

# 4 Roboterkinematik

Roboterarm und Gelenke

# 4.1 Grundlegende Begriffe

# Mechanismus

- besteht aus einer Anzahl von **starren Körpern (Glieder)**
- diese sind durch **Gelenke** verbunden
- Ein Gelenk verbindet **genau zwei** Glieder.
- Die Gelenke erlauben den Gliedern eine eingeschränkte Bewegung relativ zueinander.
- Ein Glied kann mehrere Gelenke haben.
- Zwei Glieder können durch mehrere Gelenke verbunden sein.
- Gelenke werden nicht als eigenständige materielle Körper angesehen, vielmehr werden die Gelenkhälften als Bestandteile der dadurch verbundenen Glieder betrachtet.

# Kinematik

- Untersuchung der Bewegungsmöglichkeiten der Glieder eines gegebenen Mechanismus relativ zueinander
- Auftretende Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei Bewegung der Gelenke
- keine Betrachtung von Kräften
- Es wird abstrahiert, ob ein Gelenk motorisch angetrieben oder passiv bewegt wird.

# Dynamik

- Betrachtung von Kräften, die auf den Mechanismus einwirken
- Trägheitskraft
- Schwerkraft

# Analyse und Synthese

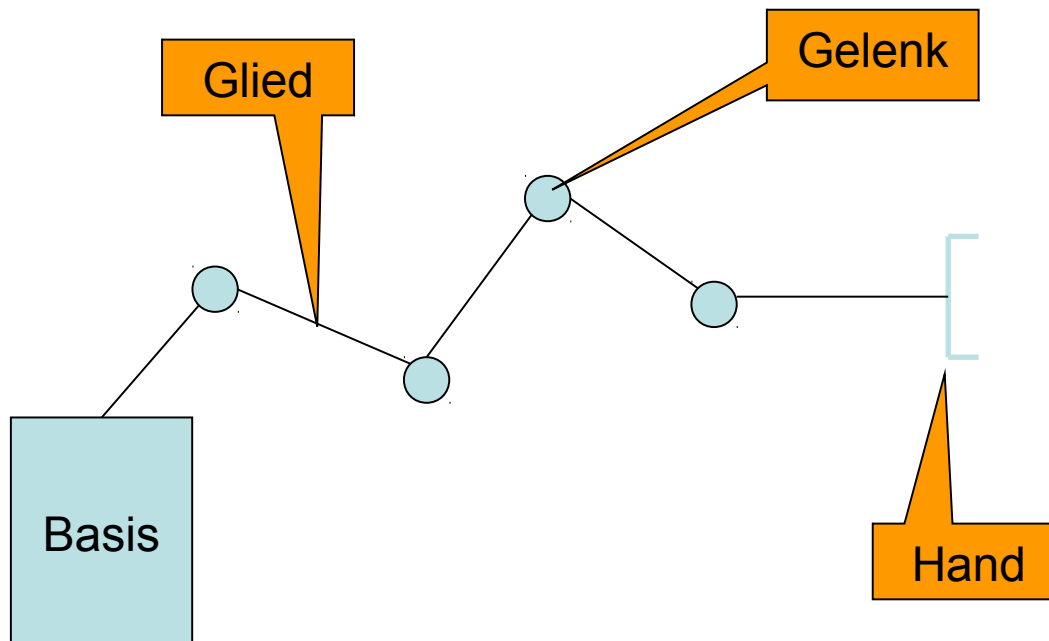
- Analyse
  - mathematische Erfassung der Zwangsbewegungen eines gegebenen Mechanismus
  - Zusammenhang zwischen den Gelenkeinstellungen und der Lage (Position und Orientierung) der Glieder zueinander
- Synthese
  - Konstruktion eines Mechanismus, der eine vorgeschriebene Bewegung realisiert

# Kinematische Kette

- Jedes Glied hat *maximal zwei* Gelenke.
- Besitzt jedes Glied *genau zwei* Gelenke, so wird die kinematische Kette als *geschlossen* bezeichnet
- andernfalls als *offen*

# Offene kinematische Kette

- ein Ende ist der ***Effektor (Hand)***
- das andere Ende ist die ***(Roboter)basis***



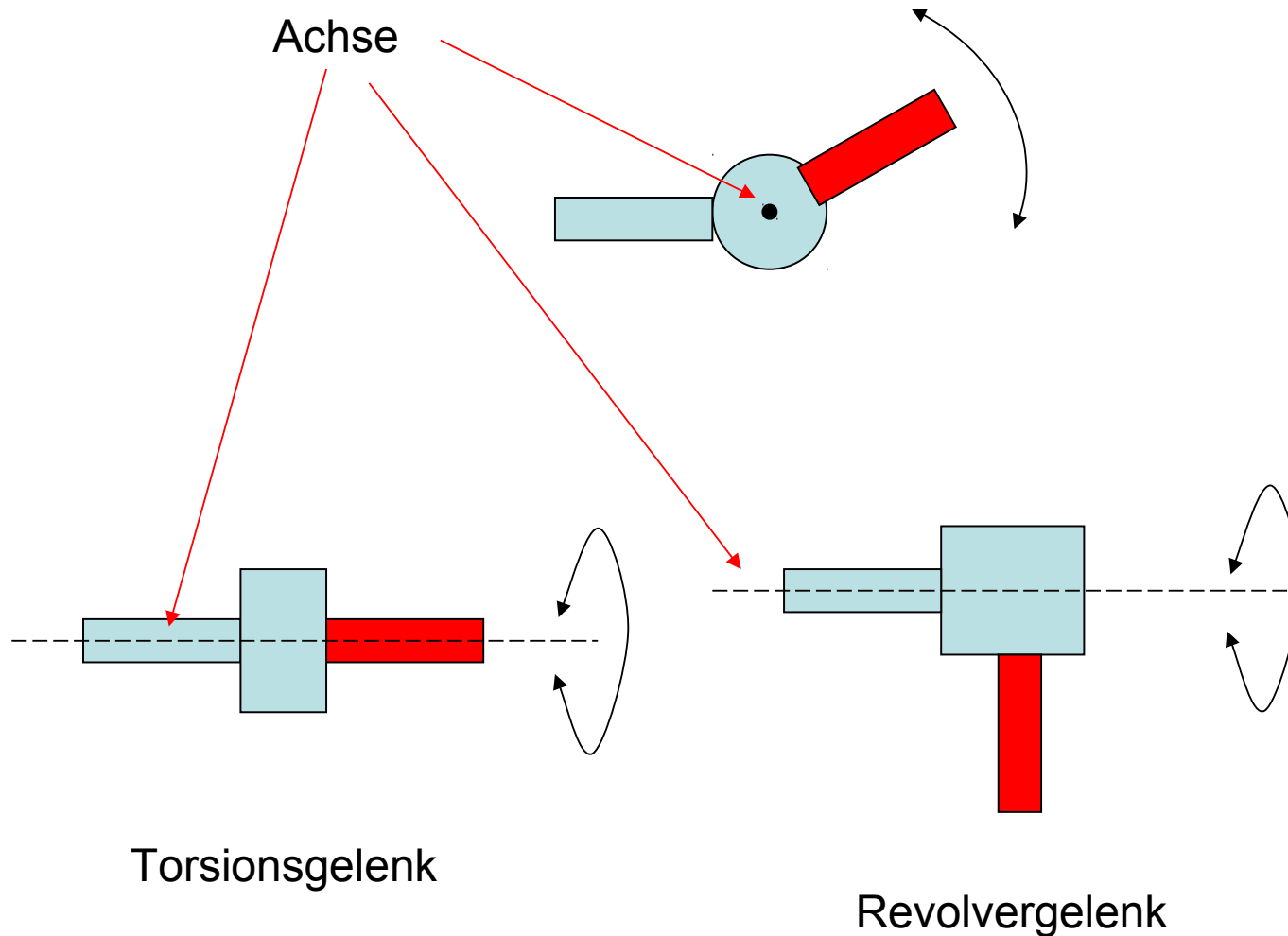


## 4.2 Gelenke

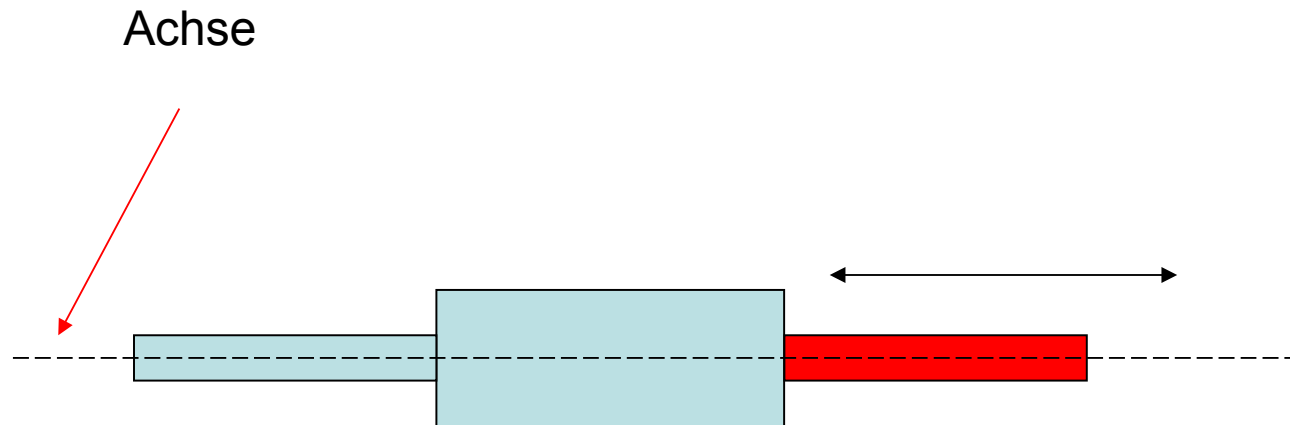
# Gelenkarten

- **Rotationsgelenk** (Drehgelenk) – das eine Glied dreht sich relativ zum anderen um eine feste Achse
  - Torsionsgelenk
  - Revolvergelenk
- **Translationsgelenk** (Lineargelenk) – das eine Glied gleitet relativ zum anderen entlang einer festen Achse
- Weitere Arten können durch Kombination dieser beiden dargestellt werden.
  - Kugelgelenk
  - ebenes Gelenk

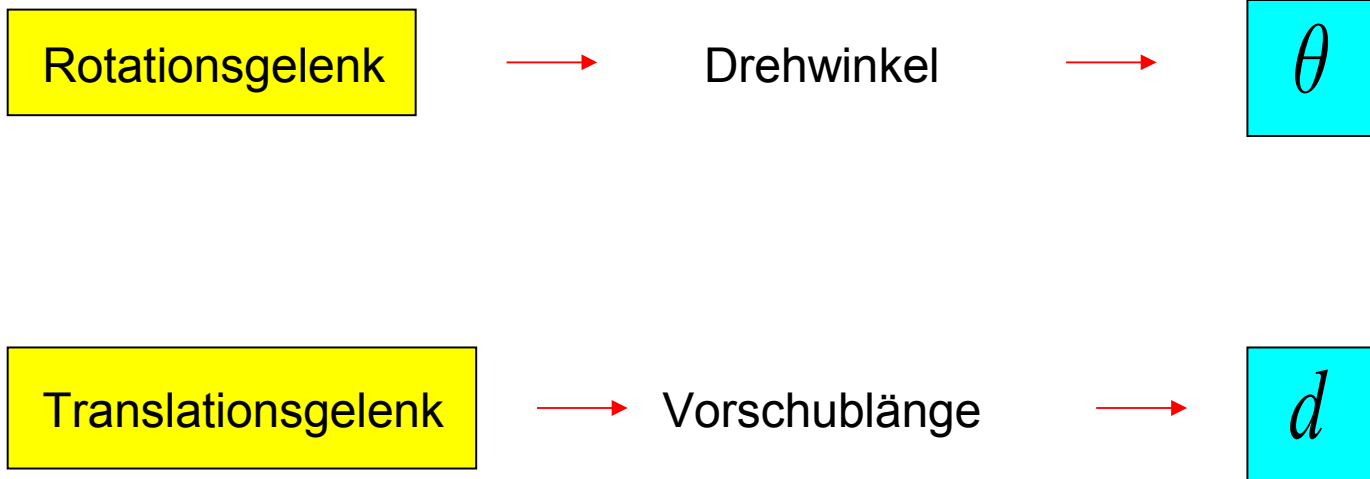
# Rotationsgelenk



# Translationsgelenk



# Gelenkparameter



# Weitere Begriffe

- ***ideale Gelenke*** – keine Begrenzungen der Bewegungen
- ***Gelenkkonfiguration (Konfiguration)*** – Menge von Gelenkeinstellungen (Gelenkparameter)
- ***Konfigurationsraum*** – Menge aller Gelenkkonfigurationen

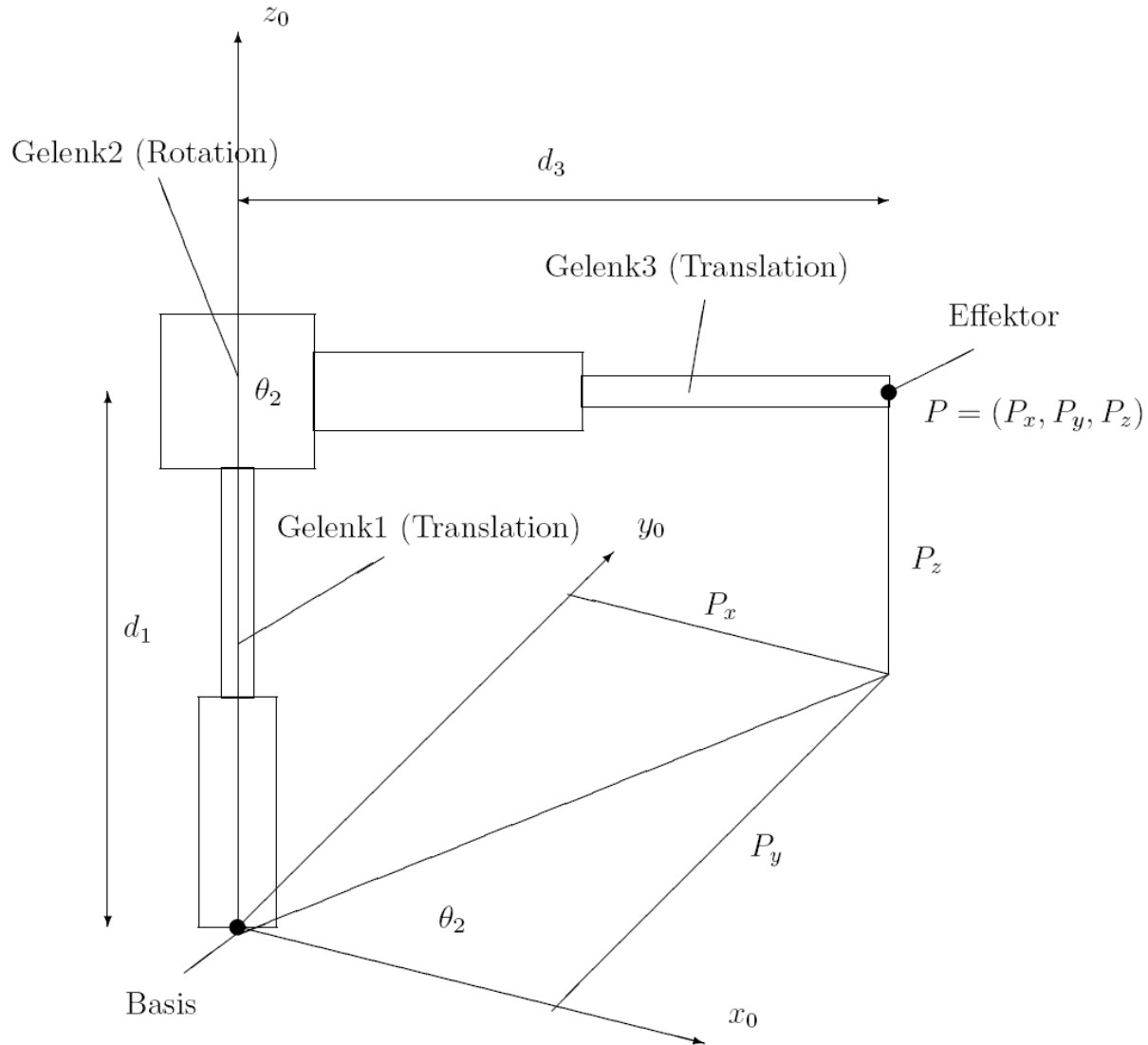
# 4.3 Kinematische Grundprobleme

# 2 Aufgabenstellungen

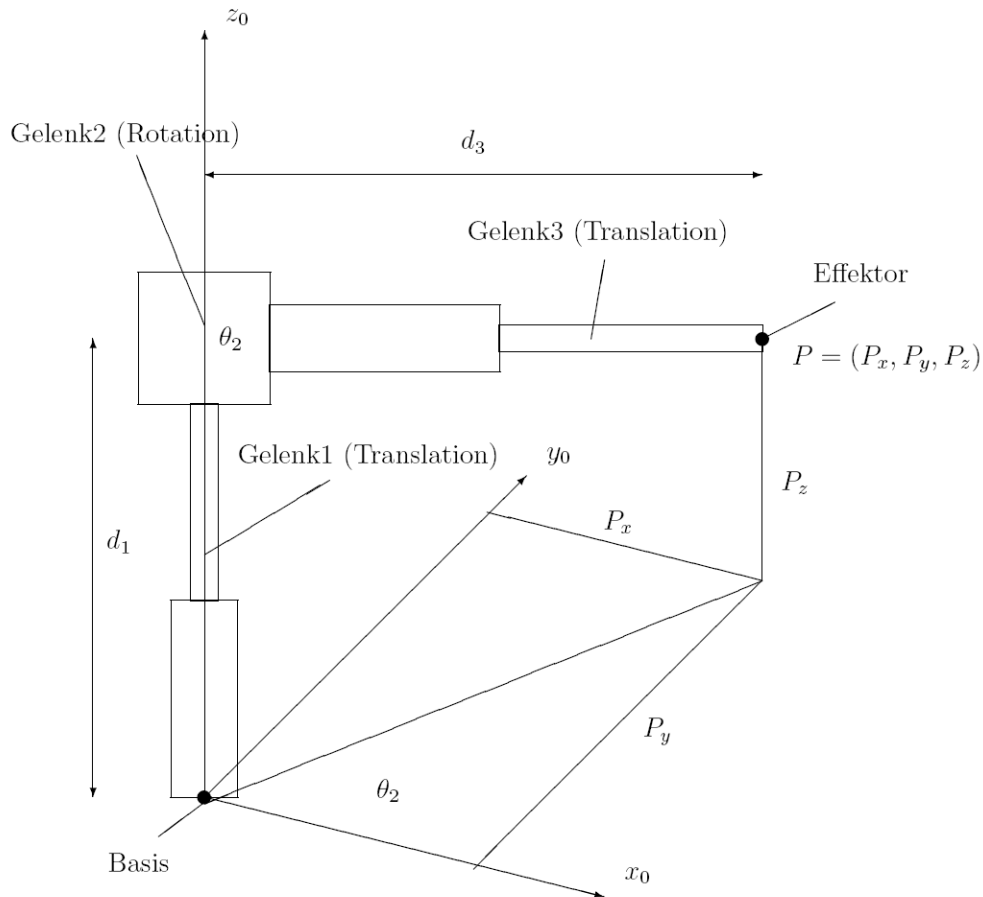
- ***Direktes kinematisches Problem (DKP)***
  - Welche Position und Orientierung nimmt der Effektor bezogen auf die Roboterbasis für eine gegebene Gelenkkonfiguration ein?
  - Lösung: direkte kinematische Transformation oder ***Vorwärtstransformation***
- ***Inverses kinematisches Problem (IKP)***
  - Welche Gelenkkonfiguration führt auf die vorgegebene Lage des Effektors?
  - Lösung: inverse kinematische Transformation oder ***Rückwärtstransformation***



# Beispiel



# DKP



Gegeben:  $d_1, d_3, \theta_2$

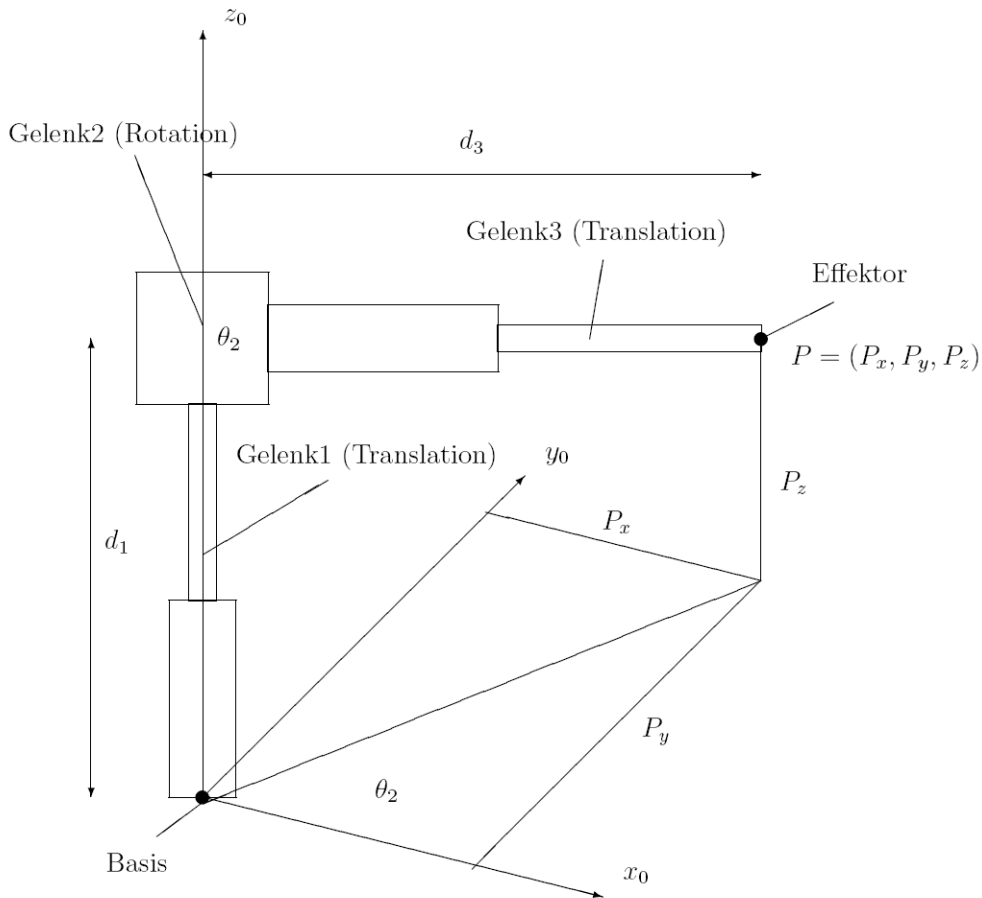
Gesucht:  $P_x, P_y, P_z$

$$P_x = d_3 \cdot \cos \theta_2$$

$$P_y = d_3 \cdot \sin \theta_2$$

$$P_z = d_1$$

# IKP



Gegeben:  $P_x, P_y, P_z$

Gesucht:  $d_1, d_3, \theta_2$

$$d_1 = P_z$$

$$d_3 = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

# Bemerkungen

- DKP lässt sich explizit, analytisch lösen
- für IKP ist dies i. a. nicht möglich
- aber IKP ist für die Robotik wichtiger

## 4.4 Stellungsbeschreibung und Stellungstransformation

# Koordinatensysteme

Koordinatensystem  $K$


Basisvektoren  $\vec{x}_K, \vec{y}_K, \vec{z}_K$

Ursprung  $O_K$

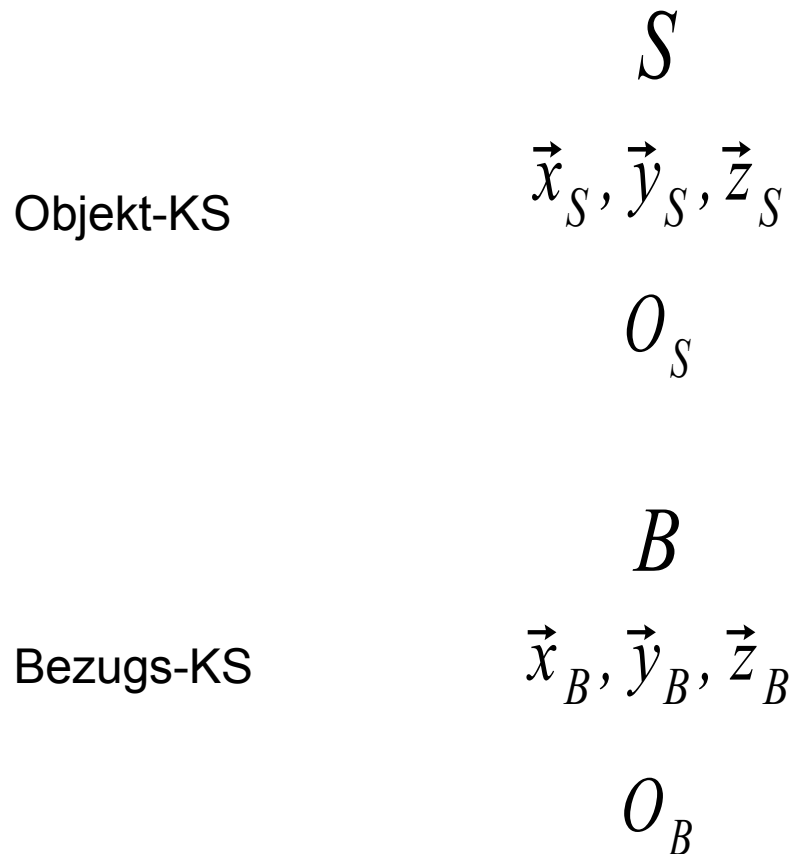
$$K_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} K_{a_1} \\ K_{a_2} \\ K_{a_3} \end{pmatrix}$$

$$K_{\vec{a}} = K_{a_1} \cdot \vec{x}_K + K_{a_2} \cdot \vec{y}_K + K_{a_3} \cdot \vec{z}_K$$

$$P \in \mathbb{R}^3 \quad K_P = K_{\vec{P}} = \begin{pmatrix} K_{P_1} \\ K_{P_2} \\ K_{P_3} \end{pmatrix}$$

Ortsvektor 

# Koordinatensysteme



# Position, Orientierung und Stellung

$${}^B O_S$$

Position von S in bezug auf B

$${}^B R_S = \begin{pmatrix} B_{\vec{x}_S} & B_{\vec{y}_S} & B_{\vec{z}_S} \end{pmatrix}$$

Orientierung von S in bezug auf B

$$\left( {}^B R_S, {}^B O_S \right)$$

Stellung von S in bezug auf B



# Orientierung

$$\vec{x}_B \cdot \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{x_{s_1}} \\ B_{x_{s_2}} \\ B_{x_{s_3}} \end{pmatrix} = B_{x_{s_1}}$$

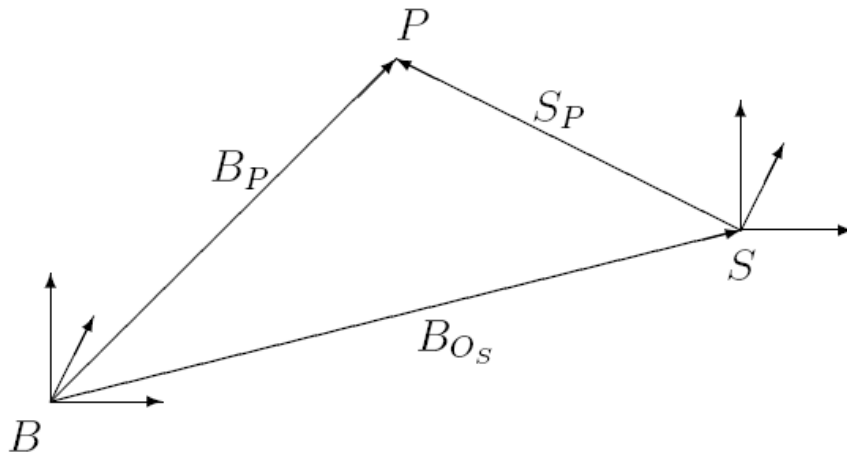
$$\vec{y}_B \cdot \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{x_{s_1}} \\ B_{x_{s_2}} \\ B_{x_{s_3}} \end{pmatrix} = B_{x_{s_2}}$$

$$\vec{z}_B \cdot \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{x_{s_1}} \\ B_{x_{s_2}} \\ B_{x_{s_3}} \end{pmatrix} = B_{x_{s_3}}$$

$$B_{\vec{x}_S} = \begin{pmatrix} B_{x_{s_1}} \\ B_{x_{s_2}} \\ B_{x_{s_3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_B \cdot \vec{x}_S \\ \vec{y}_B \cdot \vec{x}_S \\ \vec{z}_B \cdot \vec{x}_S \end{pmatrix}$$

$${}^B R_S = \begin{pmatrix} B_{\vec{x}_S} & B_{\vec{y}_S} & B_{\vec{z}_S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_B \cdot \vec{x}_S & \vec{x}_B \cdot \vec{y}_S & \vec{x}_B \cdot \vec{z}_S \\ \vec{y}_B \cdot \vec{x}_S & \vec{y}_B \cdot \vec{y}_S & \vec{y}_B \cdot \vec{z}_S \\ \vec{z}_B \cdot \vec{x}_S & \vec{z}_B \cdot \vec{y}_S & \vec{z}_B \cdot \vec{z}_S \end{pmatrix}$$

# Stellungstransformation



$$T: R^3 \rightarrow R^3$$

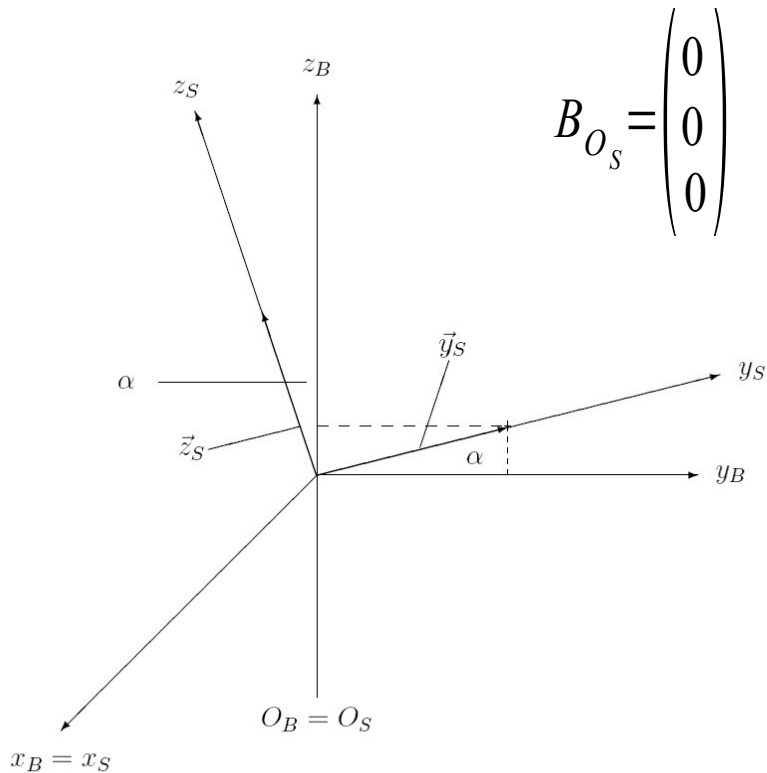
$$T(S_P) = B_P$$

$$B_P = {}^B R_S \cdot S_P + B_{O_S}$$

$$T = \left( {}^B R_S, B_{O_S} \right)$$

S entsteht aus B durch Translation und Rotation

# Rotation um die x-Achse



$$B_{O_S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{\vec{x}_S} = \begin{pmatrix} \vec{x}_B \cdot \vec{x}_S \\ \vec{y}_B \cdot \vec{x}_S \\ \vec{z}_B \cdot \vec{x}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{\vec{y}_S} = \begin{pmatrix} \vec{x}_B \cdot \vec{y}_S \\ \vec{y}_B \cdot \vec{y}_S \\ \vec{z}_B \cdot \vec{y}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$B_{\vec{z}_S} = \begin{pmatrix} \vec{x}_B \cdot \vec{z}_S \\ \vec{y}_B \cdot \vec{z}_S \\ \vec{z}_B \cdot \vec{z}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(90^\circ + \alpha) \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$${}^B R_S = R_{x_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

# Rotation um y bzw. z-Achse

$${}^B R_S = R_{y_\beta} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$${}^B R_S = R_{z_\gamma} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Zwischen-KS Z

$$T_1 = \left( {}^Z R_S, Z_{O_S} \right) = (R_1, p_1)$$

$$T_2 = \left( {}^B R_Z, B_{O_Z} \right) = (R_2, p_2)$$

$$T_3 = \left( {}^B R_S, B_{O_S} \right) = (R_3, p_3)$$

$$T_3 = T_2 \cdot T_1$$

$$T_3(S_P) = T_2(T_1(S_P)) = T_2(Z_P) = B_P$$



Hintereinanderausführung von  $T_1$  und  $T_2$

$$R_3 = R_2 \cdot R_1$$

$$p_3 = R_2 \cdot p_1 + p_2$$

# Beweis

$$\begin{aligned}T_3(S_P) = B_P &= T_2(T_1(S_P)) \\ &= R_2 \cdot T_1(S_P) + p_2 \\ &= R_2(R_1 \cdot S_P + p_1) + p_2 \\ &= (R_2 \cdot R_1) \cdot S_P + (R_2 \cdot p_1 + p_2) \\ &= R_3 \cdot S_P + p_3\end{aligned}$$

Dies gilt für alle  $P \in R^3$ . Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

$$R_3 \cdot S_P + p_3 = (R_2 \cdot R_1) \cdot S_P + (R_2 \cdot p_1 + p_2)$$

$$S_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$p_3 = R_2 \cdot p_1 + p_2$$

$$S_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = R_2 \cdot R_1$$

# Bemerkung

- Folgen von Stellungstransformationen liefern bei der Berechnung komplizierte, schwer handhabbare Ausdrücke

$$T_4 = T_3 \cdot T_2 \cdot T_1$$

$$T_2 \cdot T_1 = (R_2 \cdot R_1, R_2 \cdot p_1 + p_2)$$

$$T_4 = (R_3 \cdot R_2 \cdot R_1, R_3 \cdot (R_2 \cdot p_1 + p_2) + p_3)$$

# Eigenschaften

$$T = (R, p)$$

R – orthogonale Matrix

$$R^{-1} = R^T$$



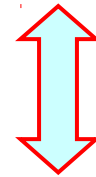
$$|\det(R)| = 1$$

$$({}^A R_B)^{-1} = {}^B R_A$$



# Beispiel – Rotation x-Achse

$$R_{x_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha \rightarrow -\alpha} (R_{x_\alpha})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



$$R_{x_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow (R_{x_\alpha})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

# Gruppe der Stellungstransformationen

$$ST = \left\{ T : T = (R, p), \quad R^{-1} = R^T \right\}$$

bildet eine **Gruppe** bezüglich der Hintereinanderausführung

Einselement:

$$E = (I, \vec{0})$$

Inverses Element:

$$T^{-1} = (R^T, -R^T \cdot p)$$

# Beweis

$$T_2 \cdot T_1 = (R_2 \cdot R_1, R_2 \cdot p_1 + p_2) \in ST,$$

wegen

$$(R_2 \cdot R_1)^{-1} = R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} = R_1^T \cdot R_2^T = (R_2 \cdot R_1)^T.$$

$$T \cdot E = (R \cdot I, R \cdot \vec{0} + p) = (R, p) = T$$

$$E \cdot T = (I \cdot R, I \cdot p + \vec{0}) = (R, p) = T$$

$$T^{-1} \cdot T = (R^T \cdot R, R^T \cdot p + (-R^T \cdot p)) = (I, \vec{0}) = E$$

$$T \cdot T^{-1} = (R \cdot R^T, R \cdot (-R^T \cdot p) + p) = (I, \vec{0}) = E$$

# 4.5 Homogene Koordinaten und homogene Transformationsmatrizen

# Homogene Koordinaten

$$P = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$$

$$P_H = (hx, hy, hz, h)^T, h \in \mathbb{R}, h \neq 0$$

In der Kinematik ist  $h=1$  wichtig

Unter einer homogenen Transformationsmatrix  $D$  verstehen wir eine  $4 \times 4$  - Matrix mit folgendem Aufbau:

- $R$  -  $3 \times 3$  - Matrix
- $T$  -  $3 \times 1$  - Vektor
- $P$  -  $1 \times 3$  - Vektor
- $S$  - Zahl

$$D = \left( \begin{array}{c|c} R & T \\ \hline P & S \end{array} \right)$$

$R$  kann für die Rotation und Skalierung benutzt werden.  
 $T$  beschreibt die Translation,  $P$  die Perspektivtransformation und  $S$  ebenfalls eine Skalierung

# Beispiel 1

- Die Translation um den Vektor  $(T_x, T_y, T_z)$  wird folgendermaßen beschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+T_x \\ y+T_y \\ z+T_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Beispiel 2

- Eine Skalierung mit den Faktoren  $S_x, S_y, S_z$  ist gegeben durch:
$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x x \\ S_y y \\ S_z z \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Sollen alle drei Achsen um den gleichen Faktor  $S$  skaliert werden, dann kann diese Gesamtskalierung auch durch folgende Matrixmultiplikation beschrieben werden:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{1}{S} \end{pmatrix}$$
- Die Division durch die vierte Koordinate  $\frac{1}{S}$  liefert die üblichen kartesischen Koordinaten.

# Beispiel 3

- Die Rotation um die x-Achse mit Winkel  $\alpha_x$  ist folgendermaßen möglich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_x) & -\sin(\alpha_x) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_x) & \cos(\alpha_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos(\alpha_x) - z \sin(\alpha_x) \\ y \sin(\alpha_x) + z \cos(\alpha_x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Analog beschreibt man die Rotation um die y-Achse mit Winkel  $\alpha_y$  und die Rotation um die z-Achse mit Winkel  $\alpha_z$ .

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_y) & 0 & \sin(\alpha_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\alpha_y) + z \sin(\alpha_y) \\ y \\ -x \sin(\alpha_y) + z \cos(\alpha_y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_z) & -\sin(\alpha_z) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_z) & \cos(\alpha_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\alpha_z) - y \sin(\alpha_z) \\ y \cos(\alpha_z) + x \sin(\alpha_z) \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



# Beispiel 4

- Die Zentralprojektion auf die Parallele zur  $(x, y)$ -Ebene im Abstand  $f$  mit Projektionszentrum im Koordinatenursprung ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{f} \end{pmatrix}$$

- Zur Berechnung der kartesischen projizierten Koordinaten muss durch die vierte homogene Koordinate dividiert werden.

$$\frac{\frac{x}{z}}{\frac{z}{f}} = \frac{x \cdot f}{z}$$

$$\frac{\frac{y}{z}}{\frac{z}{f}} = \frac{y \cdot f}{z}$$

$$\frac{\frac{z}{z}}{\frac{z}{f}} = \frac{z \cdot f}{z} = f$$

# Stellungstransformation

$$T = (R, p) \quad \longrightarrow$$

$$\Psi(T) = M = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & R & & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$SH_4 = \left\{ M : M = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & R & & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), R^{-1} = R^T \right\}$$

Gruppe bezüglich  
der Matrizenmultiplikation

Einselement:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverses Element:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \\ & R^T & & -R^T \cdot p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Beweis

$$M_1 = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & R_1 & & p_1 \\ & \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad M_2 = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & R_2 & & p_2 \\ & \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$M_1 \cdot M_2 = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & R_1 \cdot R_2 & & R_1 \cdot p_2 + p_1 \\ & \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Wegen  $(R_1 \cdot R_2)^{-1} = (R_1 \cdot R_2)^T$  gilt  $M_1 \cdot M_2 \in SH_4$ .

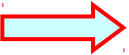
# Eigenschaft

Die Gruppen  $ST$  und  $SH_4$  sind isomorph

$$\forall T_1, T_2 \in ST: \Psi(T_1 \cdot T_2) = \Psi(T_1) \cdot \Psi(T_2)$$

Beweis:  $T_1 = (R_1, p_1)$      $T_2 = (R_2, p_2)$      $T_1 \cdot T_2 = (R_1 \cdot R_2, R_1 \cdot p_2 + p_1)$

$$\Psi(T_1) = M_1 = \left( \begin{array}{ccc|c} R_1 & & & p_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Psi(T_2) = M_2 = \left( \begin{array}{ccc|c} R_2 & & & p_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

  $\Psi(T_1 \cdot T_2) = \left( \begin{array}{ccc|c} R_1 \cdot R_2 & & & R_1 \cdot p_2 + p_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = M_1 \cdot M_2 = \Psi(T_1) \cdot \Psi(T_2)$

# Eigenschaft

$$T = (R, p)$$

$$\Psi(T) = M = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & p \\ \hline & R & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$P, Q \in \mathbb{R}^3, \quad T(P) = Q$$

$$Q_H = \begin{pmatrix} Q \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_H = \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$Q_H = M \cdot P_H$$

Beweis:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} & & & p \\ \hline & R & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot P + p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Bemerkungen

- Die Gruppen  $ST$  und  $SH_4$  sind nicht kommutativ
- Das Resultat von Stellungstransformationen kann mit homogenen Koordinaten berechnet werden
- Die Hintereinanderausführung von Stellungstransformationen kann auf die Multiplikation von Matrizen zurückgeführt werden

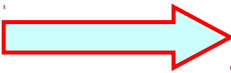
## 4.6 Beschreibung der Roboterkinematik nach Denavit-Hartenberg

# Satz

Gegeben:           KS                             $B$   
                          gerichtete Gerade (Achse)     $A$

  $\exists S$     (Koordinatensystem)

$O_S \in A$              $z$ -Achse von  $S$  ist gleichgerichtet mit  $A$

$T = \left( {}^B R_S, B_{O_S} \right)$       $\exists \theta, d, a, \alpha \in \mathbb{R}$

$\Psi(T) = M = Rot_z(\theta) \cdot Trans_z(d) \cdot Trans_x(a) \cdot Rot_x(\alpha)$



# Transformationen

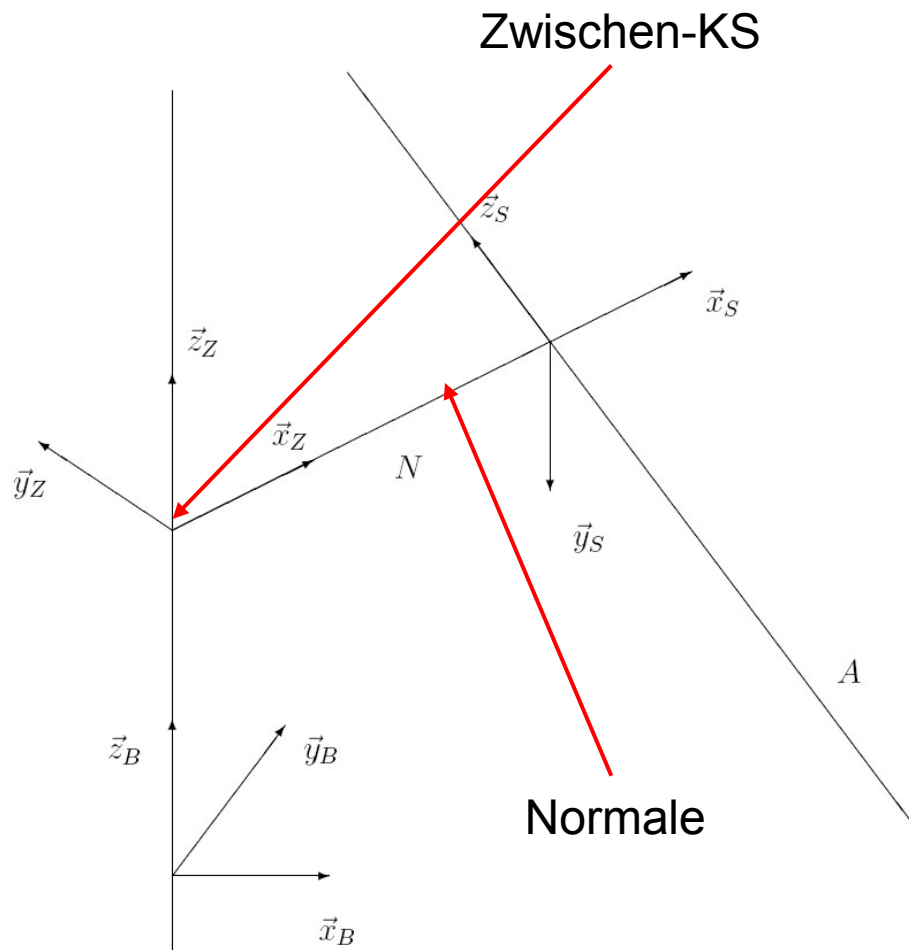
$$Rot_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Trans_x(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rot_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Trans_z(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Koordinatensystem S



$$z_B \cap A = \emptyset$$

$z_B$  nicht parallel  $A$

$$T_1 = \left( {}^Z R_S, Z_{O_S} \right)$$

$$T_1 = \text{Trans}_x(a) \cdot \text{Rot}_x(\alpha)$$

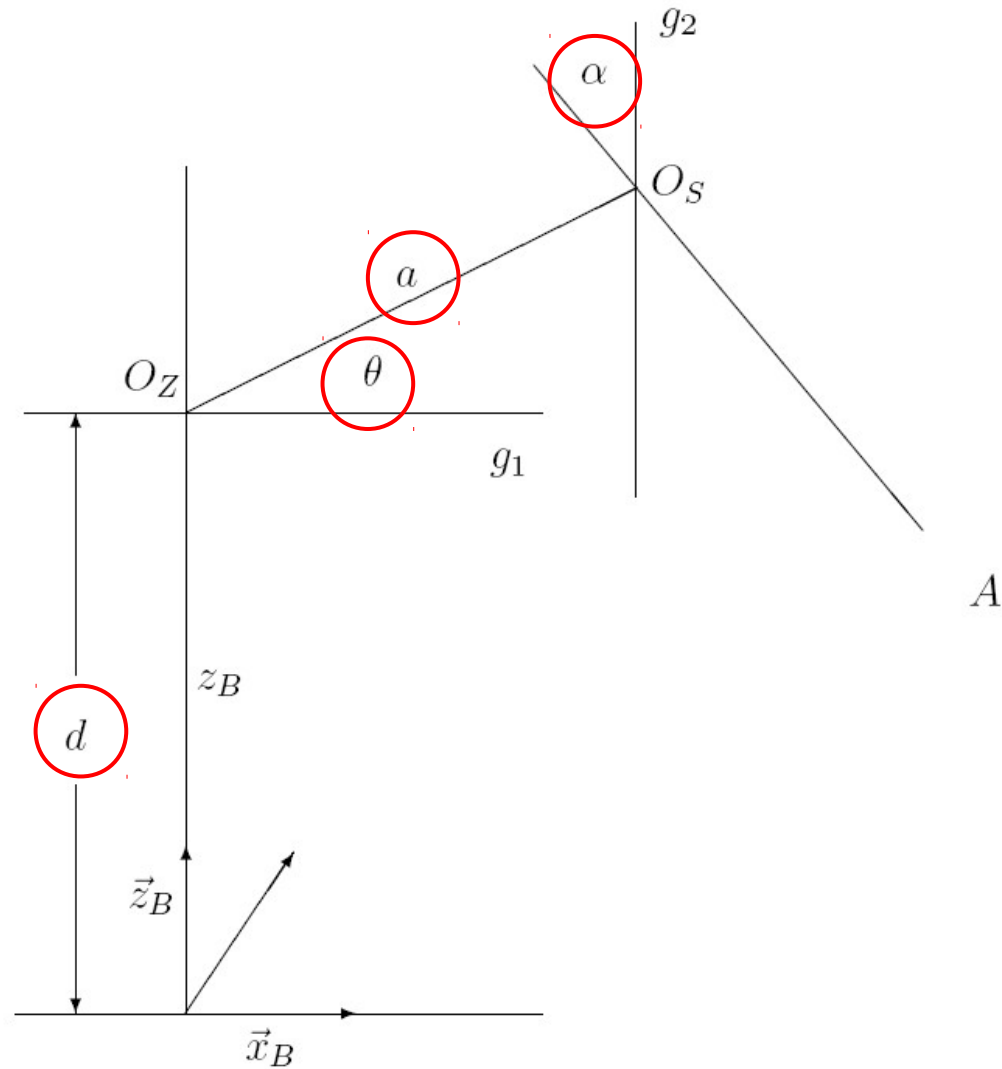
$$T_2 = \left( {}^B R_Z, B_{O_Z} \right)$$

$$T_2 = \text{Rot}_z(\theta) \cdot \text{Trans}_z(d)$$

$$T = T_2 \cdot T_1$$

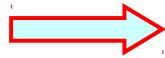
$$T_3(S_P) = T_2(T_1(S_P)) = T_2(Z_P) = B_P$$

# DH – Parameter (Quadrupel)



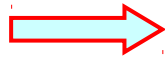
# Spezialfälle

$$z_B \cap A \neq \emptyset$$



$$a = 0$$

$$z_B \text{ parallel } A$$



$$d \text{ beliebig, } \alpha = 0 \vee \alpha = \pi$$

$$z_B \cap A \neq \emptyset$$

$$z_B \text{ parallel } A$$

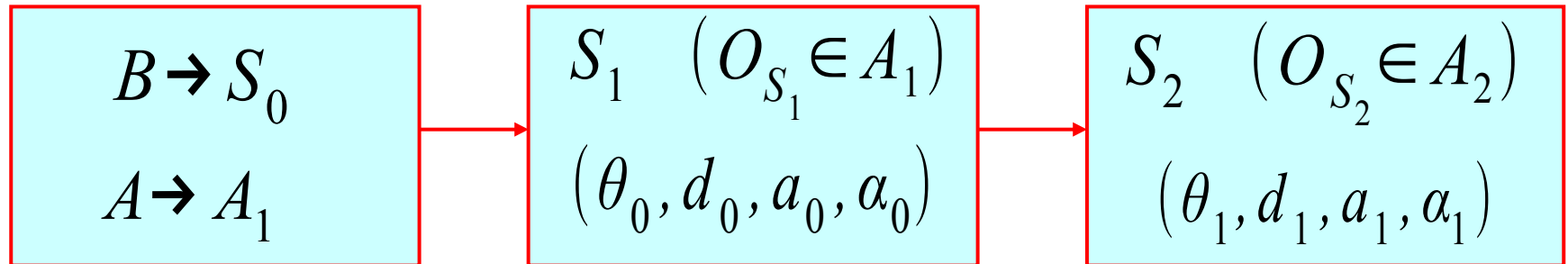


$$d, \theta \text{ beliebig, } \alpha = 0 \vee \alpha = \pi, \quad a = 0$$

# Anwendung auf Roboter

- offene kinematische Kette
- $n$  Gelenke
- beliebiges festes KS  $B=S_0$ , bezüglich dessen die Roboterbasis unbeweglich ist
- im Effektor sei ein KS  $E=S_{n+2}$  gegeben
- die Gelenkachsen seien von der Roboterbasis beginnend, von  $A_1$  bis  $A_n$  durchnummeriert

# Anwendung des Satzes



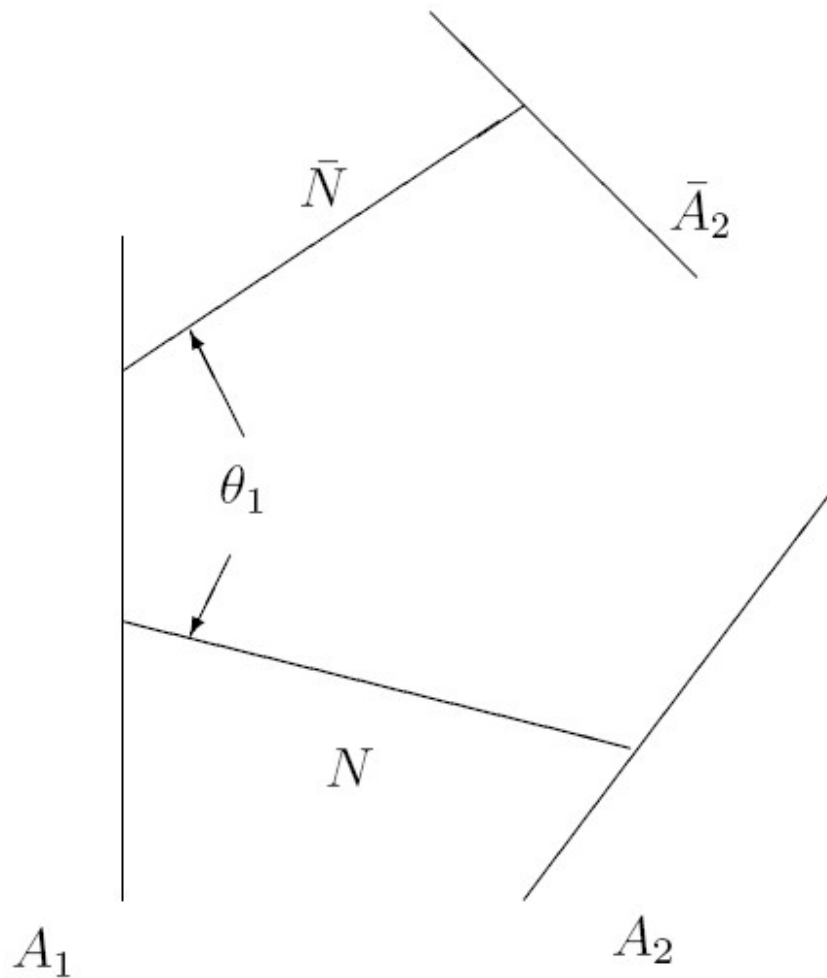
Bei einer Bewegung des Gelenkes 1 ändert sich im Quadrupel

$$(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1)$$

entweder  $\theta_1$  Rotationsgelenk

oder  $d_1$  Translationsgelenk

# 2 benachbarte Gelenke



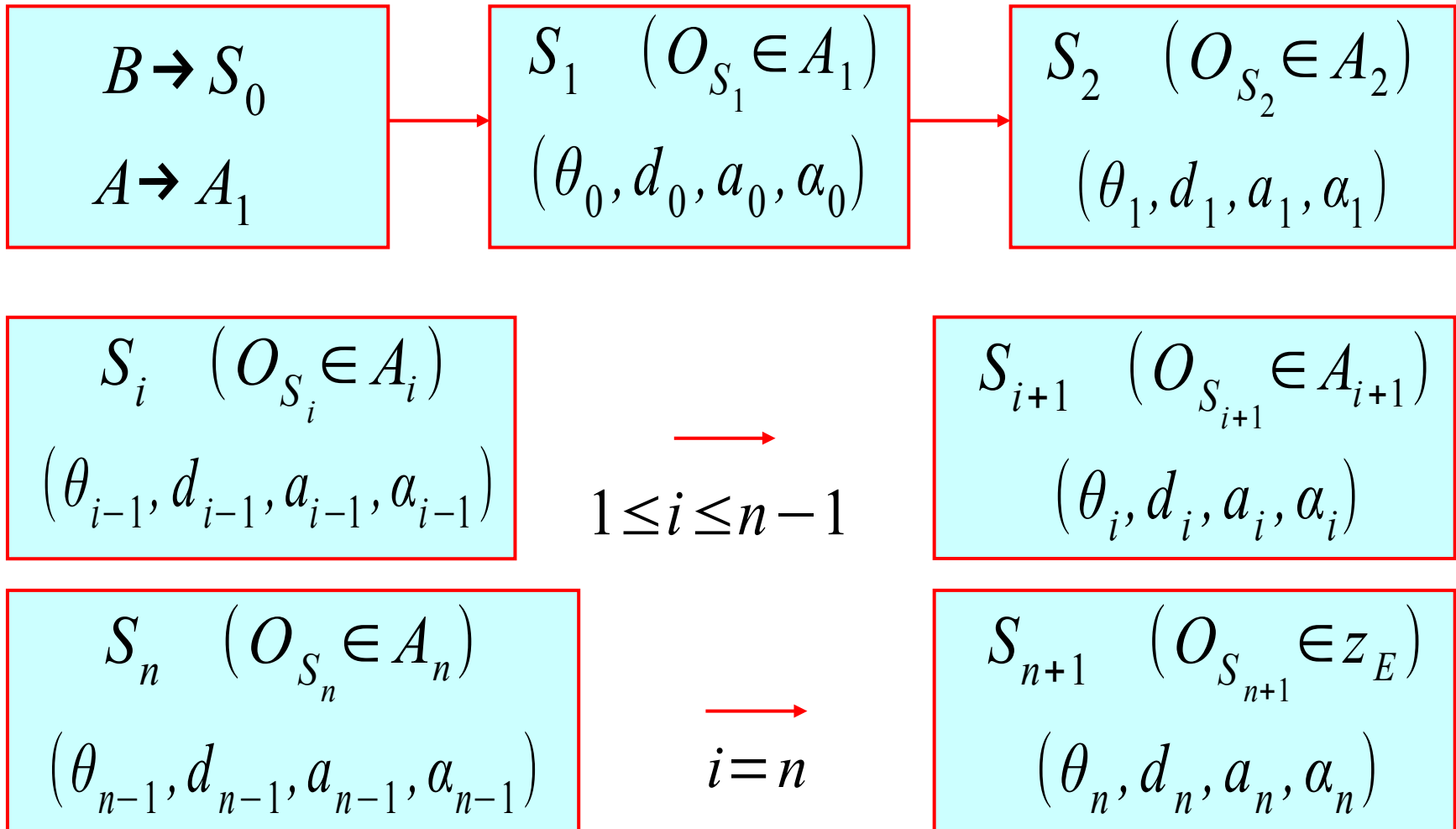
$A_2$  und der gesamte restliche  
Roboterarm dreht sich um die  
Achse  $A_1$  (Rotationsgelenk)

Die drei Größen,

$$d_1, a_1, \alpha_1$$

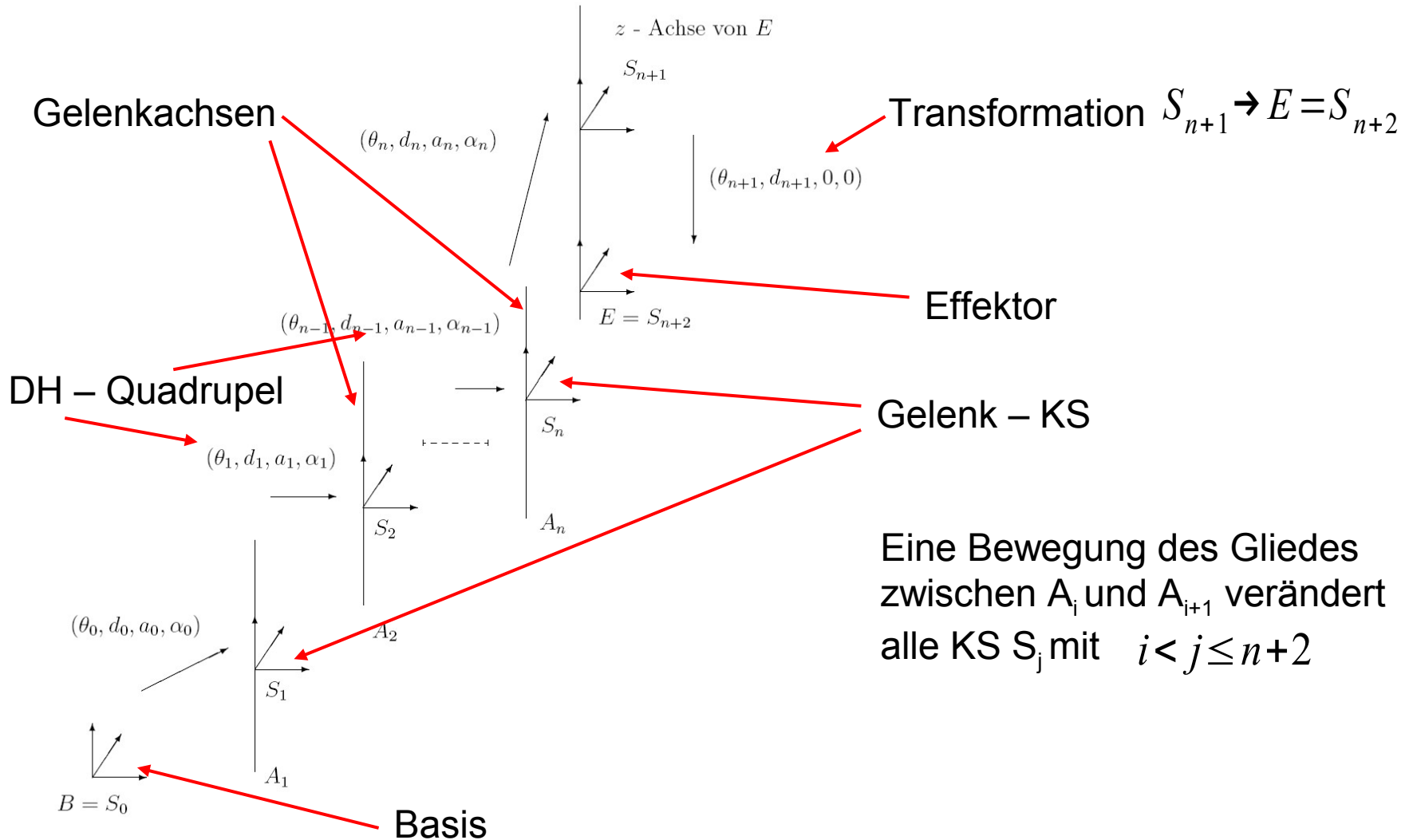
die sich nicht verändern (bei  
Bewegung von Gelenk 1)  
spezifizieren das Glied, welches  
 $A_1$  und  $A_2$  verbindet.

# Anwendung des Satzes





# Transformationen



# Offene Kinematische Kette

$$B \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow E$$

$$(\theta_0, d_0, a_0, \alpha_0) \quad (\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1) \quad \dots \quad (\theta_n, d_n, a_n, \alpha_n) \quad (\theta_{n+1}, d_{n+1}, 0, 0)$$

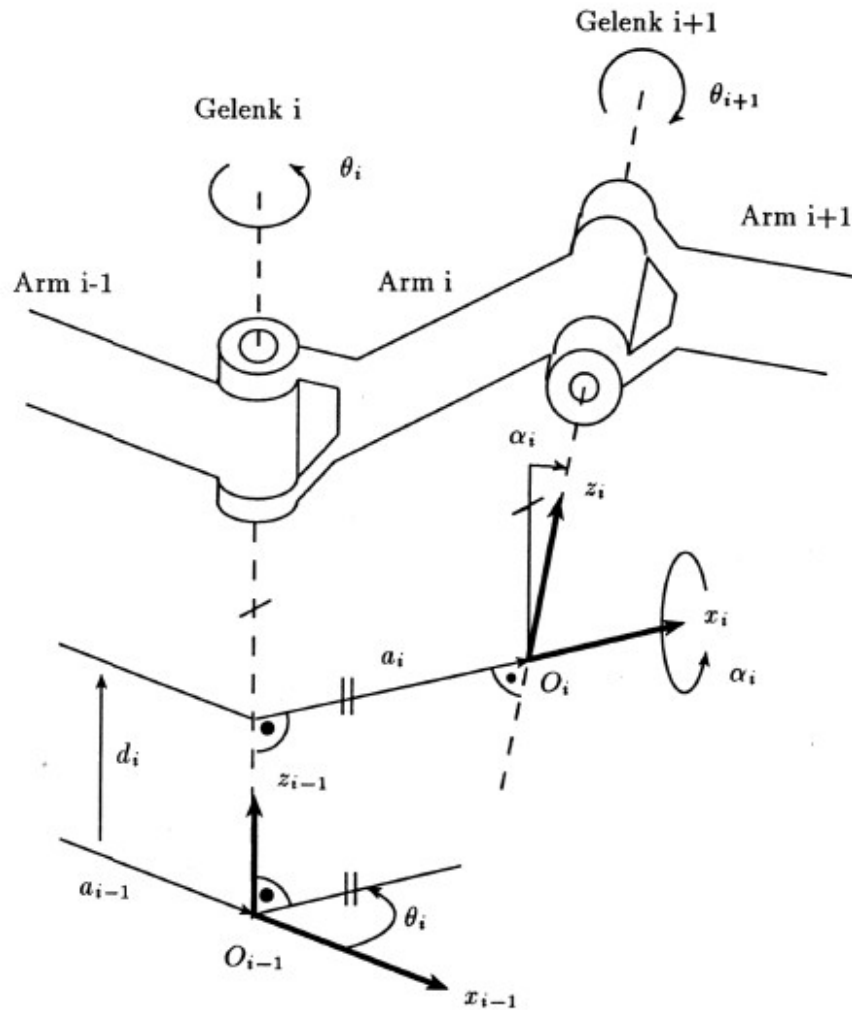
$$(\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i) \quad 1 \leq i \leq n$$

oder

Ein Parameter repräsentiert die Gelenkbewegung  
(Gelenkvariable)

3 Parameter sind konstant

# 2 Gelenke



# DKP – Kinematische Grundgleichung

$$M = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & {}^B R_E & & B O_E \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$M = \left( m_{ij} \right)_{i,j=1}^4 = \prod_{i=0}^{n+1} Rot_z(\theta_i) \cdot Trans_z(d_i) \cdot Trans_x(a_i) \cdot Rot_x(\alpha_i)$$

12 nichttriviale skalare Elementgleichungen

# Bemerkungen

- können die DH – Parameter beliebig gewählt werden, so setzt man sie i. a. gleich 0
- die Gelenkübergänge werden einheitlich beschrieben
- die Bewegung des Gelenkes wird nur durch einen Parameter modifiziert

# Zusammenfassung

$$M = \left( m_{ij} \right)_{i,j=1}^4 = \prod_{i=0}^{n+1} Rot_z(\theta_i) \cdot Trans_z(d_i) \cdot Trans_x(a_i) \cdot Rot_x(\alpha_i)$$

$$M = \prod_{i=0}^{n+1} M_i = \prod_{i=0}^{n+1} Rot_z(\theta_i) \cdot Trans_z(d_i) \cdot Trans_x(a_i) \cdot Rot_x(\alpha_i)$$

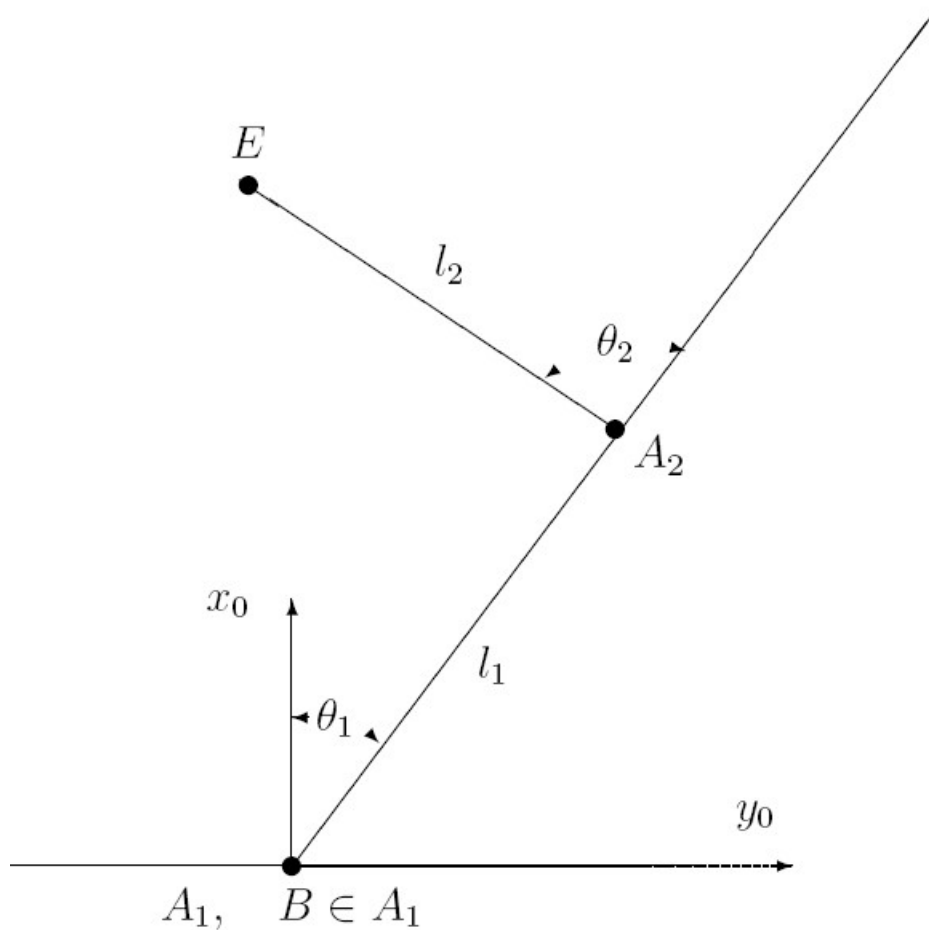
$$M_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Zusammenfassung

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Beispiel – Zweiarmmanipulator



$A_1$  und  $A_2$  stehen senkrecht auf der Bildebene

<i>DH - Parameter</i>				
$i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	0	0	0	0
1	$\theta_1$	0	$l_1$	0
2	$\theta_2$	0	$l_2$	0
3	0	0	0	0



# Beispiel – Zweiarmanipulator

$$M = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = M_1 \cdot M_2 \quad M_0 = M_3 = I$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_i = \sin \theta_i$$

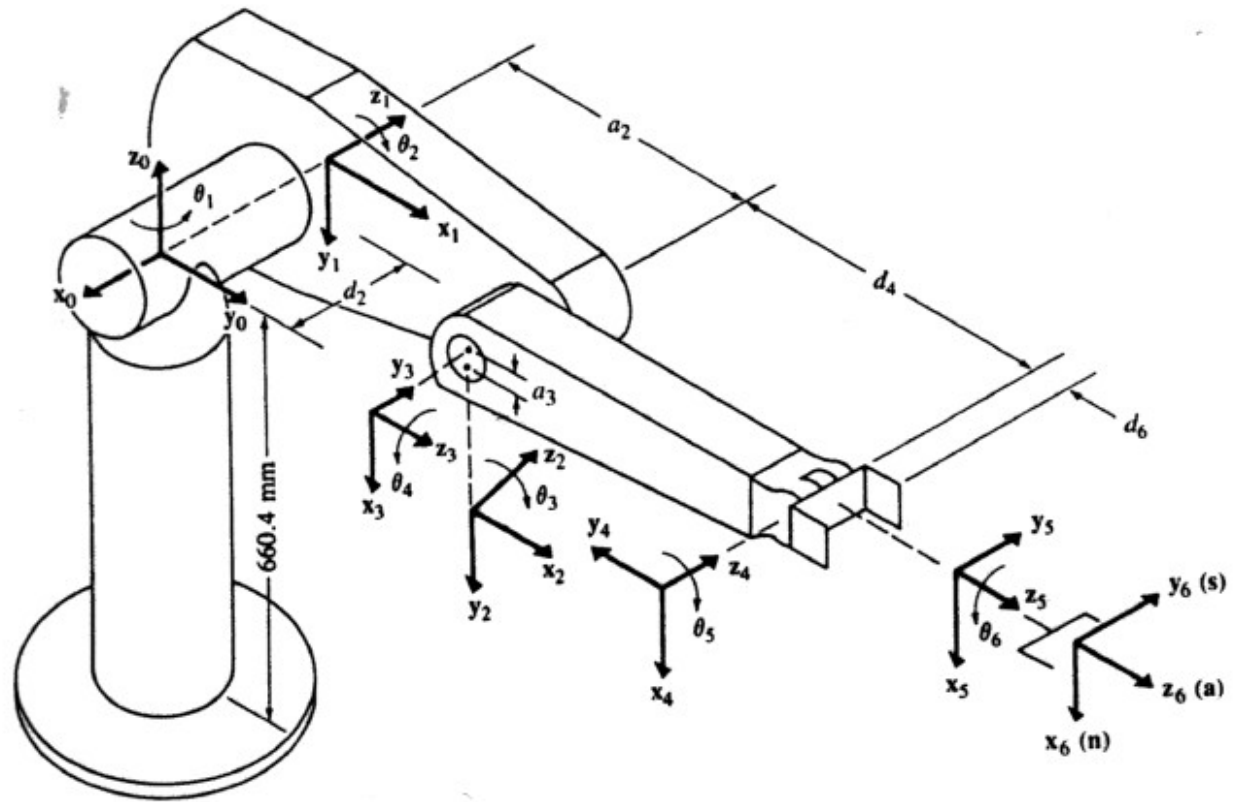
$$c_i = \cos \theta_i$$

$$s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$$

$$c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$$

$$M = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_2 c_{12} + l_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_2 s_{12} + l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Beispiel mit PUMA 560



# Puma 560

Gelenk i	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	Gelenk-Bereich
1	90	-90	0	0	-160 zu 160
2	0	0	431.8 mm	149.09 mm	-225 zu 45
3	90	90	-20.32 mm	0	-45 zu 225
4	0	-90	0	433.07 mm	-110 zu 170
5	0	90	0	0	-100 zu 100
6	0	0	0	56.25 mm	-266 zu 266

**Gelenk-Koordinaten-Parameter von PUMA 560**

# Puma 560

$$T' = A_1 A_2 A_3$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$T'' = A_4 A_5 A_6$$

# Puma 560

$$= \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei  $C_{ij} \equiv \cos(\theta_i + \theta_j)$  und  $S_{ij} \equiv \sin(\theta_i + \theta_j)$ .

# Puma 560

$$T_6 = T'T'' = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei

$$n_x = C_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] - S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6)$$

...

# 4.7 Inverse kinematische Transformation (IKP)

# Inverse kinematische Transformation (IKP)

Gegeben: Lage zwischen Effektor und Roboterbasis

$$M = \left( m_{ij} \right)_{i,j=1}^4 = \prod_{i=0}^{n+1} M_i$$

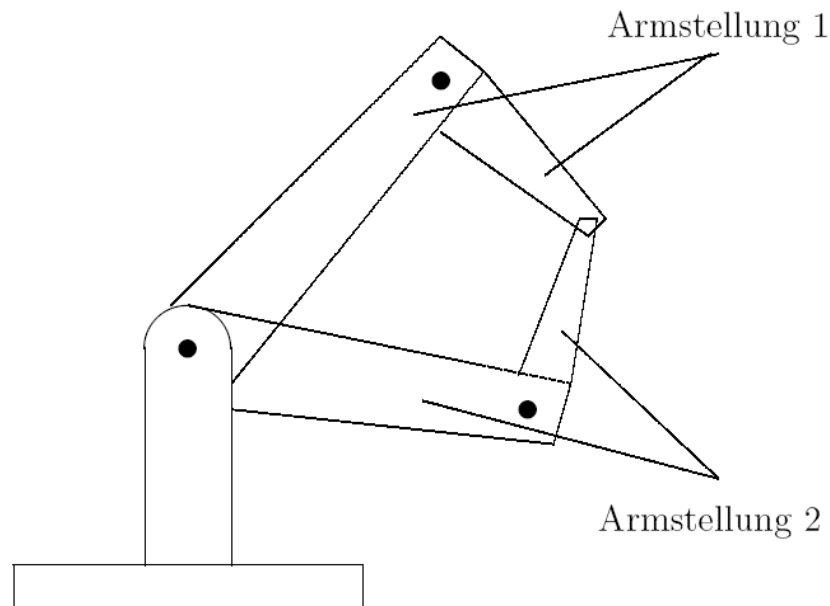
Gesucht: Gelenkparameter

$$\theta_i \text{ bzw. } d_i \quad 1 \leq i \leq n$$



# Probleme

- Die Lösungen sind oft nicht eindeutig. Es gibt also mehrere Gelenkstellungen, die zur gleichen Effektorstellung führen.



# Probleme

- Die gefundene mathematische Lösung kann eine unzulässige Stellung ergeben.
  - ein Winkel ist aufgrund mechanischer Begrenzungen nicht einstellbar
  - Glieder des Armes kollidieren mit Hindernissen
- unzulässige Zwischenstellung bei einer Bewegung von der Ist-Stellung zur neuen Soll-Stellung
- für die Rückwärtsberechnung existiert kein allgemeines Verfahren
- schnelle Berechnung notwendig (während der Bewegung des Roboters)

# Berechnungsmöglichkeiten

- analytische Verfahren
  - expliziter Zusammenhang zwischen den Gelenkparametern und den Elementen der Matrix  $M$  (einfache Gelenkanordnung)
- roboterspezifische Vorgehensweise
  - Formeln für die Rückwärtsrechnung lassen sich geschlossen angeben
  - keine Rechnung über die Transformationsmatrizen erforderlich
- Näherungsverfahren

# Ansatz von Paul zur Lösung des IKP

Aufstellung der kinematischen Grundgleichung:  $M = M_0 \cdot M_1 \cdots M_{n+1}$

Umformung:

$$M_0^{-1} \cdot M = M_1 \cdots M_{n+1}$$

$$M_1^{-1} \cdot M_0^{-1} \cdot M = M_2 \cdots M_{n+1}$$

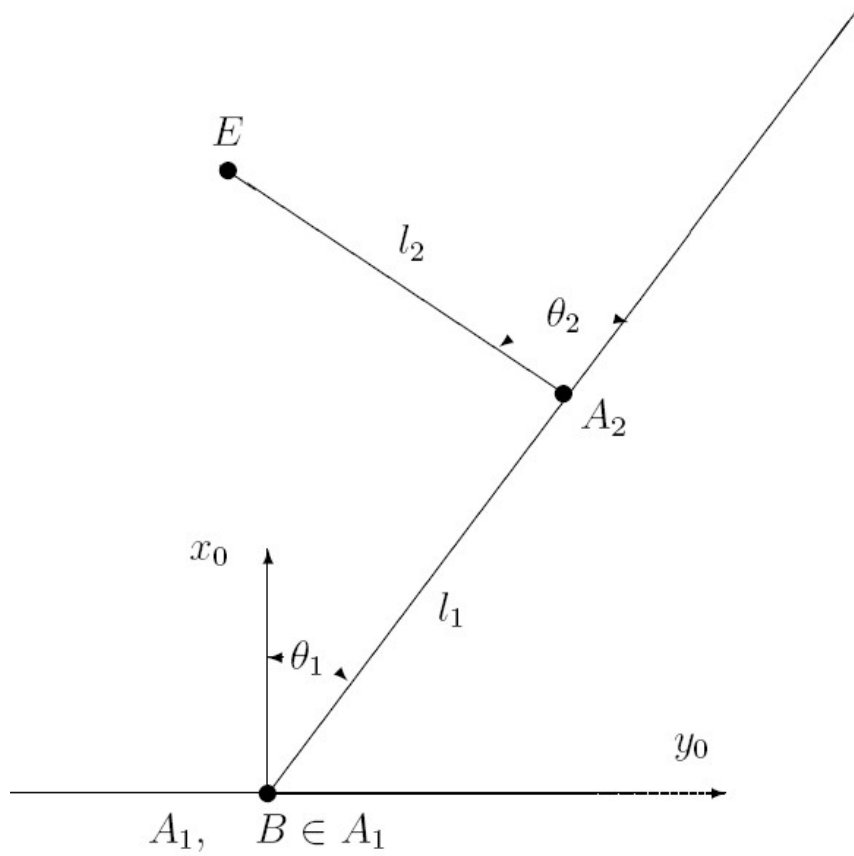
$\vdots$

$$M_n^{-1} \cdots M_0^{-1} \cdot M = M_{n+1}$$

Elementweises Gleichsetzen liefert 12 nichtriviale Gleichungen für jede dieser Matrixgleichungen

Auswertung dieser Gleichungen

# Planarer Zweiarmanipulator



Gegeben:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & x \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kinematische Grundgleichung:

$$M = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_2 c_{12} + l_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_2 s_{12} + l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Planarer Zweiarmanipulator

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & x \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_2 c_{12} + l_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_2 s_{12} + l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_i = \sin \theta_i$$

$$c_i = \cos \theta_i$$

$$s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$$

$$c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\alpha)$$

$$x = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos(\theta_1)$$

$$y = l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \sin(\theta_1)$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \text{atan2}(\sin(\alpha), \cos(\alpha)) = a$$

$$\theta_1 = \text{atan2}\left(\frac{y - l_2 \sin(\alpha)}{l_1}, \frac{x - l_2 \cos(\alpha)}{l_1}\right)$$

$$\theta_2 = \begin{cases} a - \theta_1 & -\pi < a - \theta_1 \leq \pi \\ a - \theta_1 + \pi & a - \theta_1 \leq -\pi \\ a - \theta_1 - \pi & a - \theta_1 > \pi \end{cases}$$