4 Roboterkinematik

Roboterarm und Gelenke

4.1 Grundlegende Begriffe

Mechanismus

- besteht aus einer Anzahl von ***starren Körpern (Glieder)***
- diese sind durch ***Gelenke*** verbunden
- Ein Gelenk verbindet ***genau zwei*** Glieder.
- Die Gelenke erlauben den Gliedern eine eingeschränkte Bewegung relativ zueinander.
- Ein Glied kann mehrere Gelenke haben.
- Zwei Glieder können durch mehrere Gelenke verbunden sein.
- Gelenke werden nicht als eigenständige materielle Körper angesehen, vielmehr werden die Gelenkhälften als Bestandteile der dadurch verbundenen Glieder betrachtet.

Kinematik

- Untersuchung der Bewegungsmöglichkeiten der Glieder eines gegebenen Mechanismus relativ zueinander
- Auftretende Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei Bewegung der Gelenke
- keine Betrachtung von Kräften
- Es wird abstrahiert, ob ein Gelenk motorisch angetrieben oder passiv bewegt wird.

Dynamik

- Betrachtung von Kräften, die auf den Mechanismus einwirken
- Trägheitskraft
- Schwerkraft

Analyse und Synthese

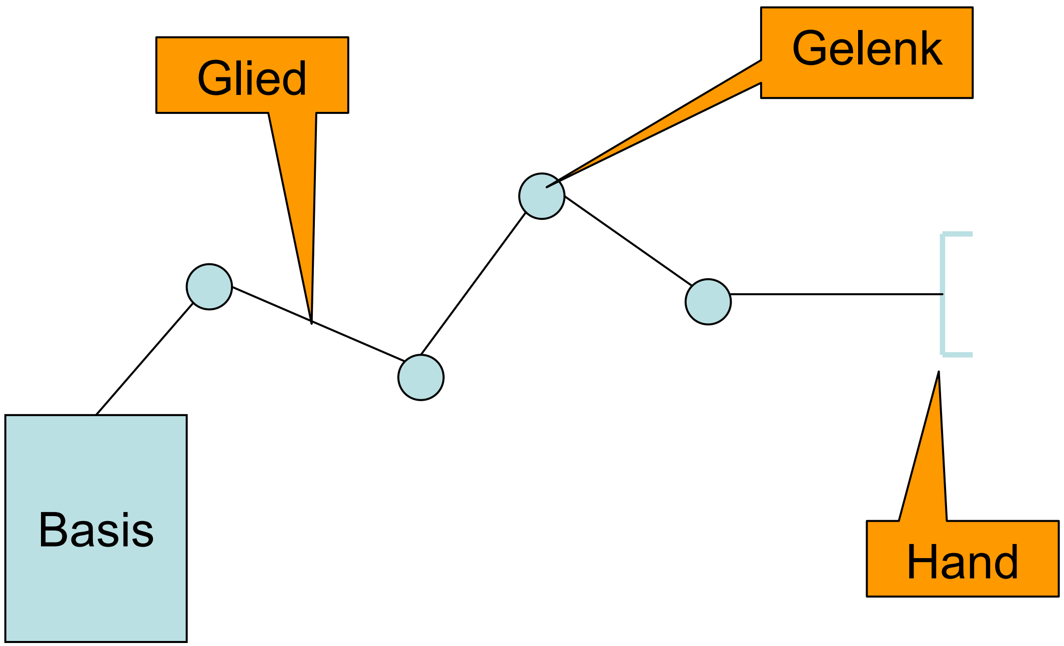
- Analyse
  - mathematische Erfassung der Zwangsbewegungen eines gegebenen Mechanismus
  - Zusammenhang zwischen den Gelenkeinstellungen und der Lage (Position und Orientierung) der Glieder zueinander
- Synthese
  - Konstruktion eines Mechanismus, der eine vorgeschriebene Bewegung realisiert

Kinematische Kette

- Jedes Glied hat ***maximal zwei*** Gelenke.
- Besitzt jedes Glied ***genau zwei*** Gelenke, so wird die kinematische Kette als ***geschlossen*** bezeichnet
- andernfalls als ***offen***

Offene kinematische Kette

- ein Ende ist der ***Effektor (Hand)***
- das andere Ende ist die ***(Roboter)basis***

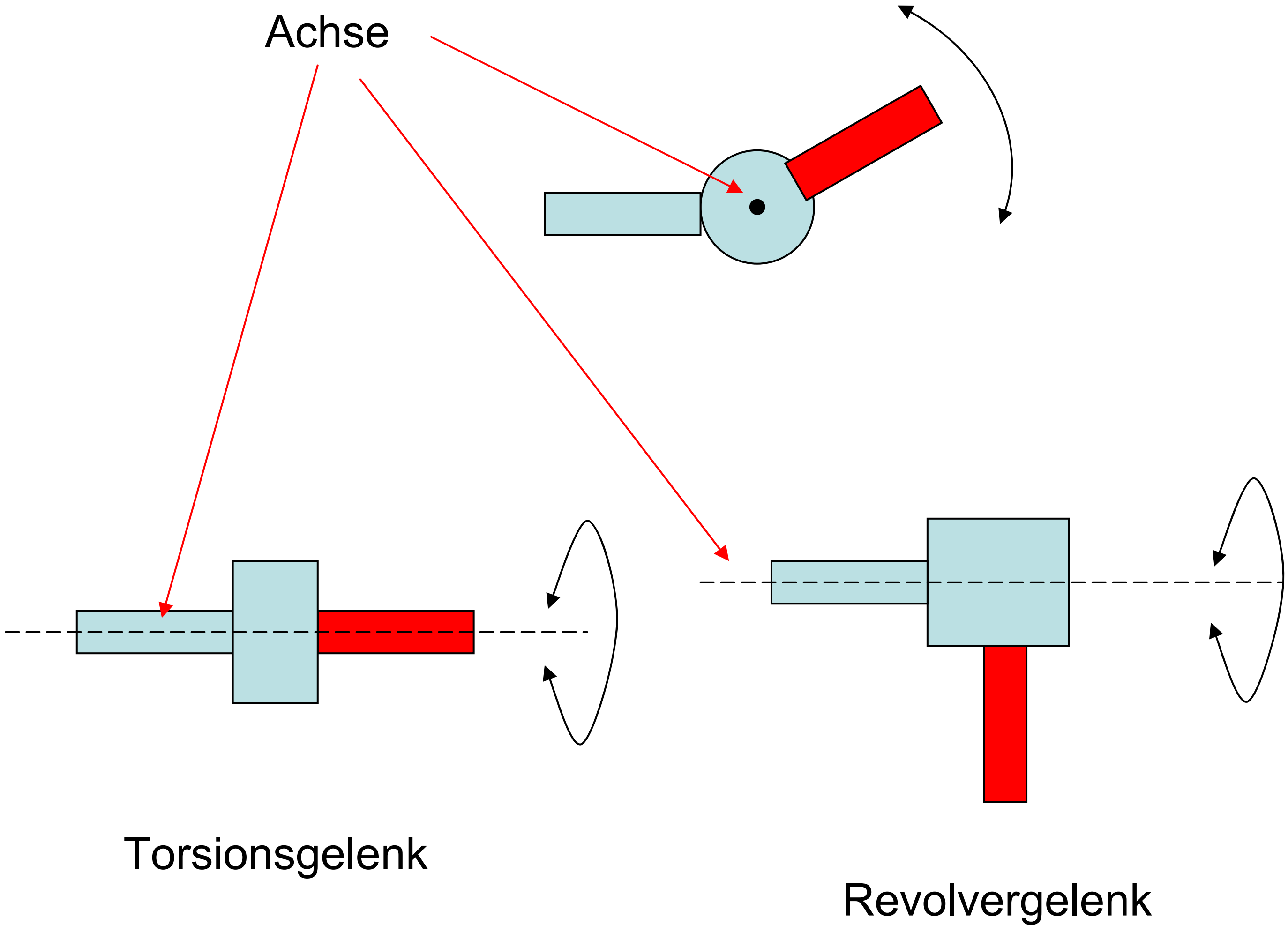


4.2 Gelenke

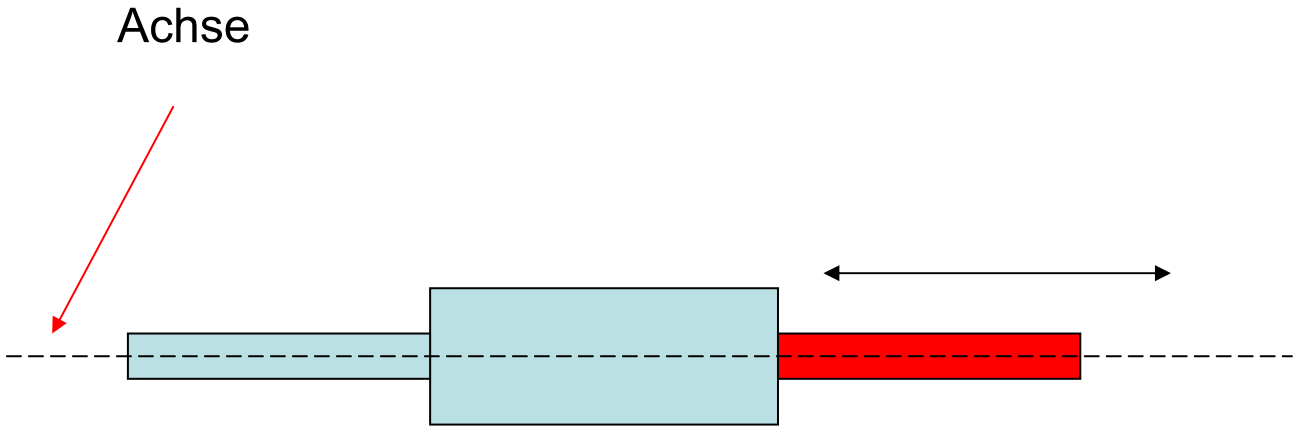
Gelenkarten

- ***Rotationsgelenk*** (Drehgelenk) – das eine Glied dreht sich relativ zum anderen um eine feste Achse
  - Torsionsgelenk
  - Revolvergelenk
- ***Translationsgelenk*** (Lineargelenk) – das eine Glied gleitet relativ zum anderen entlang einer festen Achse
- Weitere Arten können durch Kombination dieser beiden dargestellt werden.
  - Kugelgelenk
  - ebenes Gelenk

Rotationsgelenk



Translationsgelenk



Gelenkparameter

Rotationsgelenk → Drehwinkel → θ

Translationsgelenk → Vorschublänge → d

Weitere Begriffe

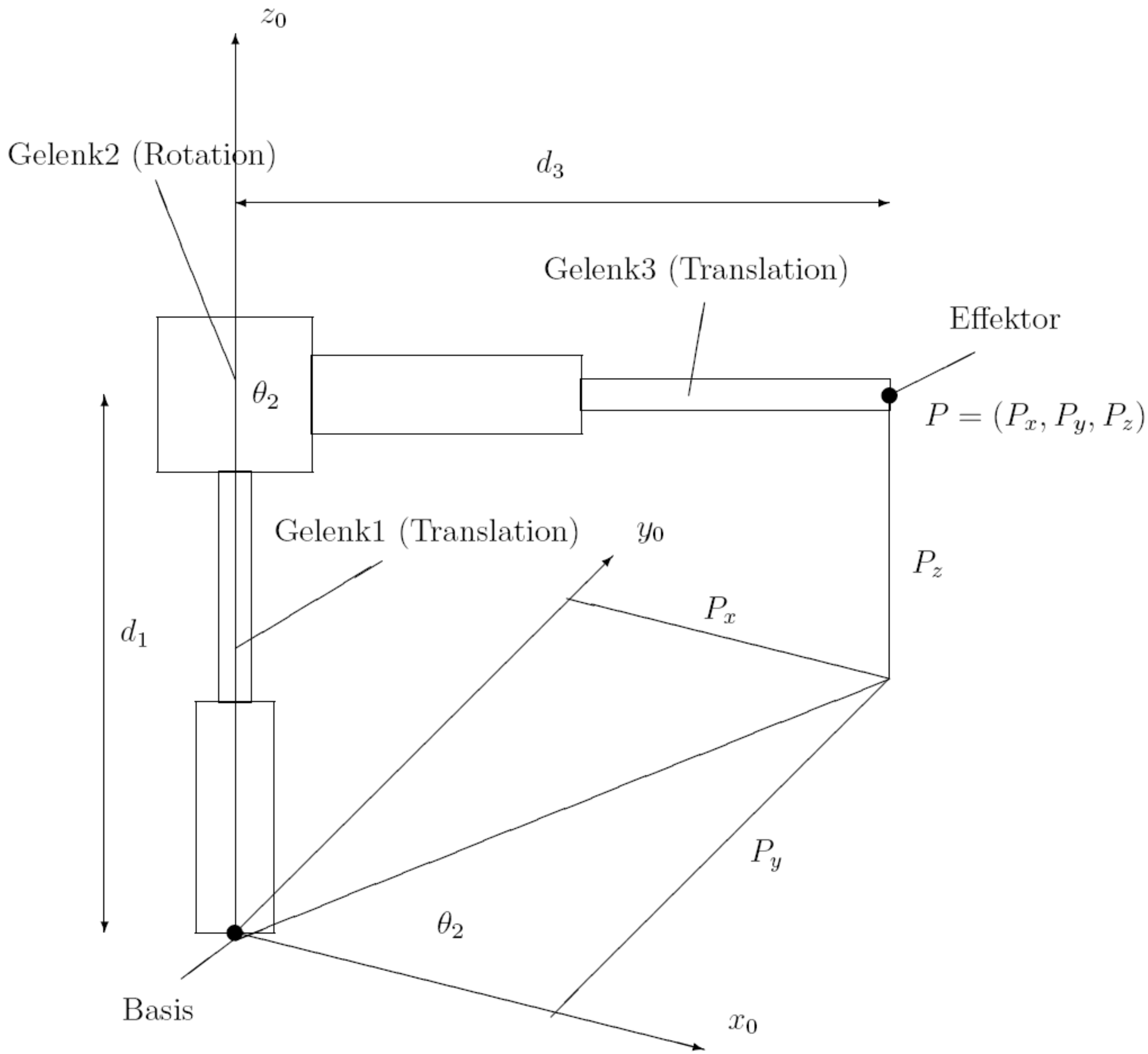
- ***ideale Gelenke*** – keine Begrenzungen der Bewegungen
- ***Gelenkkonfiguration (Konfiguration)*** – Menge von Gelenkeinstellungen (Gelenkparameter)
- ***Konfigurationsraum*** – Menge aller Gelenkkonfigurationen

4.3 Kinematische Grundprobleme

2 Aufgabenstellungen

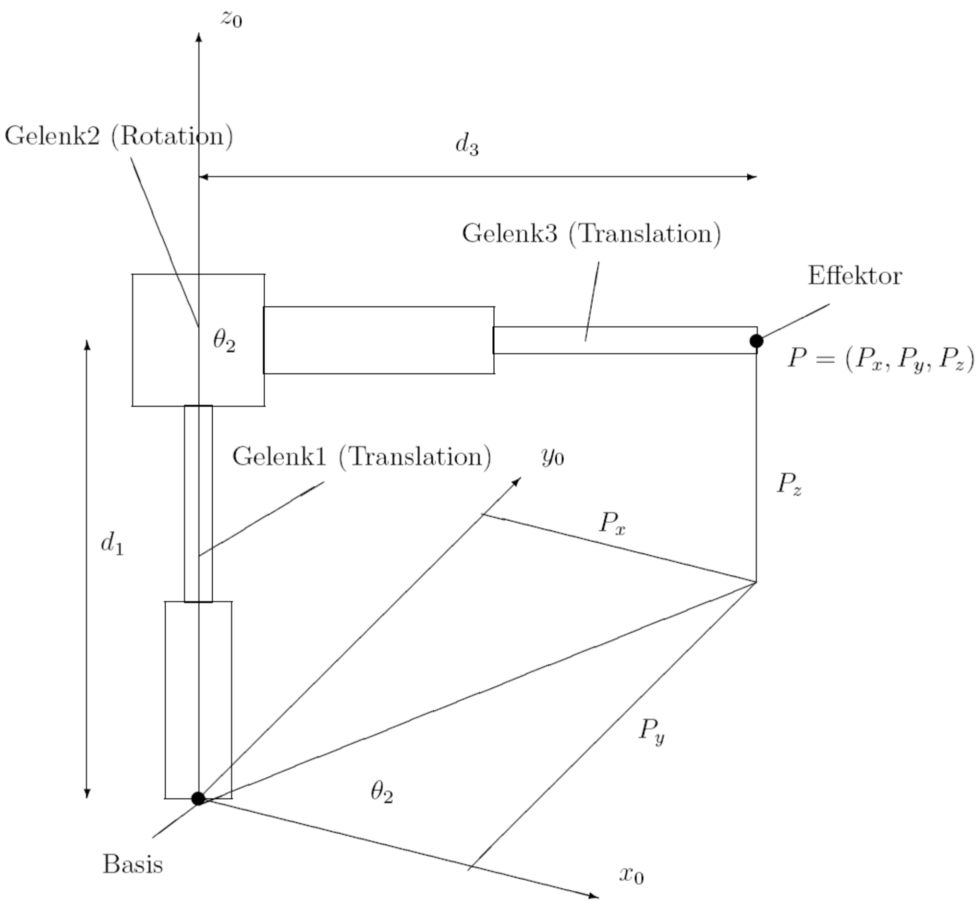
- ***Direktes kinematisches Problem (DKP)***
  - Welche Position und Orientierung nimmt der Effektor bezogen auf die Roboterbasis für eine gegebene Gelenkkonfiguration ein?
  - Lösung: direkte kinematische Transformation oder ***Vorwärtstransformation***
- ***Inverses kinematisches Problem (IKP)***
  - Welche Gelenkkonfiguration führt auf die vorgegebene Lage des Effektors?
  - Lösung: inverse kinematische Transformation oder ***Rückwärtstransformation***

Beispiel



z_0
Gelenk2 (Rotation)
d_3
Gelenk3 (Translation)
Effektor
θ_2
$P = (P_x, P_y, P_z)$
Gelenk1 (Translation)
y_0
P_z
P_x
d_1
P_y
θ_2
Basis
x_0

DKP



Gegeben: d_1, d_3, θ_2

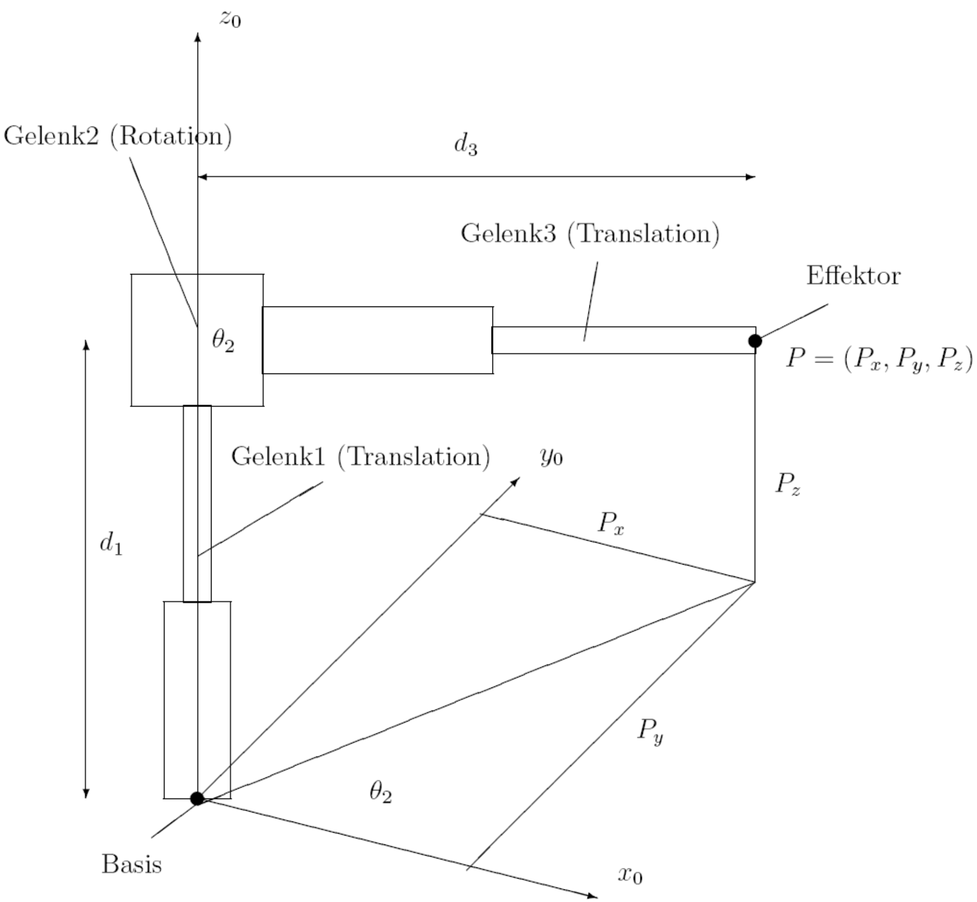
Gesucht: P_x, P_y, P_z

$$P_x = d_3 \cdot \cos\theta_2$$

$$P_y = d_3 \cdot \sin\theta_2$$

$$P_z = d_1$$

IKP



Gegeben: P_x, P_y, P_z

Gesucht: d_1, d_3, θ_2

$$d_1 = P_z$$

$$d_3 = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

Bemerkungen

- DKP lässt sich explizit, analytisch lösen
- für IKP ist dies i. a. nicht möglich
- aber IKP ist für die Robotik wichtiger

4.4 Stellungsbesschreibung und Stellungstransformation

Koordinatensysteme

Koordinatensystem K

Basisvektoren $\vec{x}_K, \vec{y}_K, \vec{z}_K$

Ursprung O_K

$$K_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} K_{a_1} \\ K_{a_2} \\ K_{a_3} \end{pmatrix}$$

$$K_{\vec{a}} = K_{a_1} \cdot \vec{x}_K + K_{a_2} \cdot \vec{y}_K + K_{a_3} \cdot \vec{z}_K$$

$$P \in R^3$$

$$K_P = K_{\vec{P}} = \begin{pmatrix} K_{P_1} \\ K_{P_2} \\ K_{P_3} \end{pmatrix}$$

Ortsvektor

Koordinatensysteme

$$S$$

Objekt-KS $\quad \vec{x}_S\,, \vec{y}_S\,, \vec{z}_S$

$$O_S$$

$$B$$

Bezugs-KS $\quad \vec{x}_B\,, \vec{y}_B\,, \vec{z}_B$

$$O_B$$

Position, Orientierung und Stellung

$$ {}^{B}O_S $$

Position von S in bezug auf B

$$ {}^{B}R_S = \left({}^{B}\vec{x}_S \quad {}^{B}\vec{y}_S \quad {}^{B}\vec{z}_S \right) $$

Orientierung von S in bezug auf B

$$ \boxed{\left({}^{B}R_S , {}^{B}O_S \right)} $$

Stellung von S in bezug auf B

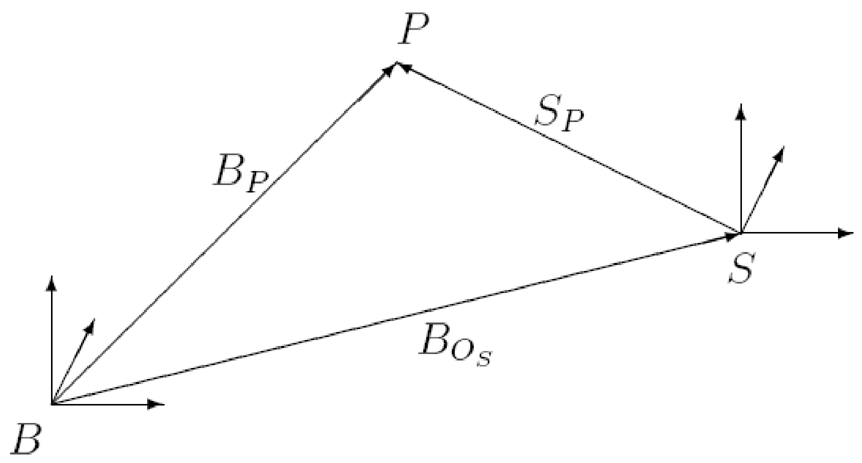
Orientierung

$$\vec{x}_B \cdot \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{x_{s_1}} \\ B_{x_{s_2}} \\ B_{x_{s_3}} \end{pmatrix} = B_{x_{s_1}} \qquad \vec{y}_B \cdot \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{x_{s_1}} \\ B_{x_{s_2}} \\ B_{x_{s_3}} \end{pmatrix} = B_{x_{s_2}} \qquad \vec{z}_B \cdot \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{x_{s_1}} \\ B_{x_{s_2}} \\ B_{x_{s_3}} \end{pmatrix} = B_{x_{s_3}}$$

$$B_{\vec{x}_S} = \begin{pmatrix} B_{x_{s_1}} \\ B_{x_{s_2}} \\ B_{x_{s_3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_B \cdot \vec{x}_S \\ \vec{y}_B \cdot \vec{x}_S \\ \vec{z}_B \cdot \vec{x}_S \end{pmatrix}$$

$$\boxed{{}^B R_S = \begin{pmatrix} B_{\vec{x}_S} & B_{\vec{y}_S} & B_{\vec{z}_S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_B \cdot \vec{x}_S & \vec{x}_B \cdot \vec{y}_S & \vec{x}_B \cdot \vec{z}_S \\ \vec{y}_B \cdot \vec{x}_S & \vec{y}_B \cdot \vec{y}_S & \vec{y}_B \cdot \vec{z}_S \\ \vec{z}_B \cdot \vec{x}_S & \vec{z}_B \cdot \vec{y}_S & \vec{z}_B \cdot \vec{z}_S \end{pmatrix}}$$

Stellungstransformation



$$T : R^3 \to R^3$$

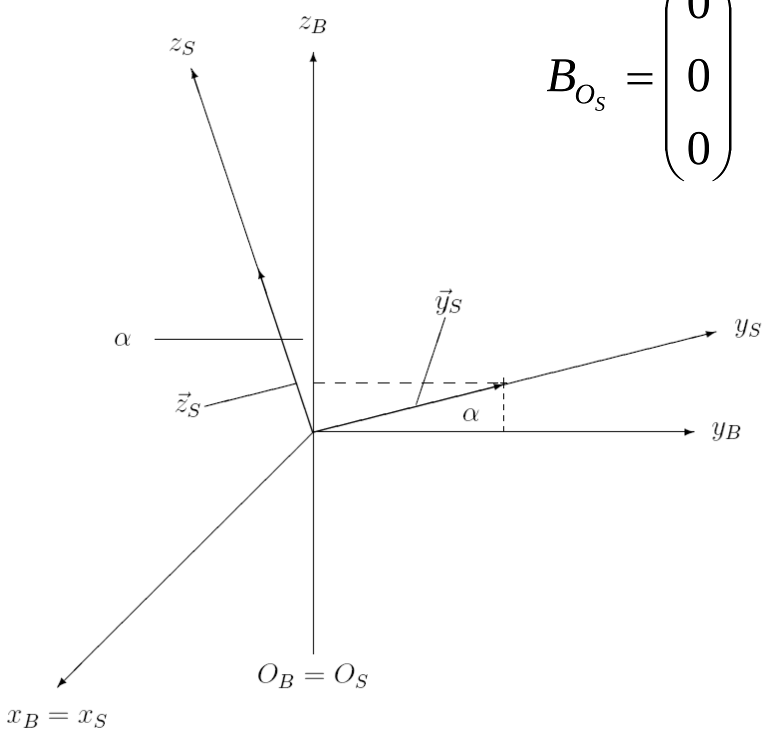
$$T(S_P) = B_P$$

$$\boxed{B_P = {}^B R_S \cdot S_P + B_{O_S}}$$

$$\boxed{T = \left({}^B R_S , B_{O_S} \right)}$$

S entsteht aus B durch Translation und Rotation

Rotation um die x-Achse



$$B_{O_S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B_{\vec{x}_S} = \begin{pmatrix} \vec{x}_B \cdot \vec{x}_S \\ \vec{y}_B \cdot \vec{x}_S \\ \vec{z}_B \cdot \vec{x}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{\vec{y}_S} = \begin{pmatrix} \vec{x}_B \cdot \vec{y}_S \\ \vec{y}_B \cdot \vec{y}_S \\ \vec{z}_B \cdot \vec{y}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \cos(90° - \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$B_{\vec{z}_S} = \begin{pmatrix} \vec{x}_B \cdot \vec{z}_S \\ \vec{y}_B \cdot \vec{z}_S \\ \vec{z}_B \cdot \vec{z}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(90° + \alpha) \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\boxed{{}^{B}R_S = R_{x_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}$$

Rotation um y bzw. z-Achse

$$ {}^{B}R_{S} = R_{y_{\beta}} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} $$

$$ {}^{B}R_{S} = R_{z_{\gamma}} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Zwischen-KS Z

$$T_1 = \left({}^{Z}R_S, Z_{O_S}\right) = \left(R_1, p_1\right)$$

$$T_2 = \left({}^{B}R_Z, B_{O_Z}\right) = \left(R_2, p_2\right)$$

$$T_3 = \left({}^{B}R_S, B_{O_S}\right) = \left(R_3, p_3\right)$$

$$T_3 = T_2 \cdot T_1$$

$$T_3(S_P) = T_2(T_1(S_P)) = T_2(Z_P) = B_P$$

Hintereinanderausführung von T_1 und T_2

$$\boxed{\begin{gathered} R_3 = R_2 \cdot R_1 \\ p_3 = R_2 \cdot p_1 + p_2 \end{gathered}}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
T_3(S_P) = B_P &= T_2(T_1(S_P)) \\
&= R_2 \cdot T_1(S_P) + p_2 \\
&= R_2(R_1 \cdot S_P + p_1) + p_2 \\
&= (R_2 \cdot R_1) \cdot S_P + (R_2 \cdot p_1 + p_2) \\
&= R_3 \cdot S_P + p_3
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle $P \in R^3$. Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

$$R_3 \cdot S_P + p_3 = (R_2 \cdot R_1) \cdot S_P + (R_2 \cdot p_1 + p_2)$$

$$S_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow p_3 = R_2 \cdot p_1 + p_2$$

$$S_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = R_2 \cdot R_1$$

Bemerkung

- Folgen von Stellungstransformationen liefern bei der Berechnung komplizierte, schwer handhabbare Ausdrücke

$$T_4 = T_3 \cdot T_2 \cdot T_1$$

$$T_2 \cdot T_1 = \left(R_2 \cdot R_1, R_2 \cdot p_1 + p_2\right)$$

$$T_4 = \left(R_3 \cdot R_2 \cdot R_1, R_3 \cdot (R_2 \cdot p_1 + p_2) + p_3\right)$$

Eigenschaften

$$T = (R, p)$$

R – orthogonale Matrix $\boxed{R^{-1} = R^T}$ $\longrightarrow$ $\left|\det(R)\right| = 1$

$$\boxed{({}^A R_B)^{-1} = {}^B R_A}$$

Beispiel – Rotation x-Achse

$$R_{x_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \overset{\alpha \rightarrow -\alpha}{\Longrightarrow} \quad (R_{x_\alpha})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_{x_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (R_{x_\alpha})^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Gruppe der Stellungstransformationen

$$\boxed{ST = \left\{ T : T = (R.p),\ R^{-1} = R^{T} \right\}}$$

bildet eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung

Einselement: $$\boxed{E = \left(I, \vec{0} \right)}$$

Inverses Element: $$\boxed{T^{-1} = \left(R^{T}, -R^{T} \cdot p \right)}$$

Beweis

$$T_2 \cdot T_1 = (R_2 \cdot R_1, R_2 \cdot p_1 + p_2) \in ST,$$

wegen

$$(R_2 \cdot R_1)^{-1} = R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} = R_1^T \cdot R_2^T = (R_2 \cdot R_1)^T.$$

$$T \cdot E = (R \cdot I, R \cdot \vec{0} + p) = (R, p) = T$$

$$E \cdot T = (I \cdot R, I \cdot p + \vec{0}) = (R, p) = T$$

$$T^{-1} \cdot T = (R^T \cdot R, R^T \cdot p + (-R^T \cdot p) = (I, \vec{0}) = E$$

$$T \cdot T^{-1} = (R \cdot R^T, R \cdot (-R^T \cdot p) + p) = (I, \vec{0}) = E$$

4.5 Homogene Koordinaten und homogene Transformationsmatrizen

Homogene Koordinaten

$$P = (x, y, z)^T \in R^3$$

$$\boxed{P_H = (hx, hy, hz, h)^T, \quad h \in R, \quad h \neq 0}$$

In der Kinematik ist h=1 wichtig

Unter einer homogenen Transformationsmatrix D verstehen wir eine 4 × 4 - Matrix mit folgenden Aufbau:

- R - 3 × 3 – Matrix
- T − 3 × 1 – Vektor
- P − 1 × 3 – Vektor
- S – Zahl

$$D = \left(\begin{array}{c|c} R & T \\ \hline P & S \end{array}\right)$$

R kann für die Rotation und Skalierung benutzt werden.
T beschreibt die Translation, P die Perspektivtrans-
formation und S ebenfalls eine Skalierung

Beispiel 1

- Die Translation um den Vektor (T_x, T_y, T_z) wird folgendermaßen beschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+T_x \\ y+T_y \\ z+T_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

- Eine Skalierung mit den Faktoren S_x, S_y, S_z ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x x \\ S_y y \\ S_z z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Sollen alle drei Achsen um den gleichen Faktor S skaliert werden, dann kann diese Gesamtskalierung auch durch folgende Matrixmultiplikation beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{1}{S} \end{pmatrix}$$

- Die Division durch die vierte Koordinate $\frac{1}{S}$ liefert die üblichen kartesischen Koordinaten.

Beispiel 3

- Die Rotation um die x-Achse mit Winkel α_x ist folgendermaßen möglich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_x) & -\sin(\alpha_x) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_x) & \cos(\alpha_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos(\alpha_x) - z\sin(\alpha_x) \\ y\sin(\alpha_x) + z\cos(\alpha_x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Analog beschreibt man die Rotation um die y-Achse mit Winkel α_y und die Rotation um die z-Achse mit Winkel α_z.

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_y) & 0 & \sin(\alpha_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha_y) + z\sin(\alpha_y) \\ y \\ -x\sin(\alpha_y) + z\cos(\alpha_y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_z) & -\sin(\alpha_z) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_z) & \cos(\alpha_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha_z) - y\sin(\alpha_z) \\ y\cos(\alpha_z) + x\sin(\alpha_z) \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4

- Die Zentralprojektion auf die Parallele zur (x, y) -Ebene im Abstand f mit Projektionszentrum im Koordinatenursprung ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{f} \end{pmatrix}$$

- Zur Berechnung der kartesischen projizierten Koordinaten muss durch die vierte homogene Koordinate dividiert werden.

$$\frac{x}{\frac{z}{f}} = \frac{x \cdot f}{z} \qquad \frac{y}{\frac{z}{f}} = \frac{y \cdot f}{z} \qquad \frac{z}{\frac{z}{f}} = \frac{z \cdot f}{z} = f$$

Stellungstransformation

$$T = (R, p) \Longrightarrow \boxed{\Psi(T) = M = \left(\begin{array}{ccc|c} & R & & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

$$SH_4 = \left\{ M : M = \left(\begin{array}{ccc|c} & R & & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),\ R^{-1} = R^T \right\}$$

Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation

Einselement:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverses Element:

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & R^T & & -R^T \cdot p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Beweis

$$M_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} & R_1 & & p_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad M_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} & R_2 & & p_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M_1 \cdot M_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} & R_1 \cdot R_2 & & R_1 \cdot p_2 + p_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wegen $(R_1 \cdot R_2)^{-1} = (R_1 \cdot R_2)^T$ gilt $M_1 \cdot M_2 \in SH_4$.

Eigenschaft

Die Gruppen ST und SH_4 sind isomorph

$$\boxed{\forall T_1, T_2 \in ST: \quad \Psi(T_1 \cdot T_2) = \Psi(T_1) \cdot \Psi(T_2)}$$

Beweis: $T_1 = (R_1, p_1)$ $\quad T_2 = (R_2, p_2)$ $\quad T_1 \cdot T_2 = (R_1 \cdot R_2, R_1 \cdot p_2 + p_1)$

$$\Psi(T_1) = M_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} & R_1 & & p_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \Psi(T_2) = M_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} & R_2 & & p_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(T_1 \cdot T_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} & R_1 \cdot R_2 & & R_1 \cdot p_2 + p_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = M_1 \cdot M_2 = \Psi(T_1) \cdot \Psi(T_2)$$

Eigenschaft

$$T = (R, p)$$

$$\Psi(T) = M = \left(\begin{array}{ccc|c} & R & & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$P, Q \in R^3, \; T(P) = Q$$

$$Q_H = \begin{pmatrix} Q \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_H = \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Q_H = M \cdot P_H}$$

Beweis:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & R & & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot P + p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

- Die Gruppen ST und SH_4 sind nicht kommutativ
- Das Resultat von Stellungstransformationen kann mit homogenen Koordinaten berechnet werden
- Die Hintereinanderausführung von Stellungstransformationen kann auf die Multiplikation von Matrizen zurückgeführt werden

4.6 Beschreibung der Roboterkinematik nach Denavit-Hartenberg

Satz

Gegeben: KS B

gerichtete Gerade (Achse) A

$\Rightarrow$ $\exists S$ (Koordinatensystem)

$O_S \in A$ z - Achse von S ist gleichgerichtet mit A

$$T = \left({}^{B}R_S, B_{O_S}\right) \Rightarrow \exists \theta, d, a, \alpha \in R$$

$$\Psi(T) = M = Rot_z(\theta) \cdot Trans_z(d) \cdot Trans_x(a) \cdot Rot_x(\alpha)$$

Transformationen

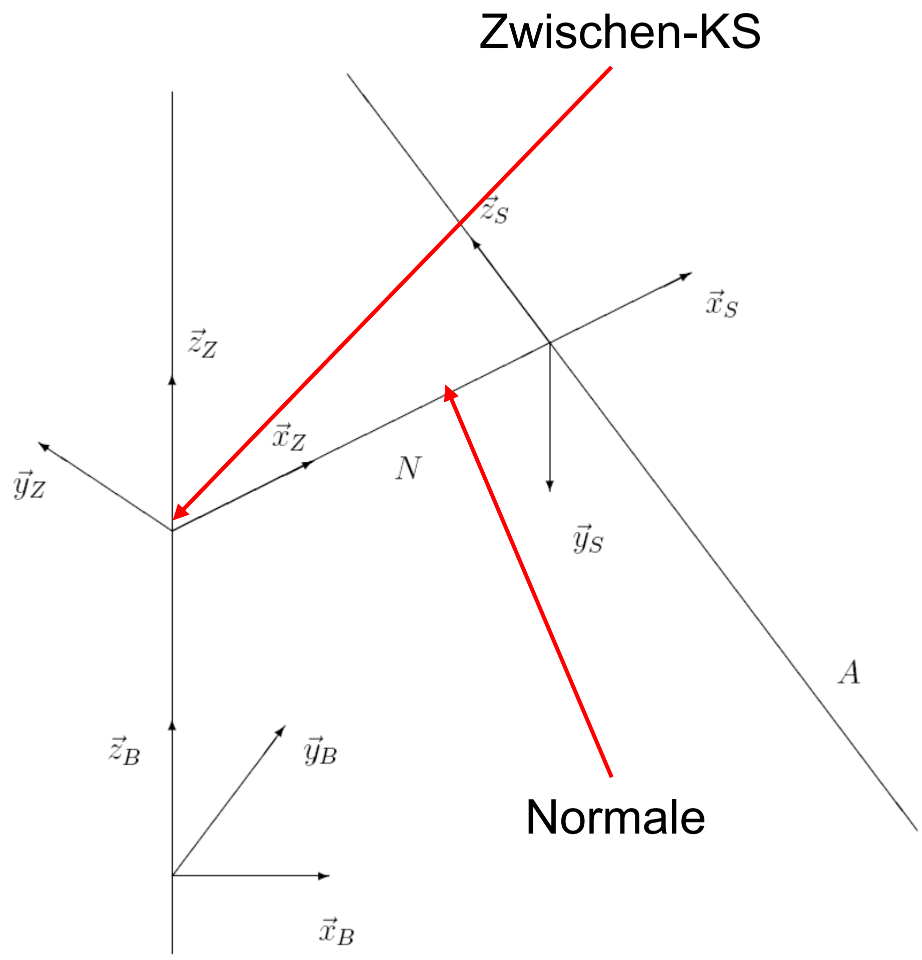
$$Rot_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Trans_x(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rot_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Trans_z(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatensystem S



$$z_B \cap A = \varnothing$$

$$z_B \text{ nicht parallel } A$$

$$T_1 = \left({}^{Z}R_S, Z_{O_S}\right)$$

$$T_1 = Trans_x(a) \cdot Rot_x(\alpha)$$

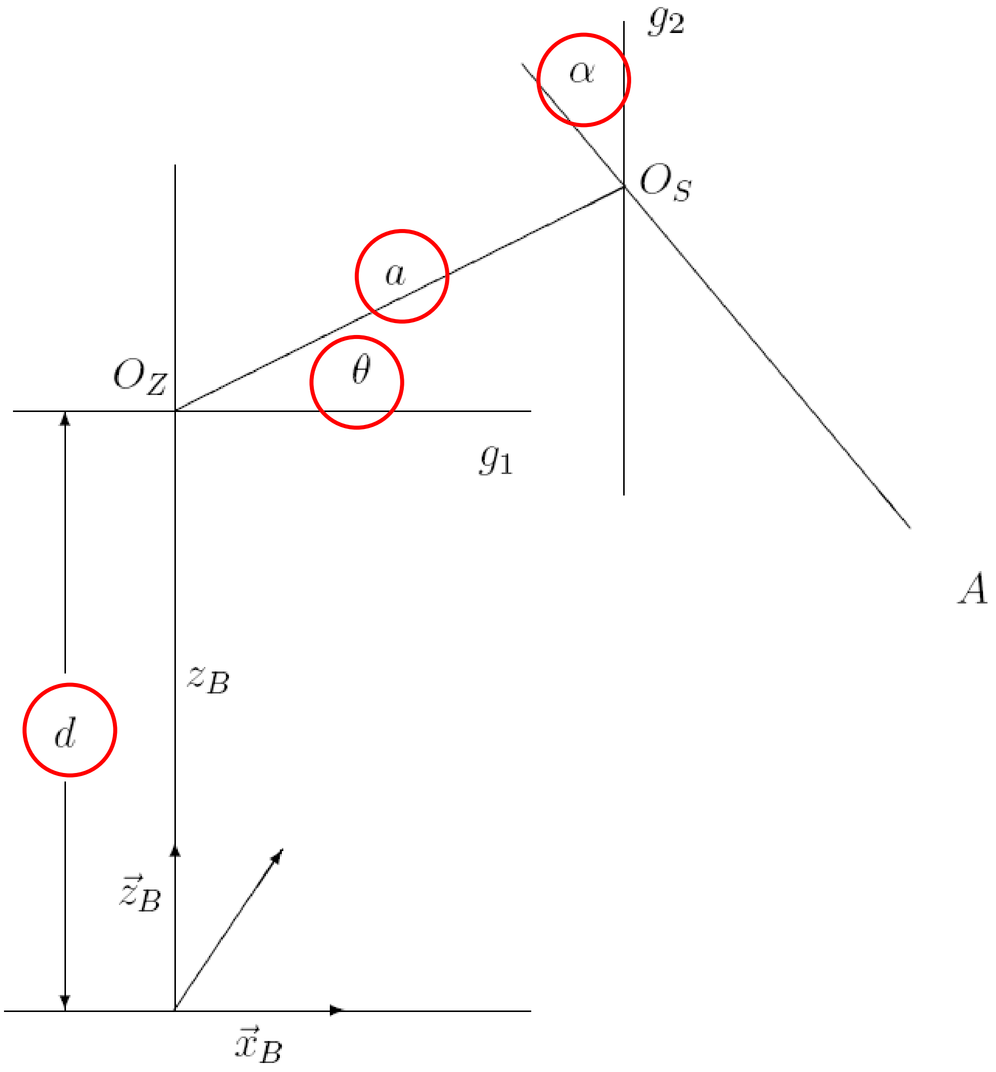
$$T_2 = \left({}^{B}R_Z, B_{O_Z}\right)$$

$$T_2 = Rot_z(\theta) \cdot Trans_z(d)$$

$$T = T_2 \cdot T_1$$

$$T_3(S_P) = T_2(T_1(S_P)) = T_2(Z_P) = B_P$$

DH – Parameter (Quadrupel)



Spezialfälle

$z_B \cap A \neq \emptyset$ $\Longrightarrow$ $\boxed{a = 0}$

z_B parallel A $\Longrightarrow$ $\boxed{d \text{ beliebig}, \ \alpha = 0 \vee \alpha = \pi}$

$z_B \cap A \neq \emptyset$

z_B parallel A $\Longrightarrow$

$\boxed{d, \theta \text{ beliebig}, \ \alpha = 0 \vee \alpha = \pi, \ a = 0}$

Anwendung auf Roboter

- offene kinematische Kette
- n Gelenke
- beliebiges festes KS $B=S_0$, bezüglich dessen die Roboterbasis unbeweglich ist
- im Effektor sei ein KS $E=S_{n+2}$ gegeben
- die Gelenkachsen seien von der Roboterbasis beginnend, von A_1 bis A_n durchnumeriert

Anwendung des Satzes

$$B \rightarrow S_0 \qquad A \rightarrow A_1$$

$$\longrightarrow \quad S_1 \quad (O_{S_1} \in A_1) \qquad (\theta_0, d_0, a_0, \alpha_0)$$

$$\longrightarrow \quad S_2 \quad (O_{S_2} \in A_2) \qquad (\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1)$$

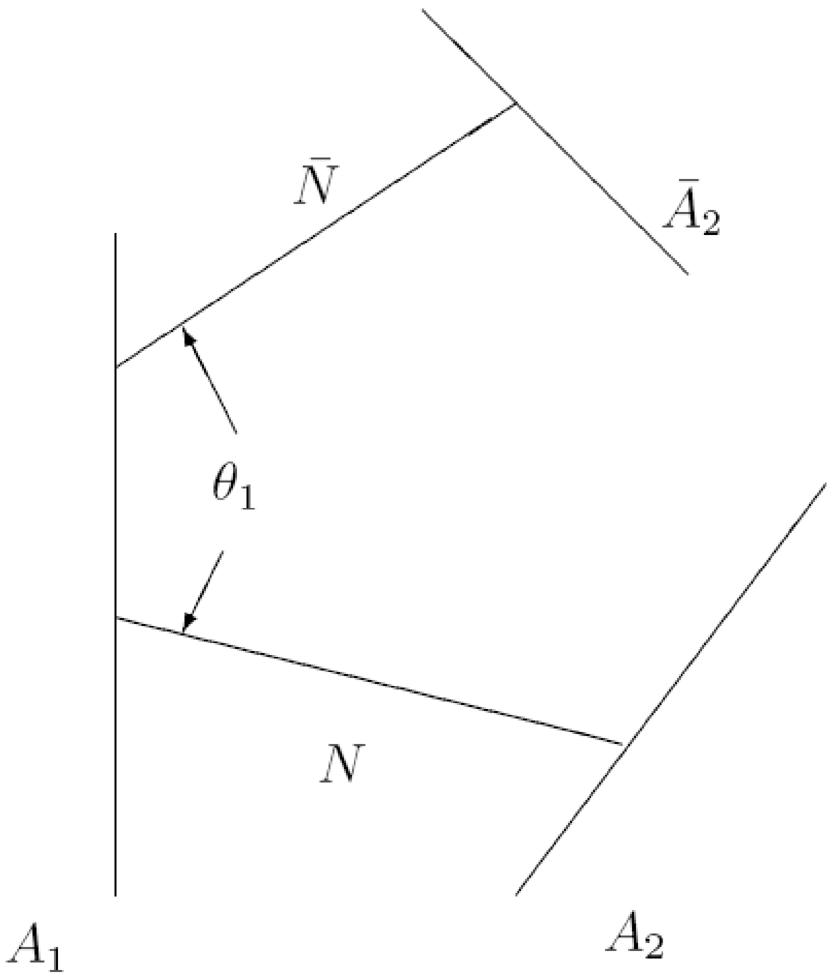
Bei einer Bewegung des Gelenkes 1 ändert sich im Quadrupel

$$(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1)$$

entweder θ_1 Rotationsgelenk

oder d_1 Translationsgelenk

2 benachbarte Gelenke



A_2 und der gesamte restliche Roboterarm dreht sich um die Achse A_1 (Rotationsgelenk)

Die drei Größen,

$$d_1, a_1, \alpha_1$$

die sich nicht verändern (bei Bewegung von Gelenk 1) spezifizieren das Glied, welches A_1 und A_2 verbindet.

Anwendung des Satzes

$B \rightarrow S_0$

$A \rightarrow A_1$

→

$S_1 \quad (O_{S_1} \in A_1)$

$(\theta_0, d_0, a_0, \alpha_0)$

→

$S_2 \quad (O_{S_2} \in A_2)$

$(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1)$

$S_i \quad (O_{S_i} \in A_i)$

$(\theta_{i-1}, d_{i-1}, a_{i-1}, \alpha_{i-1})$

$\xrightarrow[1 \leq i \leq n-1]{}$

$S_{i+1} \quad (O_{S_{i+1}} \in A_{i+1})$

$(\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i)$

$S_n \quad (O_{S_n} \in A_n)$

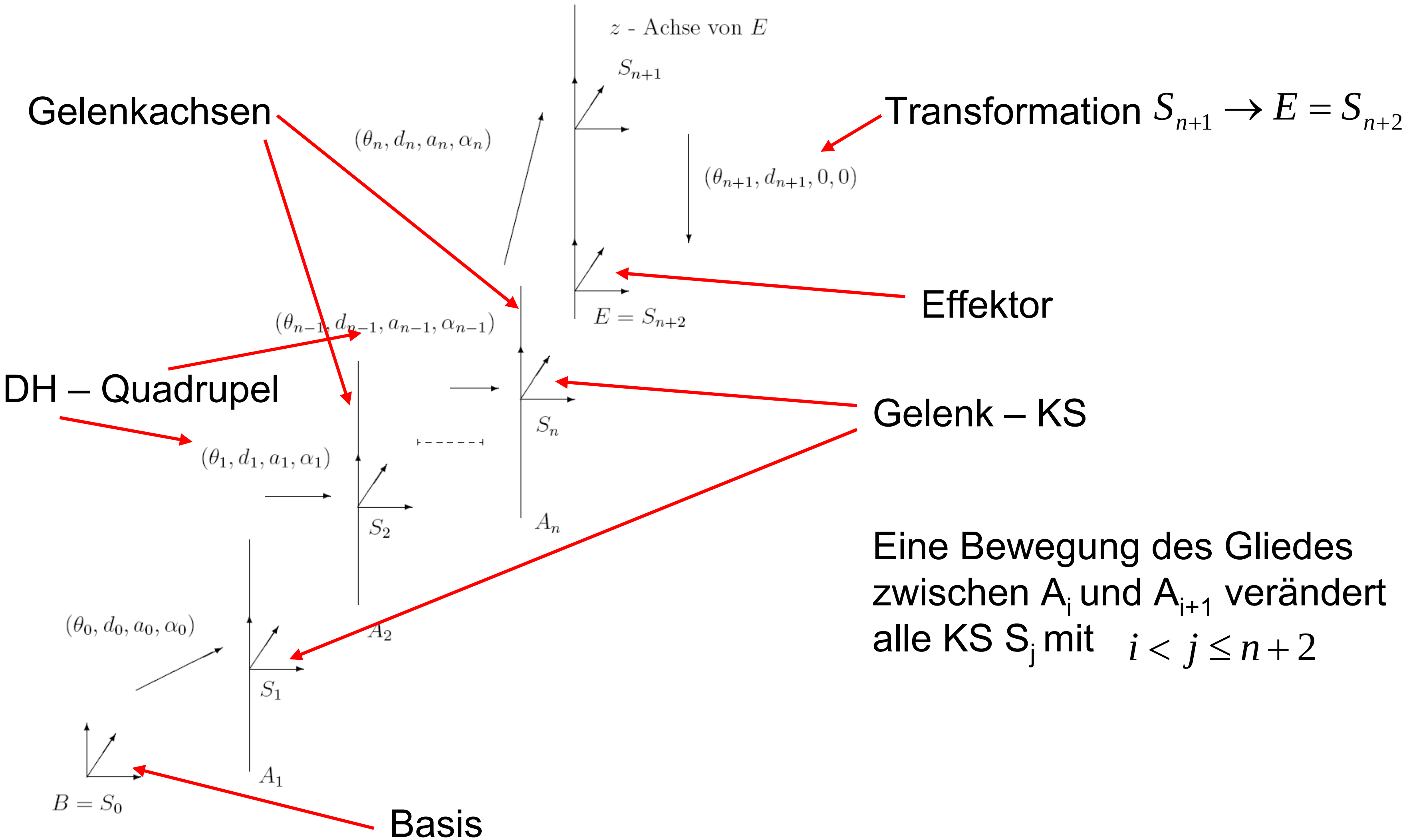
$(\theta_{n-1}, d_{n-1}, a_{n-1}, \alpha_{n-1})$

$\xrightarrow[i = n]{}$

$S_{n+1} \quad (O_{S_{n+1}} \in z_E)$

$(\theta_n, d_n, a_n, \alpha_n)$

Transformationen



Eine Bewegung des Gliedes zwischen A_i und A_{i+1} verändert alle KS S_j mit $i < j \leq n+2$

Offene Kinematische Kette

$$B \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{n-1} \to A_n \to E$$

$(\theta_0, d_0, a_0, \alpha_0)$ $(\theta_1, d_1, a_1, \alpha_1)$ $\cdots$ $(\theta_n, d_n, a_n, \alpha_n)$ $(\theta_{n+1}, d_{n+1}, 0, 0)$

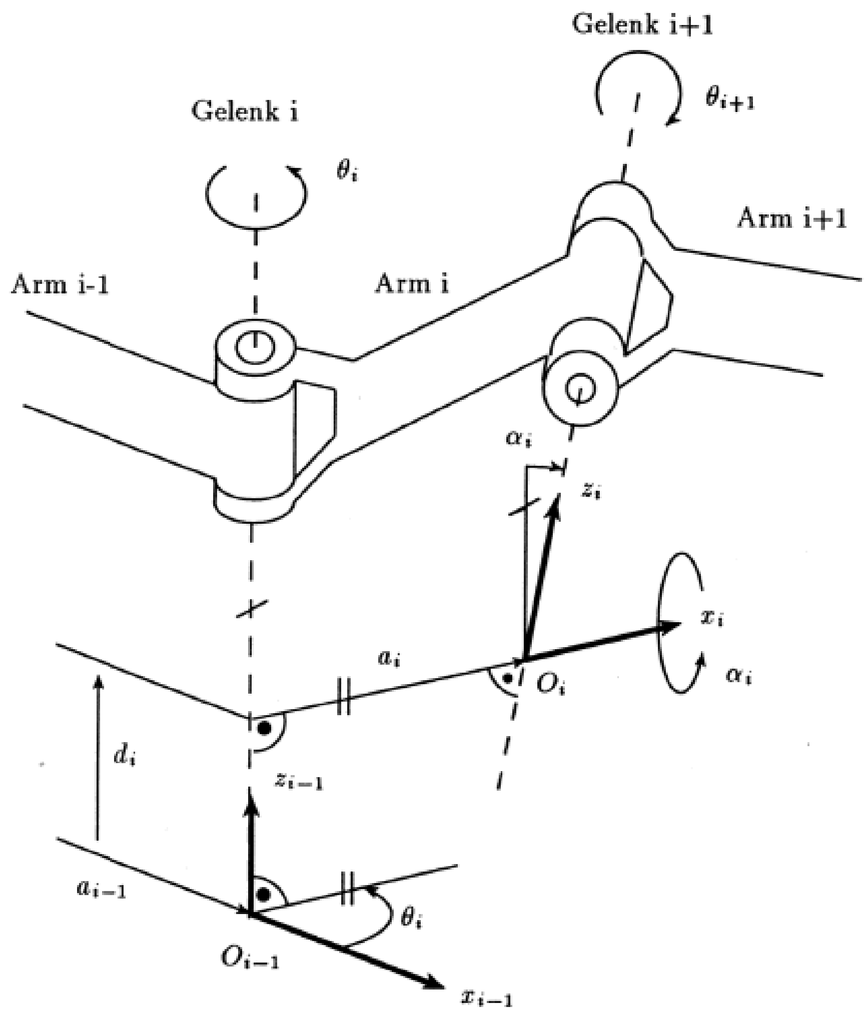
$$(\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i) \quad 1 \le i \le n$$

oder

Ein Parameter repräsentiert die Gelenkbewegung (Gelenkvariable)

3 Parameter sind konstant

2 Gelenke



Gelenk i+1
θ_{i+1}
Gelenk i
θ_i
Arm i+1
Arm i-1
Arm i
α_i
z_i
x_i
a_i
O_i
α_i
d_i
z_{i-1}
a_{i-1}
θ_i
O_{i-1}
x_{i-1}

DKP – Kinematische Grundgleichung

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} & {}^{B}R_{E} & & B_{O_E} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M = \left(m_{ij}\right)_{i,j=1}^{4} = \prod_{i=0}^{n+1} Rot_z(\theta_i) \cdot Trans_z(d_i) \cdot Trans_x(a_i) \cdot Rot_x(\alpha_i)$$

12 nichttriviale skalare Elementgleichungen

Bemerkungen

- können die DH – Parameter beliebig gewählt werden, so setzt man sie i. a. gleich 0
- die Gelenkübergänge werden einheitlich beschrieben
- die Bewegung des Gelenkes wird nur durch einen Parameter modifiziert

Zusammenfassung

$$M = \left(m_{ij}\right)_{i,j=1}^{4} = \prod_{i=0}^{n+1} Rot_z(\theta_i) \cdot Trans_z(d_i) \cdot Trans_x(a_i) \cdot Rot_x(\alpha_i)$$

$$M = \prod_{i=0}^{n+1} M_i = \prod_{i=0}^{n+1} Rot_z(\theta_i) \cdot Trans_z(d_i) \cdot Trans_x(a_i) \cdot Rot_x(\alpha_i)$$

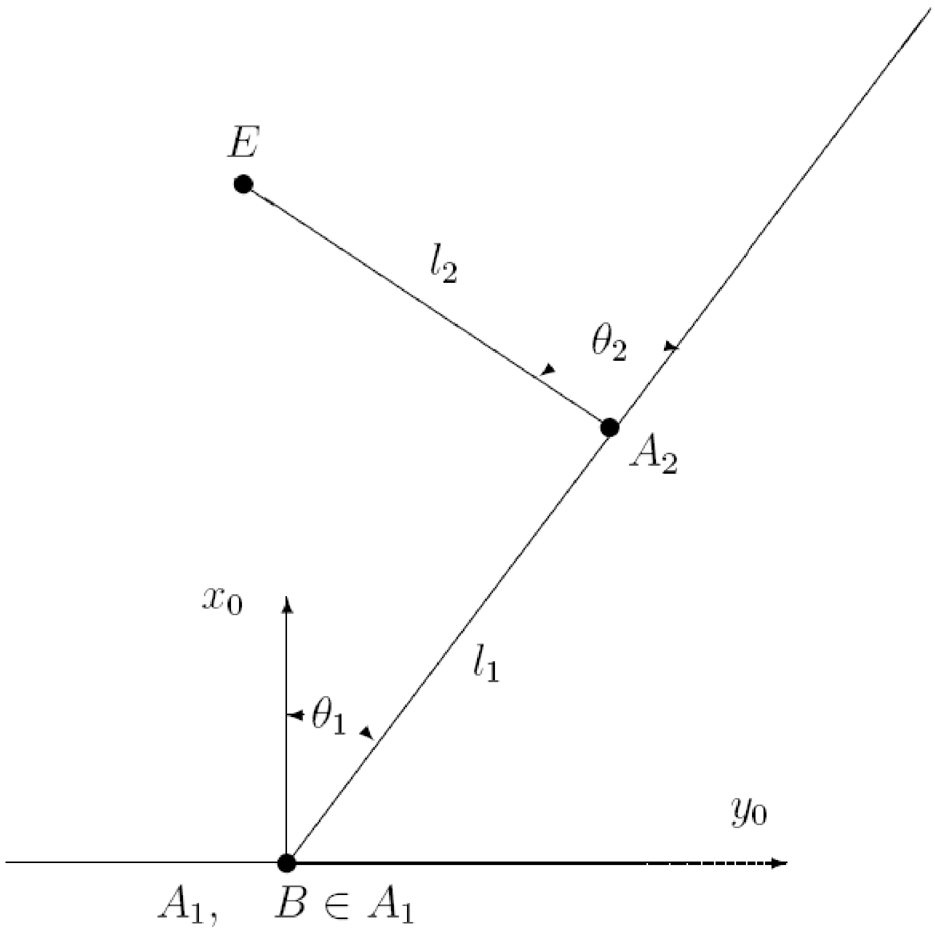
$$M_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Beispiel – Zweiarmmanipulator



A_1 und A_2 stehen senkrecht auf der Bildebene

DH - Parameter				
i	θ_i	d_i	a_i	α_i
0	0	0	0	0
1	θ_1	0	l_1	0
2	θ_2	0	l_2	0
3	0	0	0	0

Beispiel – Zweiarmmanipulator

$$M = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = M_1 \cdot M_2 \qquad M_0 = M_3 = I$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_i = \sin\theta_i$$

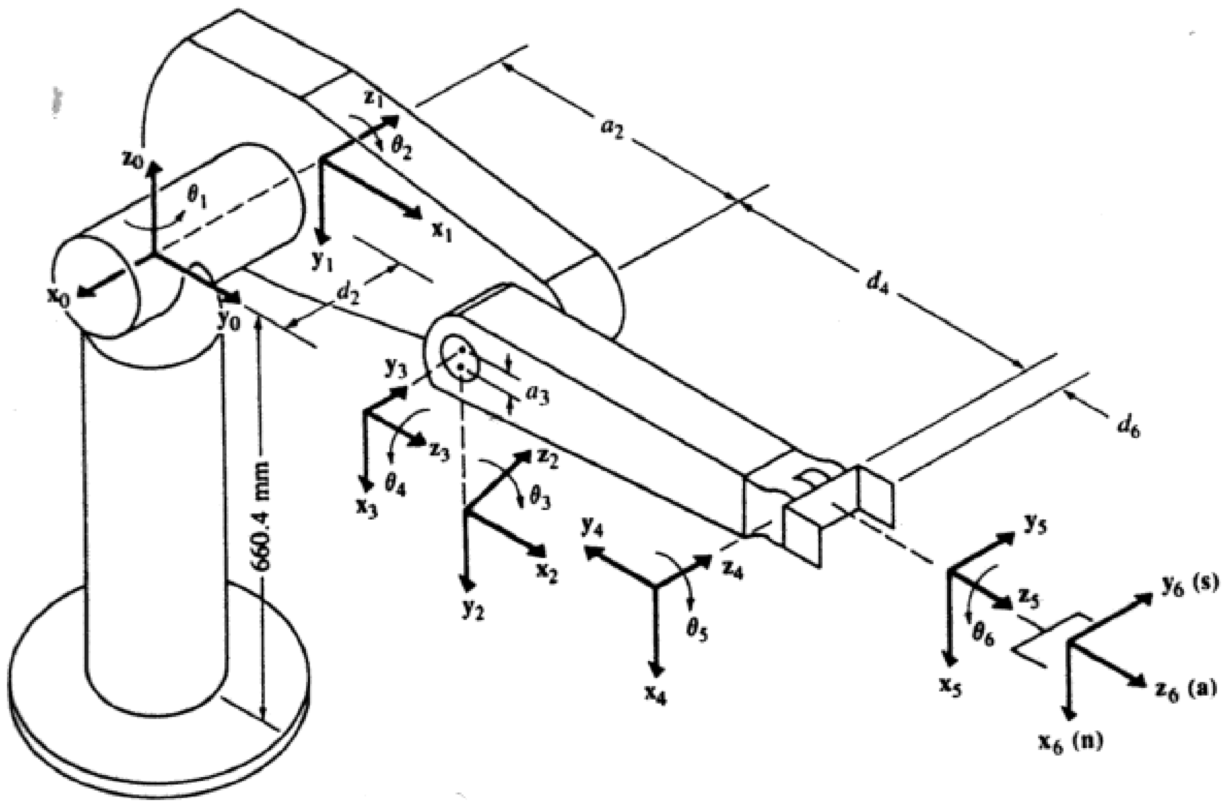
$$c_i = \cos\theta_i$$

$$s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$$

$$c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_2 c_{12} + l_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_2 s_{12} + l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Beispiel mit PUMA 560



Puma 560

Gelenk i	θ_i	α_i	a_i	d_i	Gelenk-Bereich
1	90	-90	0	0	-160 zu 160
2	0	0	431.8 mm	149.09 mm	-225 zu 45
3	90	90	-20.32 mm	0	-45 zu 225
4	0	-90	0	433.07 mm	-110 zu 170
5	0	90	0	0	-100 zu 100
6	0	0	0	56.25 mm	-266 zu 266

Gelenk-Koordinaten-Parameter von PUMA 560

Puma 560

$$T' = A_1 A_2 A_3$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$T'' = A_4 A_5 A_6$$

Puma 560

$$
= \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 & d_6C_4S_5 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 & d_6S_4S_5 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & d_6C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

wobei $C_{ij} \equiv \cos(\theta_i + \theta_j)$ und $S_{ij} \equiv \sin(\theta_i + \theta_j)$.

Puma 560

$$T_6 = T'T'' = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei

$$n_x = C_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] - S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6)$$

$\dots$

4.7 Inverse kinematische Transformation (IKP)

Inverse kinematische Transformation (IKP)

Gegeben: Lage zwischen Effektor und Roboterbasis

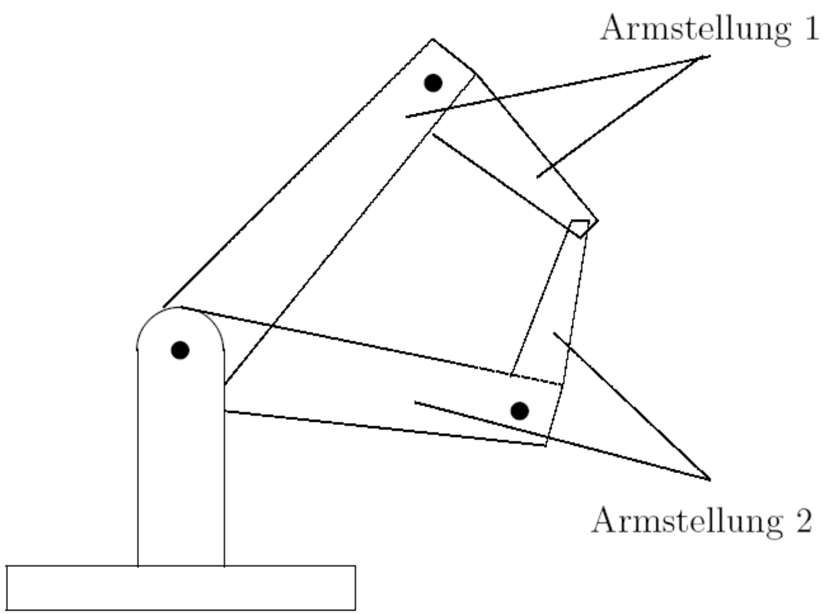
$$M = \left(m_{ij}\right)_{i,j=1}^{4} = \prod_{i=0}^{n+1} M_i$$

Gesucht: Gelenkparameter

$$\theta_i \text{ bzw. } d_i \quad 1 \leq i \leq n$$

Probleme

- Die Lösungen sind oft nicht eindeutig. Es gibt also mehrere Gelenkstellungen, die zur gleichen Effektorstellung führen.



Probleme

- Die gefundene mathematische Lösung kann eine unzulässige Stellung ergeben.
  - ein Winkel ist aufgrund mechanischer Begrenzungen nicht einstellbar
  - Glieder des Armes kollidieren mit Hindernissen
- unzulässige Zwischenstellung bei einer Bewegung von der Ist-Stellung zur neuen Soll-Stellung
- für die Rückwärtsberechnung existiert kein allgemeines Verfahren
- schnelle Berechnung notwendig (während der Bewegung des Roboters)

Berechnungsmöglichkeiten

- analytische Verfahren
  - explizither Zusammenhang zwischen den Gelenkparametern und den Elementen der Matrix M
    (einfache Gelenkanordnung)
- roboterspezifische Vorgehensweise
  - Formeln für die Rückwärtsrechnung lassen sich geschlossen angeben
  - keine Rechnung über die Transformationsmatrizen erforderlich
- Näherungsverfahren

Ansatz von Paul zur Lösung des IKP

Aufstellung der kinematischen Grundgleichung: $M = M_0 \cdot M_1 \cdots M_{n+1}$

Umformung:

$$M_0^{-1} \cdot M = M_1 \cdots M_{n+1}$$

$$M_1^{-1} \cdot M_0^{-1} \cdot M = M_2 \cdots M_{n+1}$$

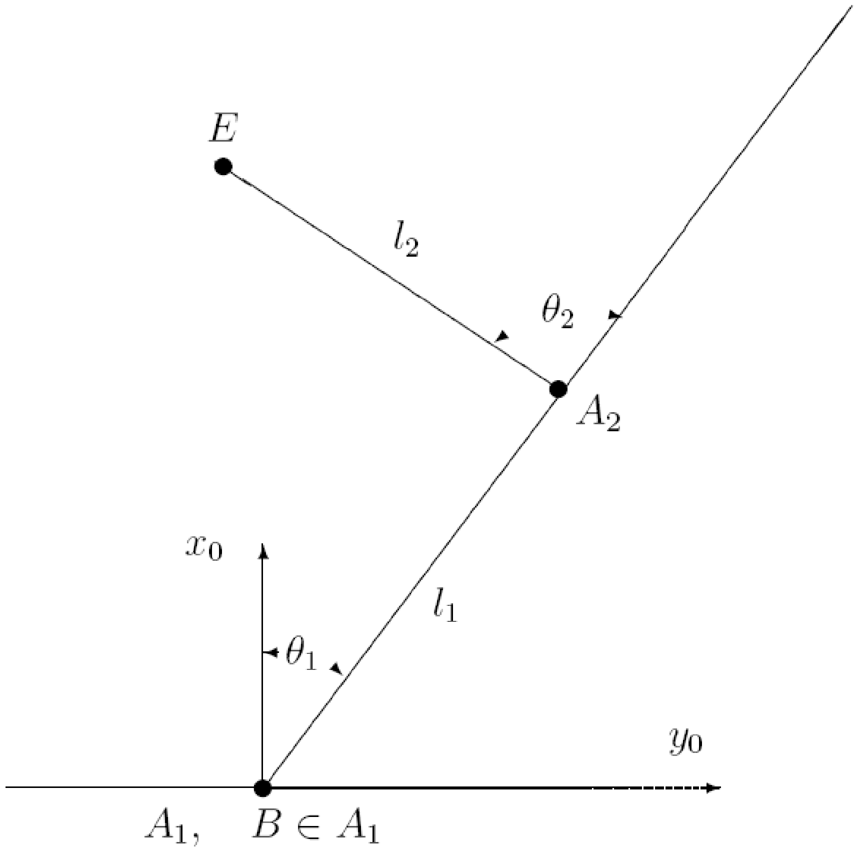
$$\vdots$$

$$M_n^{-1} \cdots M_0^{-1} \cdot M = M_{n+1}$$

Elementweises Gleichsetzen liefert 12 nichtriviale Gleichungen für jede dieser Matrixgleichungen

Auswertung dieser Gleichungen

Planarer Zweiarmmanipulator



Gegeben:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kinematische Grundgleichung:

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_2 c_{12} + l_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_2 s_{12} + l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Planarer Zweiarmmanipulator

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_2 c_{12} + l_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_2 s_{12} + l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_i = \sin\theta_i$$

$$c_i = \cos\theta_i$$

$$s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$$

$$c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\alpha)$$

$$x = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos(\theta_1)$$

$$y = l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \sin(\theta_1)$$

$$\boxed{\begin{gathered} \theta_1 + \theta_2 = \operatorname{atan2}(\sin(\alpha), \cos(\alpha)) = a \\ \theta_1 = \operatorname{atan2}\left(\frac{y - l_2 \sin(\alpha)}{l_1}, \frac{x - l_2 \cos(\alpha)}{l_1}\right) \\ \theta_2 = \begin{cases} a - \theta_1 & -\pi < a - \theta_1 \leq \pi \\ a - \theta_1 + \pi & a - \theta_1 \leq -\pi \\ a - \theta_1 - \pi & a - \theta_1 > \pi \end{cases} \end{gathered}}$$