Übung 5

Typenlogik

4 – Typenlogik – Syntax Konstanten

Typ e

peter_e johanna_e duden_e algebra_e

Typ $<e,t>$

$\text{schlafen}_{<e,t>}$ $\text{buch}_{<e,t>}$

Typ $<e,<e,t>>$

$\text{lesen}_{<e,<e,t>>}$

4 – Typenlogik – Syntax Variablen

x_e y_e

$P_{<e,t>}$ $Q_{<e,t>}$ → neu

4 – Typenlogik – Syntax – Terme

$x_e = \text{peter}_e$ Typ t (Formel)

$\text{lesen}_{<e,<e,t>>}(\text{duden}_e)$ Typ $<e,t>$

$\text{lesen}_{<e,<e,t>>}(\text{duden}_e)(x_e)$ Typ t

$x_e = \text{peter}_e \wedge \text{lesen}_{<e,<e,t>>}(\text{duden}_e)(x_e)$ Typ t

$\forall P_{\langle e,t \rangle}(P_{\langle e,t \rangle}(\text{peter}_e) \rightarrow P_{\langle e,t \rangle}(\text{johanna}_e))$ Typ t

5 – Typenlogik – Semantik

$$M = \langle A, V, D \rangle$$

$$V : K_\sigma \rightarrow D_\sigma$$

$$D = \{ D_\sigma : \sigma \in T, \quad D_\sigma \text{ - beliebige Menge} \}$$

$$D_e = A \qquad D_t = \{0,1\} \qquad D_{<\sigma,\tau>} = D_\tau^{D_\sigma}$$

$$D_{<e,t>} = \{ f : D_e \rightarrow D_t = \{0,1\} \}$$

$$D_e = A = \{ \text{Peter,Hans,Johanna,Duden,AlgebraII} \}$$

5 – Typenlogik – Semantik

$$V : K_e \rightarrow D_e$$

$$V(\text{peter}_e) = \text{Peter}$$

$$V(\text{johanna}_e) = \text{Johanna}$$

$$V(\text{duden}_e) = \text{Duden}$$

$$V(\text{algebra}_e) = \text{AlgebraII}$$

5 – Typenlogik – Semantik

$$V : K_{<e,t>} \rightarrow D_{<e,t>}$$

$$V(\mathbf{schlafen}_{<e,t>}) = f_1 : D_e \rightarrow \{0,1\}$$

$$V(\mathbf{buch}_{<e,t>}) = f_2 : D_e \rightarrow \{0,1\}$$

f_1: Peter → 1
Hans → 0
Johanna → 0
Duden → 0
AlgebraII → 0

f_2: Peter → 0
Hans → 0
Johanna → 0
Duden → 1
AlgebraII → 1

Schreibweise:

$$V(\mathbf{schlafen}_{<e,t>}) = \{\mathbf{Peter}\}$$

$$V(\mathbf{buch}_{<e,t>}) = \{\mathbf{Duden}, \mathbf{AlgebraII}\}$$

5 – Typenlogik – Semantik

$$V : K_{<e,<e,t>>} \rightarrow D_{<e,<e,t>>}$$

$$V\left(\text{lesen}_{<e,<e,t>>}\right) = f_3 : D_e \rightarrow D_{<e,t>}$$

$$f_3 : \text{Duden} \rightarrow \{\text{Peter}, \text{Johanna}\}$$

$$\text{AlgebraII} \rightarrow \{\text{Hans}\}$$

$$\text{Peter} \rightarrow \emptyset$$

$$\text{Johanna} \rightarrow \emptyset$$

$$\text{Hans} \rightarrow \emptyset$$

λ – Abstraktion und λ – Konversion

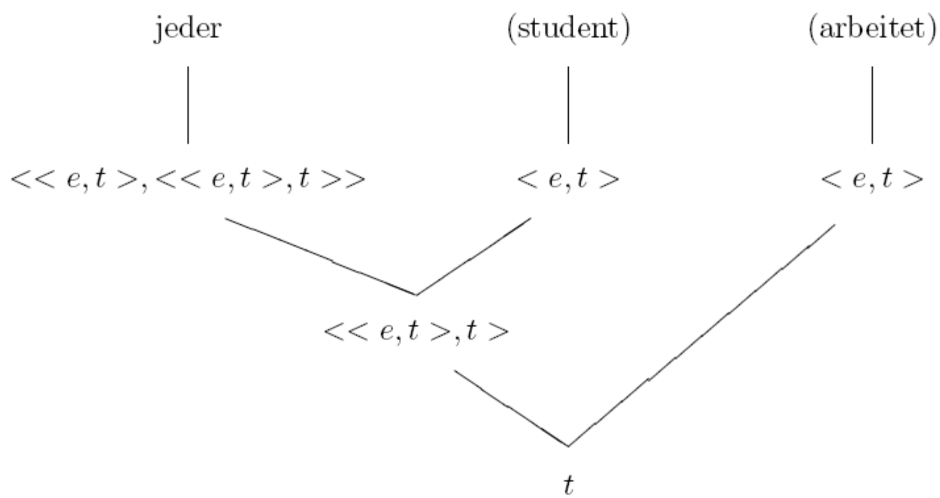
Repräsentation – jeder

$$\lambda F \lambda G \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

$x \in Var_e$

t

$< e,t >$



Repräsentation – (mindestens) ein

$$\lambda F \lambda G \exists x(F(x) \wedge G(x))$$

$x \in Var_e$

t

$< e,t >$

Beispiel 1

Jeder Student hat ein Problem.

$$\lambda P \lambda Q \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))(\text{student})(\text{hat ein problem})$$

hat ein Problem

$$\lambda z \lambda R \lambda S \exists y(R(y) \wedge S(y))(\text{problem})(\lambda u\ \text{hat}(u)(z))$$

hat_z

Beispiel 1

Jeder Student hat ein Problem.

$$\lambda P \lambda Q \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))(\text{student})(\text{hat ein problem})$$

$$\lambda z \lambda R \lambda S \exists y(R(y) \wedge S(y))(\text{problem})(\lambda u\, \text{hat}(u)(z))$$

$$\lambda P \lambda Q \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))(\text{student})(\lambda z \lambda R \lambda S \exists y(R(y) \wedge S(y))(\text{problem})(\lambda u\, \text{hat}(u)(z)))$$

Beispiel 1 – Konversion

Jeder Student hat ein Problem.

$$\lambda P \lambda Q \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))(\text{student})(\lambda z \lambda R \lambda S \exists y (R(y) \wedge S(y))(\text{problem})(\lambda u \, \text{hat}(u)(z)))$$

$$\lambda P \rightarrow \text{student}$$

$$\lambda Q \rightarrow (\lambda z \lambda R \lambda S \exists y (R(y) \wedge S(y))(\text{problem})(\lambda u \, \text{hat}(u)(z)))$$

$$\forall x (\text{student}(x) \rightarrow \lambda z \lambda R \lambda S \exists y (R(y) \wedge S(y))(\text{problem})(\lambda u \, \text{hat}(u)(z))(x))$$

Beispiel 1 – Konversion

$$\forall x(\text{student}(x) \rightarrow \lambda z \lambda R \lambda S \exists y(R(y) \wedge S(y))(\text{problem})(\lambda u\, \text{hat}(u)(z))(x))$$

$$\lambda z \rightarrow x$$

$$\Rightarrow$$

$$\forall x(\text{student}(x) \rightarrow \lambda R \lambda S \exists y(R(y) \wedge S(y))(\text{problem})(\lambda u\, \text{hat}(u)(x)))$$

$$\lambda R \rightarrow \text{problem}$$

$$\lambda S \rightarrow \lambda u\, \text{hat}(u)(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$\forall x(\text{student}(x) \rightarrow \exists y(\text{problem}(y) \wedge \lambda u\, \text{hat}(u)(x)(y)))$$

$$\lambda u \rightarrow y \quad \Rightarrow \quad \forall x(\text{student}(x) \rightarrow \exists y(\text{problem}(y) \wedge \text{hat}(y)(x)))$$

Beispiel 2

Ein Problem hat jeder Student.

$$\lambda P \lambda Q \, \exists y \left(P(y) \wedge Q(y) \right) (\text{problem}) \left(\lambda z \lambda R \lambda S \, \forall x \left(R(x) \rightarrow S(x) \right) (\text{student}) \left(\lambda u \; \text{hat}(z)(u) \right) \right)$$

Konversion:

$$\exists y \left(\text{problem}(y) \wedge \lambda z \lambda R \lambda S \, \forall x \left(R(x) \rightarrow S(x) \right) (\text{student}) \left(\lambda u \; \text{hat}(z)(u) \right) (y) \right)$$

$$\exists y \left(\text{problem}(y) \wedge \lambda R \lambda S \, \forall x \left(R(x) \rightarrow S(x) \right) (\text{student}) \left(\lambda u \; \text{hat}(y)(u) \right) \right)$$

$$\exists y \left(\text{problem}(y) \wedge \forall x \left(\text{student}(x) \rightarrow \lambda u \; \text{hat}(y)(u)(x) \right) \right)$$

$$\exists y \left(\text{problem}(y) \wedge \forall x \left(\text{student}(x) \rightarrow \text{hat}(y)(x) \right) \right)$$