5.4 Die Prädikatenlogik 1.Stufe als Semantikformalismus

5.4.1 Einführung

Einführung

- Verwendet wird die Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität (ohne Funktionskonstanten) mit dem folgenden Inventar:
- logische Konstanten
  - Junktoren (w,f,→,↔,⌐,…)
  - Quantoren
  - Identitätszeichen (=)
- Individuenvariablen *x, y, z,…*
- nicht logische Konstanten
  - Individuenkonstanten
  - n – stellige Relationskonstanten ($n \geq 0$)

Sprachtyp (Sprache)

$$L = \langle R, K, s \rangle$$

R Menge der Relationszeichen

$$K \cap R = \emptyset$$

K Menge der (Individuen)konstanten

$$s(Q) = n, \quad n \geq 0 \text{ (ganzzahlig)}, \quad Q \in R$$

Var Menge aller Variablen

$Tm = Var \cup K$ Terme

Wortformen

Die einfachste Form der semantischen Analyse natürlich-sprachlicher Ausdrücke sieht so aus, dass zunächst lexikalische Ausdrücke (Wortformen) kategorisiert werden, indem ihnen nicht-logische Konstanten zugeordnet werden.

- *Individuenkonstanten:* Hans, Peter, Chemnitz, Italien
- *0-stellige Relationskonstanten (Satzkonstanten):* (es) regnet
- *1-stellige Relationskonstanten (Prädikatkonstanten):* student, verheiratet, arbeitet
- *2-stellige Relationskonstanten:* Vater von, kennt, hinter, ähnlich, größer als
- *3-stellige Relationskonstanten:* gibt, zwischen
- *4-stellige Relationskonstanten:* näher bei, ähnlicher als

Formeln – Satzbedeutungen

$\boxed{t_1 = t_2}$ $\quad t_1, t_2 - \text{Terme}$

$\boxed{Q(t_1, t_2, \ldots t_n)}$ $\quad t_1, t_2, \ldots t_n - \text{Terme} \quad Q \in R,\ s(Q) = n$

$\boxed{w, f, \neg\alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)}$

$\boxed{\forall x \alpha, \exists x \alpha}$

Formeln

Variable

Beispiele

Hans ist Peter ähnlicher als Anna Maria.

$$\mathrm{aehnlicher\_als}(\mathrm{Hans}, \mathrm{Peter}, \mathrm{Anna}, \mathrm{Maria})$$

Jeder Student arbeitet.

$$\forall x(\mathrm{student}(x) \rightarrow \mathrm{arbeitet}(x))$$

Hans und Peter sind Studenten.

$$\mathrm{student}(\mathrm{Hans}) \wedge \mathrm{student}(\mathrm{Peter})$$

Hans und Peter sind Freunde.

$$\mathrm{freund}(\mathrm{Hans}, \mathrm{Peter}) \wedge \mathrm{freund}(\mathrm{Peter}, \mathrm{Hans})$$

Beispiele

Jeder Student hat ein Problem.

$$\forall x(\mathrm{student}(x) \rightarrow \exists y(\mathrm{problem}(y) \wedge \mathrm{hat}(x, y)))$$

Alle Studenten haben ein Problem.

$$\exists y(\mathrm{problem}(y) \wedge \forall x(\mathrm{student}(x) \rightarrow \mathrm{hat}(x, y)))$$

Nur Peter ist intelligent.

$$\mathrm{intelligent}(\mathrm{Peter}) \wedge \forall x(x \neq \mathrm{Peter} \rightarrow \neg\mathrm{intelligent}(x))$$

5.4.2 Semantik und Modellstrukturen

Struktur

$$L = \langle R, K, s \rangle$$ Sprache

$$\boxed{M = \langle A, I \rangle}$$

nichtleere Menge
(Individuenbereich)

Funktion mit Definitionsbereich $R \cup K$

$$I(Q) \subset A^n, \quad Q \in R, \quad s(Q) = n$$

$$Q^M = I(Q)$$

$$I(c) \in A, \quad c \in K$$

$$c^M = I(c)$$

Belegung

$$h : Var \rightarrow A$$

Belegung der Individuenvariablen in einer Menge *A*

*Eine Belegung h' in A heißt x-***Variante einer Belegung** *h* **in** *A , falls h und h' auf allen Variablen, die von x verschieden sind, übereinstimmen.*

Ist a ein Element von A und h eine Belegung in A, so bezeichnen wir mit h^x_a diejenige x-Variante von h, die der Variablen x das Element a aus A zuordnet, d.h. es gilt für alle Variablen y:

$$h^x_a(y) = \begin{cases} h(y), & falls \quad y \neq x \\ a, & falls \quad y = x. \end{cases}$$

Jede x-Variante h' einer Belegung h in A ist offenbar von der Gestalt h^x_a.

Wert eines Terms

$$[\![t]\!]^{M,h} = \begin{cases} h(t), & t \in Var \\ I(t), & t \in K \end{cases}$$

$$[\![t]\!]^{M,h} = t^{M,h}$$

Wahrheitswert einer Formel

$[\![\alpha]\!]^{M,h}$ Wahrheitswert einer Formel α in der Struktur *M* unter der Belegung *h* in *A*

$[\![w]\!]^{M,h} = 1$ $[\![f]\!]^{M,h} = 0$

$$[\![t_1 = t_2]\!]^{M,h} = \begin{cases} 1 & t_1^{M,h} = t_2^{M,h} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$[\![Q(t_1, t_2, \ldots, t_n)]\!]^{M,h} = \begin{cases} 1 & < t_1^{M,h}, t_2^{M,h}, \ldots, t_n^{M,h} > \in I(Q) \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Wahrheitswert einer Formel

$$[\![\neg\alpha]\!]^{M,h} = f_{\neg}\left([\![\neg\alpha]\!]^{M,h}\right)$$

$$[\![\alpha \wedge \beta]\!]^{M,h} = f_{\wedge}\left([\![\alpha]\!]^{M,h}, [\![\beta]\!]^{M,h}\right)$$

$$[\![\alpha \vee \beta]\!]^{M,h} = f_{\vee}\left([\![\alpha]\!]^{M,h}, [\![\beta]\!]^{M,h}\right)$$

$$[\![\alpha \rightarrow \beta]\!]^{M,h} = f_{\rightarrow}\left([\![\alpha]\!]^{M,h}, [\![\beta]\!]^{M,h}\right)$$

$$[\![\alpha \leftrightarrow \beta]\!]^{M,h} = f_{\leftrightarrow}\left([\![\alpha]\!]^{M,h}, [\![\beta]\!]^{M,h}\right)$$

Dabei sind $f_{\neg}, f_{\wedge}, f_{\vee}, f_{\rightarrow}, f_{\leftrightarrow}$
die üblichen aussagenlogischen Funktionen über den Wahrheitswerten 1 und 0.

Wahrheitswert einer Formel

$$[[\forall x\alpha]]^{M,h} = \begin{cases} 1, & \textit{falls für alle } x\textit{-Varianten } h' \textit{ von } h \textit{ in } A \textit{ gilt:} \quad [[\alpha]]^{M,h'} = 1 \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$[[\forall x\alpha]]^{M,h} = 1 \Leftrightarrow \forall a \in A: [[\alpha]]^{M,h_a^x} = 1$$

$$[[\exists x\alpha]]^{M,h} = \begin{cases} 1, & \textit{falls es eine } x\textit{-Variante } h' \textit{ von } h \textit{ in } A \textit{ gibt mit:} \quad [[\alpha]]^{M,h'} = 1 \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$[[\exists x\alpha]]^{M,h} = 1 \Leftrightarrow \exists a \in A: [[\alpha]]^{M,h_a^x} = 1$$

Formel und Struktur

$$M \models \alpha[h] \leftrightarrow [\![\alpha]\!]^{M,h} = 1$$

α gilt in *M* unter *h*

$$M \models \forall x \alpha[h] \leftrightarrow \text{für alle } a \in A \text{ gilt:} \quad M \models \alpha[h^x_a]$$
$$M \models \exists x \alpha[h] \leftrightarrow \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit:} \quad M \models \alpha[h^x_a]$$

$$M \models \beta \leftrightarrow M \models \beta[h] \ \forall h$$

Gültigkeit von *β* in *M*

Beispiel

$$L = \left\langle \{Q\}, \varnothing, \{\langle Q, 2\rangle\} \right\rangle$$

das zweistellige Relationszeichen *Q* ist das einzige nicht-logische Zeichen von *L*

$$M = \langle N, I \rangle$$

$$I(Q) = \{< m, n > \in N^2 : m \leq n\}$$

$$h(x) = 0, \ \forall \mathrm{x}$$

Formel: $\forall x Q(y, x)$ erhält in *M* unter *h* den Wert 1

$$\begin{aligned}
M \models \forall x Q(y,x)[h] &\leftrightarrow \forall a \in N : M \models Q(y,x)\left[h_a^x\right] \\
&\leftrightarrow \forall a \in N : < h_a^x(y), h_a^x(x) > \in I(Q) \\
&\leftrightarrow \forall a \in N : < 0, a > \in I(Q) \\
&\leftrightarrow \forall a \in N : 0 \leq a
\end{aligned}$$

Beispiel

Nur Peter ist intelligent.

$$
\begin{aligned}
&\textit{Dann gilt:}\\
&[[\textbf{intelligent}\ (\ \textbf{Peter}\ ) \wedge \forall x (x \neq \textbf{Peter} \rightarrow \neg\ \textbf{intelligent}\ (x))]]^{M,h} = 1\\
&\textit{gdw.}\\
&I(\ \textbf{Peter}\ ) \in I(\ \textbf{intelligent}\ ) \quad und \quad f\ddot{u}r \quad alle \quad a \in A \quad gilt:\\
&wenn \quad a \neq I(\ \textbf{Peter}\ ) \quad so \quad a \neq I(\ \textbf{intelligent}\ )
\end{aligned}
$$

Der Wahrheitswert hängt hier nicht von der Belegungsfunktion *h* ab. Dies gilt für alle Aussagen, d.h. Formeln, deren Variablen sämtlich von Quantoren gebunden sind.

Modell

Σ Formelmenge

M Struktur

$$\boxed{M \models \Sigma \leftrightarrow \forall \sigma \in \Sigma : M \models \sigma}$$

M Modell von Σ

Folgerung

$$\boxed{\Sigma \models \alpha}$$

Formelmenge

Formel

$$\forall M : M \models \Sigma \rightarrow M \models \alpha$$

Struktur

Formel gilt in diesem Modell

Modell der Formelmenge

Ableitung – Inferenz

$\Sigma \models \alpha$

$\Sigma \vdash \alpha$

Folgerung

Ableitung mit Inferenzregeln

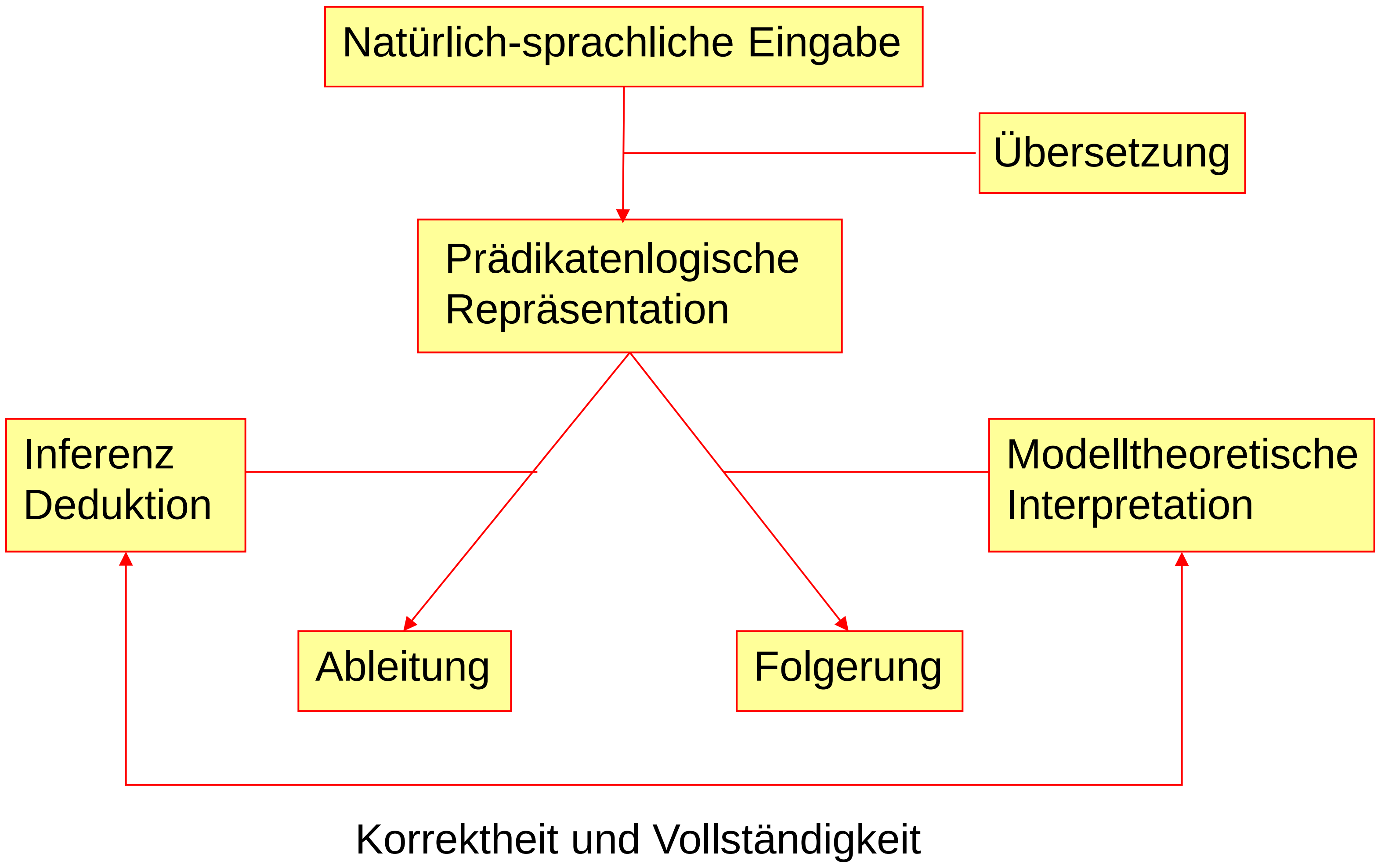
korrekt

$\longleftarrow$

vollständig

$\longrightarrow$

Semantische Analyse mit den Mitteln der Prädikatenlogik erster Stufe



5.4.3 Probleme

Schwachstellen

- Das Problem der Übersetzung natürlichsprachlicher Sätze in Formeln ist völlig offen.
  - λ – Kalkül
- Die Syntax der Prädikatenlogik ist nicht reich und flexibel genug für Bedeutungsstrukturen natürlicher Sprache.
  - Typenlogik
- Substitutionsprinzip
  - In einer Formel dürfen denotatgleiche Ausdrücke füreinander ersetzt werden, ohne dass sich das Denotat des Gesamtausdrucks ändert. Bei der Anwendung auf natürliche Sprache treten Schwierigkeiten auf.

Beispiel

Dieser Wagen fährt schnell.

$$\text{faehrt}(\text{wagen}) \wedge \text{schnell}(\text{wagen})$$

Dieser Wagen rostet schnell.

$$\text{rostet}(\text{wagen}) \wedge \text{schnell}(\text{wagen})$$

Peter ist leidenschaftlicher Informatiker.

$$\text{informatiker}(\text{Peter}) \wedge \text{leidenschaftlich}(\text{Peter})$$

Offenbar haben ***schnell*** und ***leidenschaftlich*** nicht den Status von Prädikaten, die auf Individuen angewandt werden. Ihre semantische Funktion besteht vielmehr darin, dass sie die Bedeutung eines anderen Prädikates modifizieren. Für Ausdrücke dieses Typs ist in der Prädikatenlogik kein Platz. Alle nicht-logischen Ausdrücke müssen als Individuenkonstanten oder als n-stellige Relationskonstanten kategorisiert werden.

Beispiel

*Dieser Wagen rostet **ziemlich** schnell.*

*Peter ist ein **sehr** guter Informatiker.*

Hier haben die Wörter *sehr* und *ziemlich* offenbar die Funktion, Prädikatsmodifikatoren zu modifizieren.

Eine generelle und systematische Methode zur Lösung dieser Probleme bietet die **Typenlogik** an.

Beispiel

Die Bundeskanzlerin hat die Richtlinienkompetenz.
Die Bundeskanzlerin ist Angela Merkel.
Angela Merkel hat die Richtlinienkompetenz.

Die Bundeskanzlerin hat ***immer*** *die Richtlinienkompetenz.*
Die Bundeskanzlerin ist Angela Merkel.
Angela Merkel hat ***immer*** *die Richtlinienkompetenz. ???*

5.5 Der Semantikformalismus von MONTAGUE – Typenlogik

5.5.1 Mathematische Grundlagen

Typenlogik

In der Typenlogik betrachten wir neben der **Individuenmenge A** und den **Wahrheitswerten {0,1}** nur **einstellige Funktionen**. Diese Einschränkung ist ohne Verlust an Ausdruckskraft möglich, da, wie im folgenden gezeigt wird, jede n-stellige Relation als n-stellige Funktion in die Menge {0,1} aufgefasst werden kann und jeder n-stelligen Funktion eine einstellige Funktion entspricht.

Relation – Funktion

Menge aller Funktionen von *B* nach *C*: $$C^B = \{G : G : B \to C\}$$

$$R \subset A^n \longrightarrow F_R : A^n \to \{0,1\}$$

$$F_R(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} 1 & < a_1, \ldots, a_n > \in R \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$F : A^n \to \{0,1\} \longrightarrow R_F \subset A^n$$

$$R_F = \{< a_1, \ldots, a_n >: F(a_1, \ldots, a_n) = 1\}$$

Relation – Funktion

$$R \subset A^n \qquad F_R : A^n \to \{0,1\} \qquad F_R(a_1,\dots,a_n) = \begin{cases} 1 & <a_1,\dots,a_n> \in R \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$F : A^n \to \{0,1\} \qquad R_F \subset A^n \qquad R_F = \{<a_1,\dots,a_n>: F(a_1,\dots,a_n) = 1\}$$

Offensichtlich sind diese Zuordnungen invers zueinander.

$$R = R_{(F_R)} \quad \forall R \subset A^n$$

$$F = F_{(R_F)} \quad \forall F \subset A^n \to \{0,1\}$$

Damit haben wir eine eineindeutige Zuordnung zwischen den n-stelligen Relationen und den n-stelligen Funktionen mit Wertebereich {0,1} geschaffen.

Funktionen

Mehrstellige Funktionen lassen sich in natürlicher Weise als einstellige Funktionen auffassen. Wir demonstrieren dies am Beispiel einer zweistelligen Funktion *F* von *A x B* in *C*.

$$F : A \times B \to C \quad \longrightarrow \quad F' : A \to C^B$$

$$F'(a) = F_a \qquad F_a : B \to C \qquad F_a(b) = F(a,b) \qquad a \in A$$

$$(F'(a))(b) = F_a(b) = F(a,b) \in C$$

Aus F erhält man somit die einstellige Funktion F‘.

Funktionen

$$G : A \to C^B \qquad \longrightarrow \qquad G'' : A \times B \to C$$

$$G''(a,b) = (G(a))(b)$$

es gilt: $\quad F = (F')'' \qquad G = (G'')'$

Die '-Abbildung ist damit eine Bijektion von $C^{(A \times B)}$ *auf* $\left(C^B\right)^A$

Jeder zweistelligen Funktion entspricht somit eineindeutig eine einstellige Funktion. Anschaulich wendet man nacheinander die Argumente *a* und *b* an.

Funktionen

$$F \in B^{(A_0 \times \ldots \times A_n)} \longrightarrow F' \in \left(\ldots \left(B^{A_n} \right)^{\ldots A_0} \right)$$

$$(\ldots((F'(a_0))(a_1))\ldots)(a_n) = F(a_1, \ldots, a_n) \quad f\ddot{u}r \quad alle \quad a_0 \in A_0, \ldots, a_n \in A_n$$

(Induktion)

Beispiel

$$R \subset A \times A \longrightarrow F_R : A \times A \to \{0,1\}$$

$$F_R \in \{0,1\}^{(A \times A)}$$

$$\downarrow$$

$$F_R^{'} \in \left(\{0,1\}^A\right)^A$$

Typenlogik – Idee

Im folgenden gehen wir von einer nichtleeren Menge *A* von Individuen aus und betrachten neben den Elementen von *A* und den Wahrheitswerten 0 und 1 alle einstelligen Funktionen, die in den folgenden Mengen liegen.

$$\{0,1\}^{\{0,1\}}$$

$$A^{\{0,1\}}$$

$$\{0,1\}^A$$

$$A^A$$

$$\{0,1\}^{\{0,1\}^{\{0,1\}}}$$

$$\vdots$$

Wir klassifizieren diese Objekte anhand ihres Typs.

5.5.2 Definition der Typen

Elementare Typen

- ***e*** als Typ der Individuen *A* (z.B. Eigennamen)
- ***t*** als Typ der Wahrheitswerte 0 und 1 (Typ von Sätzen, die einen Wahrheitswert den haben)

Komplexe Typen

- Aus den beiden elementaren Typen ergibt sich rekursiv die Menge der komplexen Typen:

σ - Typ der Elemente aus B

τ - Typ der Elemente aus C

$<\sigma,\tau>$ - Typ der Elemente aus C^B

(Funktionen von B nach C)

Beispiel

$$\boxed{< e, t >}$$

Typ der Funktionen von A nach {0,1}

Deutung als Prädikatkonstanten
(Student, verheiratet, arbeitet) bzw. als
Eigenschaften von Individuen

Beispiel

$$< e, < e, t >>$$

Typ der Elemente von $\left(\{0,1\}^{A}\right)^{A}$ (zweistellige Relationen in A)

Deutung als zweistellige Relationskonstanten *(kennt, größer als)*

Ein < e,< e,t >> wie **kennt** nimmt zunächst ein e (z.B. Maria) und ergibt das einstellige Prädikat **kennt (Maria)** (Typ < e,t >), das sich dann mit einem weiteren Individuum zu einem Wahrheitswert (Typ t) verbindet.

Beispiel

$$\boxed{< t,t >}$$

Typ der Funktionen von {0,1} nach {0,1}

Deutung als Satzmodifikator *(gestern, immer)*

Beispiel

$$< e, < t, t >>$$

Typ der Elemente von $\left(\{0,1\}^{\{0,1\}}\right)^{A}$

Deutung als Präpositionen:
eine Präposition wie **in** nimmt einen Ausdruck vom Typ e (z.B. **Hamburg**) und ergibt einen Satzmodifikator (**in(Hamburg)**)

Beispiel

$$<<e,t>,t>$$

Deutung als Prädikatenprädikate *(z.B. jeder_student)*

Beispiel

$$<<e,t>,<<e,t>,t>$$

Deutung als zweistellige Relation zwischen Prädikaten:
(z.B. jeder, (mindestens)ein, kein, mindestens drei, genau sieben, die meisten).
Man spricht auch von verallgemeinerten Quantoren *.*

Beispiel

$$<<e,t>,<e,t>>$$

Deutung als Adjektive*(als Prädikatsmodifikatoren)*

Beispiel

$$<<<e,t>,<e,t>>,<<e,t>,<e,t>>>$$

Deutung als Gradmodifikatoren (sehr, ziemlich);
sie nehmen einen Prädikatsmodifikator (z.B. gut) und
bilden mit ihm einen neuen (sehr(gut)).

Bezeichnungen

T Menge aller Typen

$Var_\sigma = \{x^\sigma, y^\sigma, \ldots\}$ Menge aller Variablen des Typs σ

$Var = \bigcup \{Var_\sigma : \sigma \in T\}$

$K_\sigma = \{c^\sigma, c_1^\sigma, \ldots\}$ Menge aller Konstanten des Typs σ
(möglicherweise leer)

5.5.3 Terme

Terme

- wir definieren nun (getypte) Terme
- dabei ist zu beachten, dass Formeln als Terme des Typs *t* aufgefasst werden
- Formeln werden durch

$$\alpha, \beta, \ldots$$

angedeutet

Terme

Jede Variable und jede Konstante vom Typ σ ist ein Term des Typs σ.

t_1 Term des Typs $<\sigma,\tau>$

t_2 Term des Typs σ

$\Rightarrow$ $t_1(t_2)$ Term des Typs τ

neu

t_1, t_2 Terme des Typs σ $\Rightarrow$ $t_1 = t_2$ Term des Typs t (Formel)

neu

$w, f, \neg\alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ Formeln

α Formel $x \in Var_\sigma$ $\Rightarrow$ $\forall x\alpha,\ \exists x\alpha$ - Formeln

neu

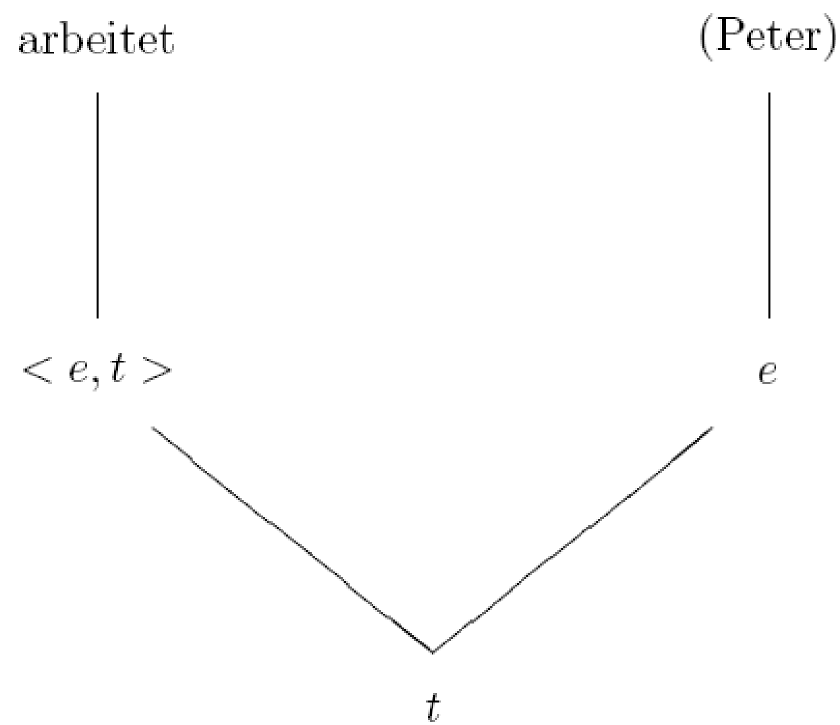
Bemerkung

$$Tm_\sigma = \left\{ t^\sigma, t_1^\sigma, \ldots \right\}$$ Menge aller Terme des Typs σ

- neu im Vergleich zur Prädikatenlogik 1.Stufe sind der 2., 3. und 5. Bestandteil dieser Definition
- Die Identitätsrelation kann nicht nur Individuenterme, sondern beliebige Ausdrücke identischen Typs verknüpfen. Zum Beispiel lässt sich die Äquivalenzbeziehung zwischen zwei Sätzen *A* und *B* (Typ t) einfach durch *A* = *B* wiedergeben.
- Die Quantoren können Variablen beliebigen Typs binden.

Beispiel

Peter **arbeitet**. *(einstellige Prädikate)*



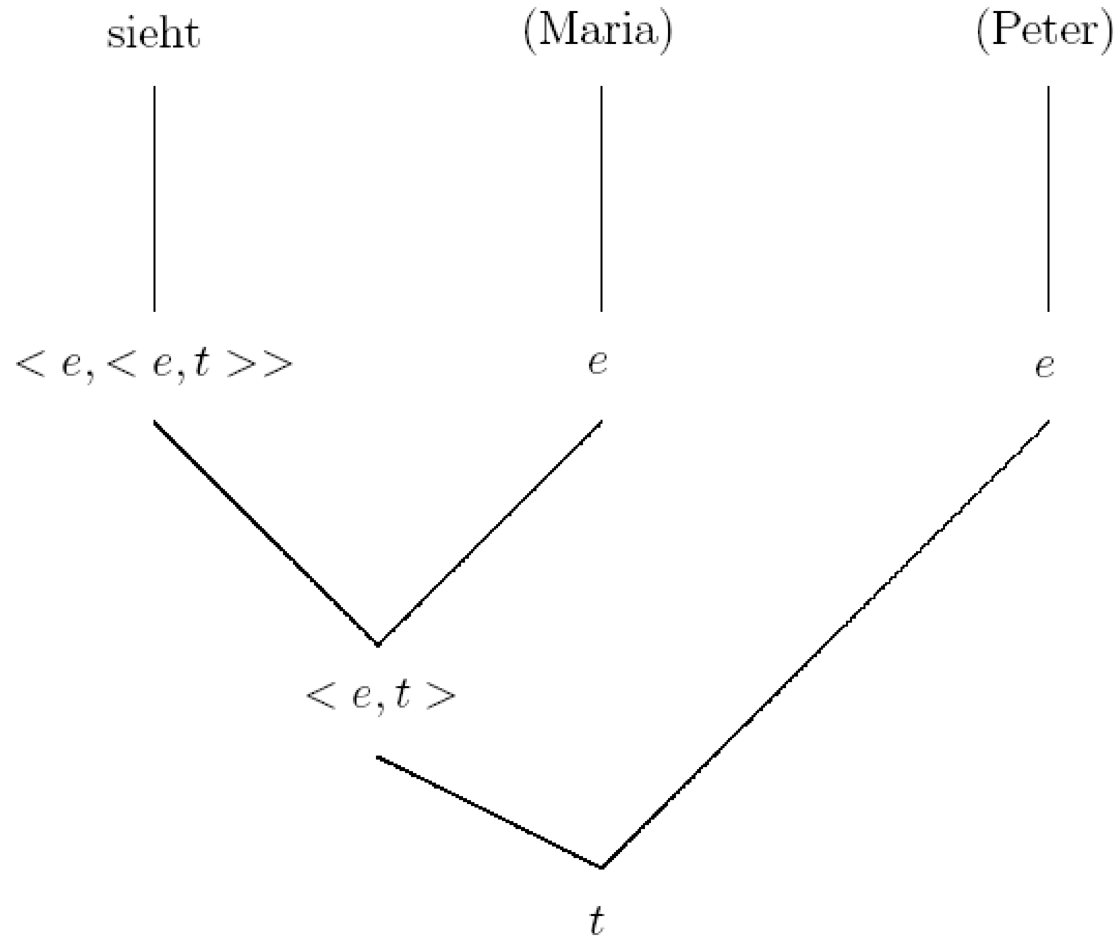
t_1 Term des Typs $< \sigma, \tau >$

t_2 Term des Typs σ

$\Rightarrow$ $t_1(t_2)$ Term des Typs τ

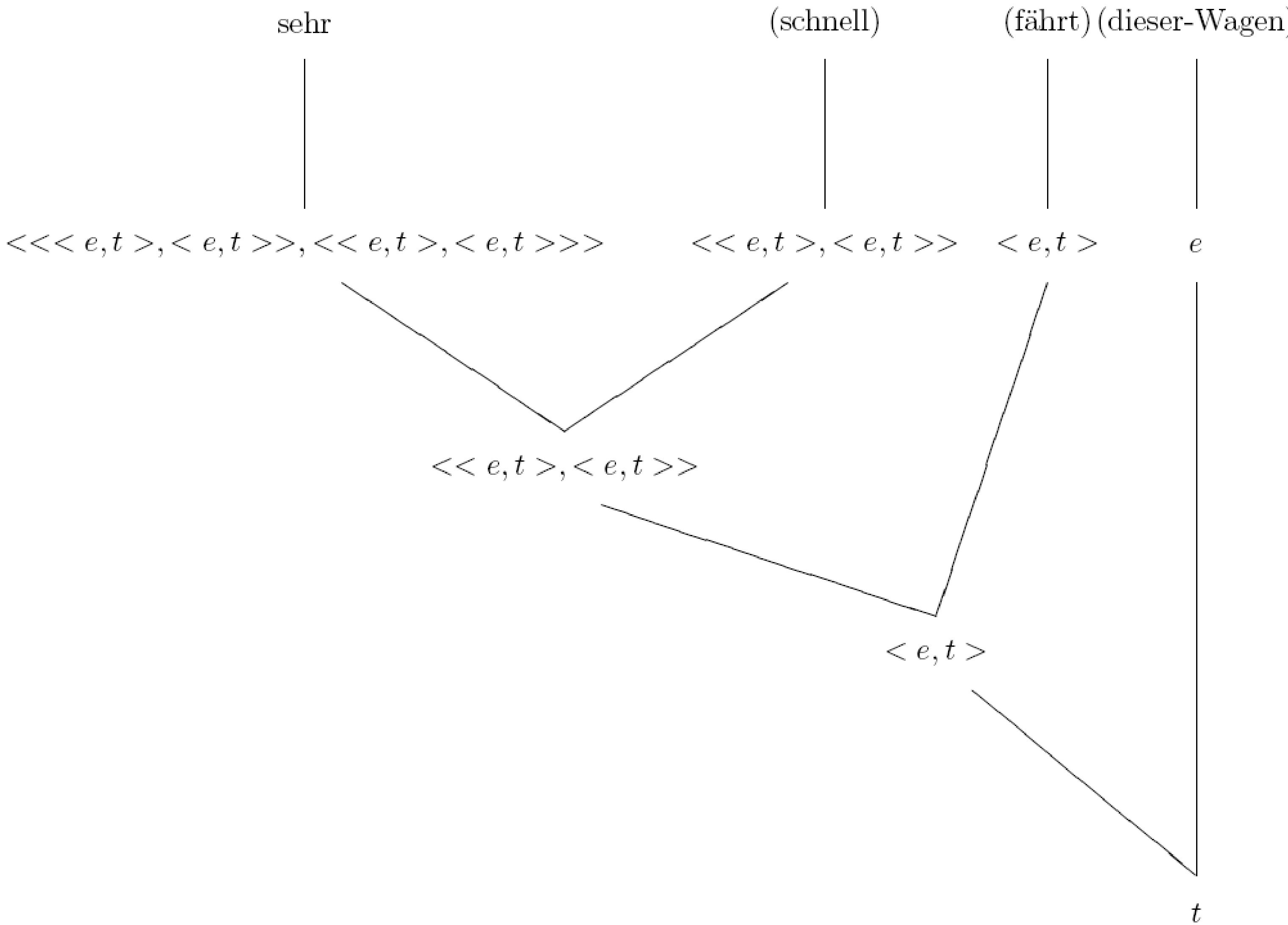
Beispiel

Peter **sieht** *Maria. (zweistellige Prädikate)*



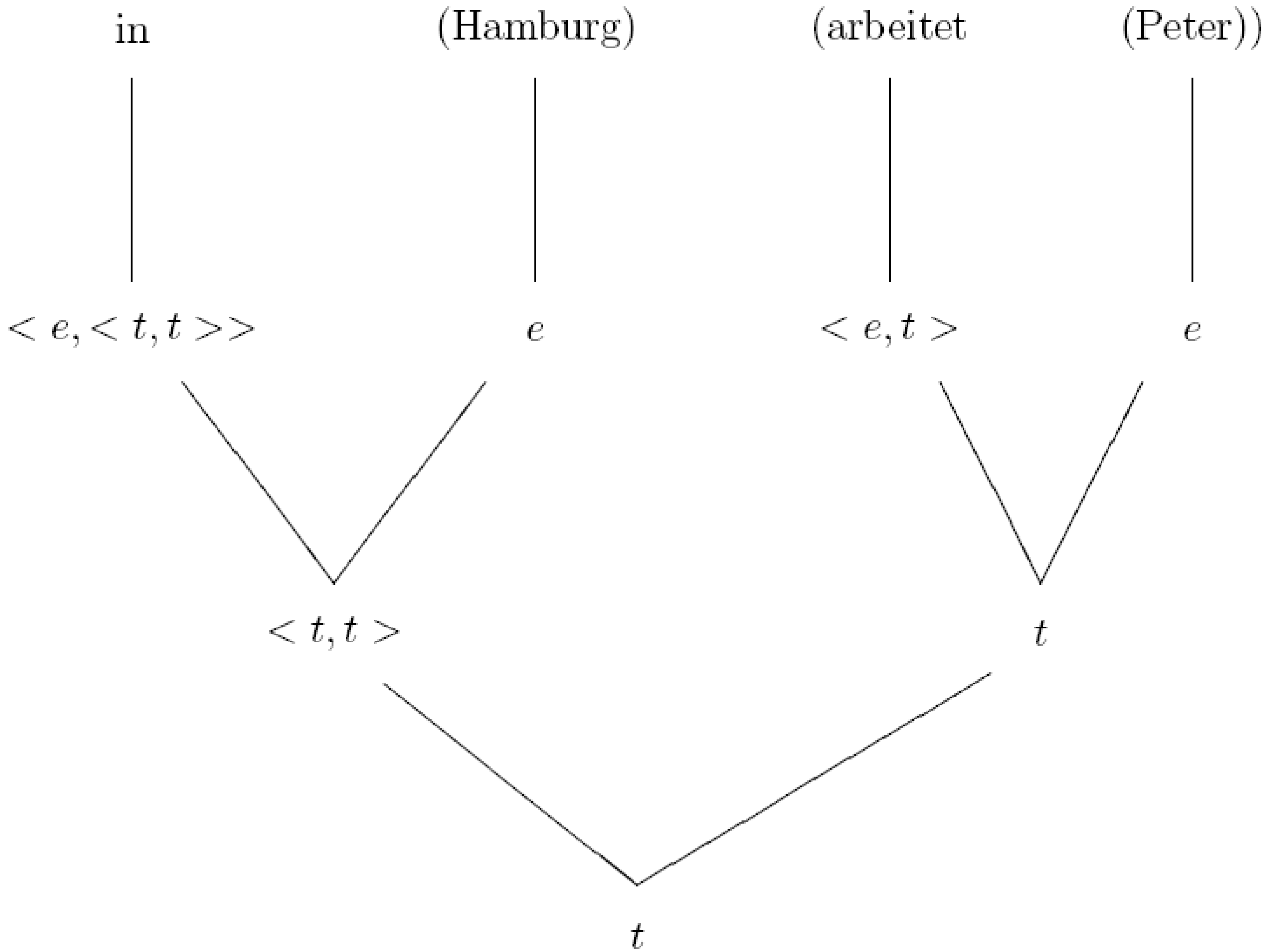
Beispiel

Dieser Wagen fährt **sehr** *(Gradmodifikatoren)* **schnell** *(Adjektive).*



Beispiel

Peter arbeitet **in** *(Präposition)* **Hamburg** *(in Hamburg - Satzmodifikator).*



Beispiel

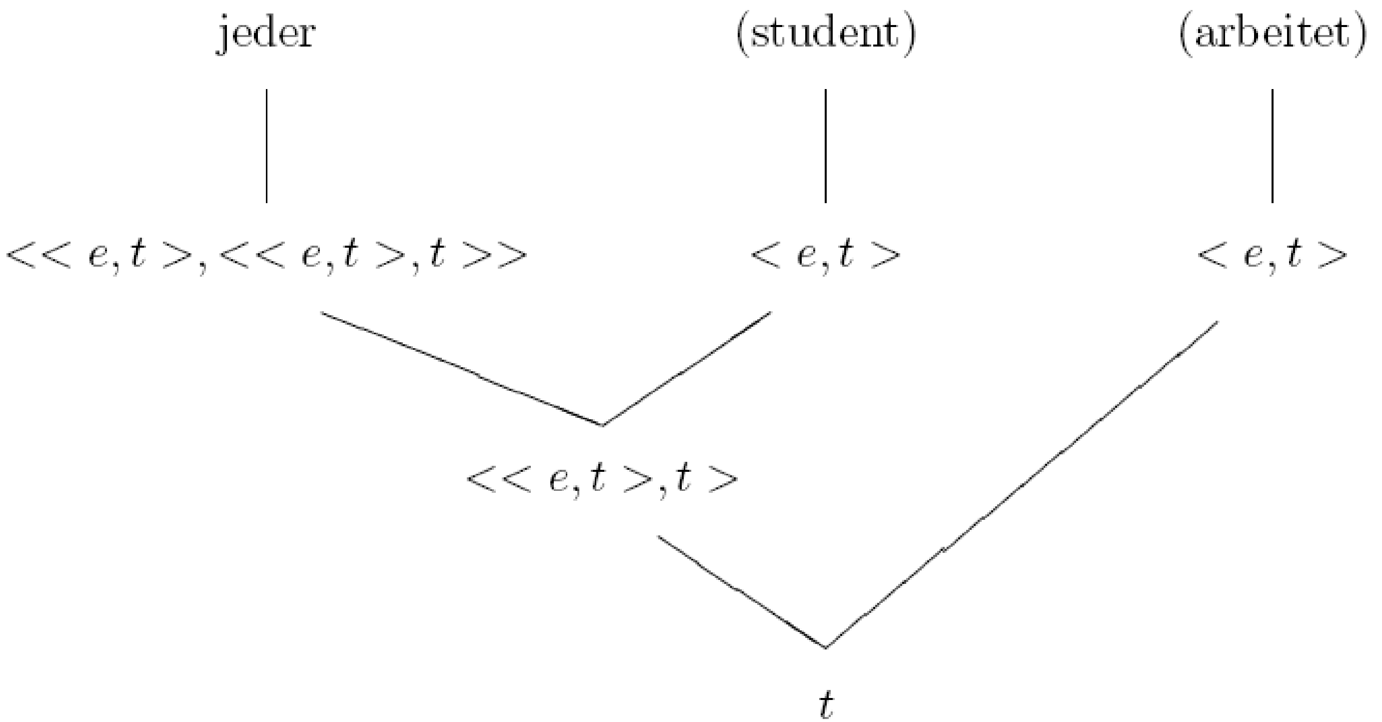
Jeder Student arbeitet.

jeder-student　　(arbeitet)

$<< e, t >, t >$　　$< e, t >$

t

Beispiel



Der Typ << e,t >,<< e,t >,t >> charakterisiert zweistellige Relationen zwischen Prädikaten. Damit sind Wortformen, wie – jeder, mindestens ein, kein – und sogar – mindestens drei, genau sieben, die meisten – , beschreibbar.

Beispiel

Peter hat nur nützliche Eigenschaften.

$$\forall F(F(\text{Peter}) \leftrightarrow \text{nützliche\_Eigenschaft}(F))$$

$$\text{Peter} \in K_e$$

$$F \in Var_{<e,t>}$$

$$\text{nützliche\_Eigenschaft} \in K_{<<e,t>,t>}$$