	0						
q_3	0						
q_2	0						
q_1	0,4						
	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$

$$\alpha_1(i) = e_i \cdot b_{io_1}$$

$$1 \leq i \leq 4$$

$$\alpha_1(1) = 1 \cdot 0.4 = 0.4$$

$$\alpha_1(2) = 0 \cdot 0.1 = 0$$

$$\alpha_1(3) = 0 \cdot 0.4 = 0$$

$$\alpha_1(4) = 0 \cdot 0.2 = 0$$

Auftrittswahrscheinlichkeiten

1. Verweilen im Zustand q_1: Wahrscheinlichkeit $0,4 \cdot a_{11} \cdot b_{1\diamondsuit} = 0,08$
2. Übergang von q_1 zu q_2: Wahrscheinlichkeit $0,4 \cdot a_{12} \cdot b_{2\diamondsuit} = 0,02$

q_4	0	0					
q_3	0	0					
q_2	0	0,02					
q_1	0,4	0,08					
	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$

Vorwärts – Variable – Zeitpunkt 2

q_4	0	0					
q_3	0	0					
q_2	0	0,02					
q_1	0,4	0,08					
	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$

$$\alpha_{n+1}(i) = b_{io_{n+1}} \cdot \sum_{j=1}^{N} \alpha_n(j) \cdot a_{ji} \qquad 1 \leq i \leq 4 \qquad 1 \leq n \leq 6$$

$$\alpha_2(1) = b_{1o_2} \cdot \sum_{j=1}^{4} \alpha_1(j) \cdot a_{j1} = b_{11} \text{¿} \sum_{j=1}^{4} \alpha_1(j) \cdot a_{j1}$$

$$\alpha_2(2) = b_{2o_2} \cdot \sum_{j=1}^{4} \alpha_1(j) \cdot a_{j2} = b_{21} \text{¿} \sum_{j=1}^{4} \alpha_1(j) \cdot a_{j2}$$

$$\alpha_2(1) = 0.4 \cdot (0.4 \cdot 0.5) = 0.08$$

$$\alpha_2(2) = 0.1 \cdot (0.4 \cdot 0.5) = 0.02$$

$$\alpha_2(3) = 0$$

$$\alpha_2(4) = 0$$

Auftrittswahrscheinlichkeiten

$$P(\diamondsuit, \diamondsuit, \clubsuit, Q_3 = q_2) = (P(\diamondsuit, \diamondsuit, Q_2 = q_1) \cdot a_{12} + P(\diamondsuit, \diamondsuit, Q_2 = q_2) \cdot a_{22}) \cdot b_{2\clubsuit}$$

beziehungsweise im konkreten Fall

$$P(\diamondsuit, \diamondsuit, \clubsuit, Q_3 = q_2) = (0,08 \cdot a_{12} + 0,02 \cdot a_{22}) \cdot b_{2\clubsuit} \quad .$$

q_4	0	0	0				
q_3	0	0	0,00067				
q_2	0	0,02	0,01067				
q_1	0,4	0,08	0,01600				
	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$

$$\left(0.08 \cdot \frac{1}{2} + 0.02 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot 0.2 = 0.01067$$

Vorwärts – Variable – Zeitpunkt 3

q_4	0	0	0				
q_3	0	0	0,00067				
q_2	0	0,02	0,01067				
q_1	0,4	0,08	0,01600				
	♢	♢	♣	♠	♢	♡	♡

$$\alpha_{n+1}(i) = b_{io_{n+1}} \cdot \sum_{j=1}^{N} \alpha_n(j) \cdot a_{ji} \qquad 1 \leq i \leq 4 \qquad 1 \leq n \leq 6$$

$$\alpha_3(1) = b_{1o_3} \cdot \sum_{j=1}^{4} \alpha_2(j) \cdot a_{j1} = b_{14}¿ \sum_{j=1}^{4} \alpha_2(j) \cdot a_{j1}$$

$$\alpha_3(1) = 0.4 \cdot (0.08 \cdot 0.5) = 0.016$$

$$\alpha_3(2) = b_{24} \cdot \sum_{j=1}^{4} \alpha_2(j) \cdot a_{j2}$$

$$\alpha_3(2) = 0.2 \cdot (0.08 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.67) = 0.01067$$

$$\alpha_3(3) = b_{34} \cdot \sum_{j=1}^{4} \alpha_2(j) \cdot a_{j3}$$

$$\alpha_3(3) = 0.1 \cdot (0.08 \cdot 0 + 0.02 \cdot 0.333) = 0.00067$$

Vorwärts – Algorithmus

q_4	0	0	0	,00004	,00011	,000590	,0004319
q_3	0	0	,00067	,00076	,00131	,000195	,0000246
q_2	0	0,02	,01067	,00907	,00064	,000051	,0000038
q_1	0,4	0,08	,01600	,00080	,00016	,000008	,0000004
	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$

$$P(o|\lambda)=\sum_{i=1}^{4}\alpha_7(i)=0.0004608$$

Viterbi – Algorithmus

$$\boxed{P^*(o|\lambda) = \max_{s \in S^T} P(s|o,\lambda) = P(s^*, o|\lambda)}$$

Optimale Zustandsfolge

Initialisierung und Rekursion

$$\delta_1(i) = \alpha_1(i) = e_i \cdot b_{io_1} \qquad 1 \le i \le N$$

$$\psi_1(i) = 0$$

$$\delta_{n+1}(i) = b_{io_{n+1}} \cdot \max_{j=1,\dots,N} \left\{ \delta_n(j) \cdot a_{ji} \right\} \qquad 1 \le i \le N$$

$$\psi_{n+1}(i) = \operatorname*{argmax}_{j=1,\dots,N} \left\{ \delta_n(j) \cdot a_{ji} \right\} \qquad 1 \le n \le T-1$$

Terminierung und Rückverfolgung

$$P^*(o|\lambda) = \max_{j=1,\ldots,N} \delta_T(j)$$

$$s_T^* = \operatorname*{argmax}_{j=1,\ldots,N} \delta_T(j)$$

$$s_n^* = \psi_{n+1}(s_{n+1}^*) \qquad 1 \le n \le T-1$$

Viterbi – Algorithmus

q_4	0	0	0	0,00004	0,00007	0,000256	0,0001536
q_3	0	0	0,00067	0,00053	0,00064	0,000640	0,0000064
q_2	0	0,02	0,00800	0,00480	0,00032	0,000021	0,0000014
q_1	0,4	0,08	0,01600	0,00080	0,00016	0,000008	0,0000004
	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$

$$\delta_1(i) = \alpha_1(i)$$

$$\delta_{n+1}(i) = b_{io_{n+1}} \cdot \max_{j=1,\ldots,4} \left\{ \delta_n(j) \cdot a_{ji} \right\}$$

$$\delta_2(i) = b_{io_2} \cdot \max_{j=1,\ldots,4} \left\{ \delta_1(j) \cdot a_{ji} \right\}$$

$$\delta_2(1) = 0.4 \cdot \max\{0.4 \cdot 0.5, 0, 0, 0\}$$

$$\delta_2(2) = 0.1 \cdot \max\{0.4 \cdot 0.5, 0, 0, 0\}$$

$$\delta_2(3) = 0.4 \cdot \max\{0, 0, 0, 0\}$$

$$\delta_2(4) = 0.2 \cdot \max\{0, 0, 0, 0\}$$

Viterbi – Algorithmus

q_4	0	0	0	0,00004	0,00007	0,000256	0,0001536
q_3	0	0	0,00067	0,00053	0,00064	0,000640	0,0000064
q_2	0	0,02	0,00800	0,00480	0,00032	0,000021	0,0000014
q_1	0,4	0,08	0,01600	0,00080	0,00016	0,000008	0,0000004
	♢	♢	♣	♠	♢	♡	♡

$$\delta_{n+1}(i) = b_{io_{n+1}} \cdot \max_{j=1,\ldots,4} \{\delta_n(j) \cdot a_{ji}\} \qquad \delta_3(i) = b_{io_3} \cdot \max_{j=1,\ldots,4} \{\delta_2(j) \cdot a_{ji}\}$$

$$\delta_3(1) = 0.4 \cdot \max\{0.08 \cdot 0.5, 0, 0, 0\}$$

$$\delta_3(2) = 0.2 \cdot \max\{0.08 \cdot 0.5, 0.02 \cdot 0.67, 0, 0\}$$

$$\delta_3(3) = 0.1 \cdot \max\{0.08 \cdot 0, 0.02 \cdot 0.33, 0, 0\}$$

$$\delta_3(4) = 0.1 \cdot \max\{0, 0, 0, 0\}$$

Hilfsvariable

4				3	3	3	4
3			2	2	2	3	3
2		1	1	1	2	2	2
1		1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7

$$\psi_{n+1}(i) = \underset{j=1,\ldots,4}{\operatorname{argmax}} \left\{ \delta_n(j) \cdot a_{ji} \right\}$$

$$\delta_2(1) = 0.4 \cdot \max\{0.4 \cdot 0.5, 0, 0, 0\}$$

$$\delta_2(2) = 0.1 \cdot \max\{0.4 \cdot 0.5, 0, 0, 0\}$$

$$\delta_2(3) = 0.4 \cdot \max\{0, 0, 0, 0\}$$

$$\delta_2(4) = 0.2 \cdot \max\{0, 0, 0, 0\}$$

Hilfsvariable

4				3	3	3	4
3			2	2	2	3	3
2		1	1	1	2	2	2
1		1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7

$$\psi_{n+1}(i) = \underset{j=1,\ldots,4}{\operatorname{argmax}} \left\{ \delta_n(j) \cdot a_{ji} \right\}$$

$$\delta_3(1) = 0.4 \cdot \max\left\{0.08 \cdot 0.5, 0, 0, 0\right\}$$

$$\delta_3(2) = 0.2 \cdot \max\left\{0.08 \cdot 0.5, 0.02 \cdot 0.67, 0, 0\right\}$$

$$\delta_3(3) = 0.1 \cdot \max\left\{0.08 \cdot 0, 0.02 \cdot 0.33, 0, 0\right\}$$

Hilfsvariable

4				3	3	3	4
3			2	2	2	3	3
2		1	1	1	2	2	2
1		1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7

q_4				$\swarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$
q_3			$\swarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
q_2		$\swarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
q_1	$\otimes$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$

Optimale Folge

4				3	3	3	4
3			2	2	2	3	3
2		1	1	1	2	2	2
1		1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7

q_4				$\swarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$
q_3			$\swarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
q_2		$\swarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
q_1	$\otimes$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$

$$s_7^* = \underset{j=1,\dots,4}{\operatorname{argmax}} \delta_7(j) = 4$$

$$s_6^* = \psi_7(s_7^*) = 4$$

$$s_5^* = \psi_6(s_6^*) = 3$$

$$s_4^* = \psi_5(s_5^*) = 2$$

$$s_n^* = \psi_{n+1}(s_{n+1}^*)$$

$$s_3^* = \psi_4(s_4^*) = 1$$

$$s_2^* = \psi_3(s_3^*) = 1$$

$$s_1^* = \psi_2(s_2^*) = 1$$

optimale Folge: $q_1,\ q_1,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_4$

Viterbi – Training

Optimale Zustandsfolge mit alten Parametern:

$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
q_1	q_1	q_1	q_2	q_3	q_4	q_4

$$a'_{11} = \frac{1 \rightarrow 1}{1 \rightarrow -} = \frac{2}{3} \qquad a'_{12} = \frac{1 \rightarrow 2}{1 \rightarrow -} = \frac{1}{3}$$

$$b'_{11} = \frac{1 \rightarrow 1}{1 \rightarrow -} = \frac{2}{3} \qquad b'_{12} = \frac{1 \rightarrow 2}{1 \rightarrow -} = \frac{0}{3} = 0 \qquad b'_{13} = \frac{1 \rightarrow 3}{1 \rightarrow -} = \frac{0}{3} = 0 \qquad b'_{14} = \frac{1 \rightarrow 4}{1 \rightarrow -} = \frac{1}{3}$$