

Übung 5 – Bildsegmentierung

Teil 1

Kapitel 4.3

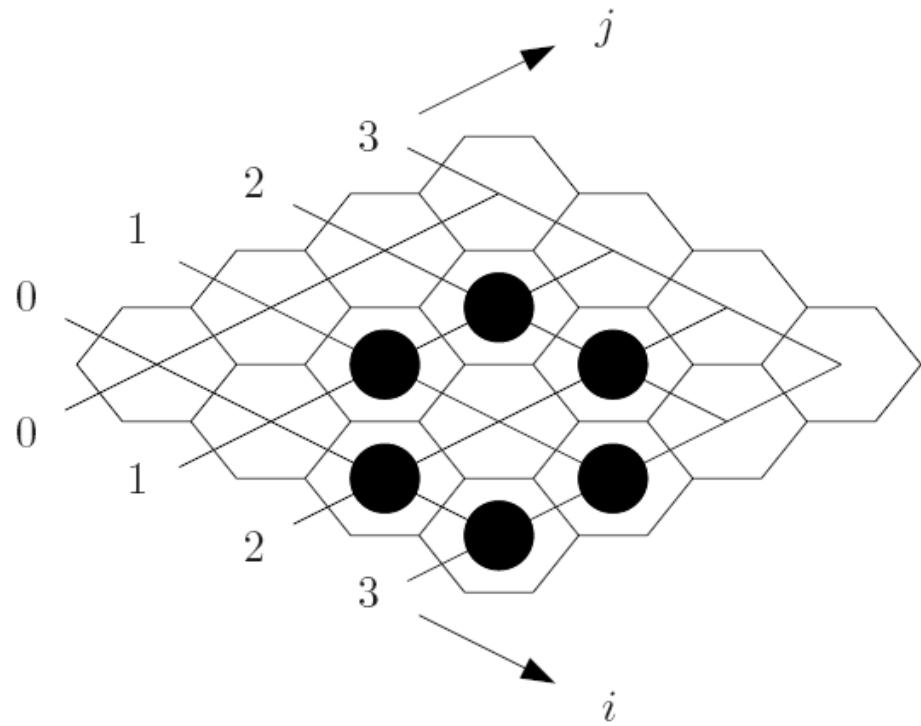
Mathematische Grundlagen

Aufgabe 1

Interpretieren Sie die 6 – Nachbarschaft für normale quadratische Bildraster.

Aufgabe 1

$N = N_6 = \{[(i_1, j_1), (i_2, j_2)] : \quad |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1 \quad \text{oder}$
 $(|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 2 \quad \text{und} \quad i_1 + j_1 = i_2 + j_2)\}$



Aufgabe 1

$$N = N_6 = \{[(i_1, j_1), (i_2, j_2)] : \quad |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1 \quad \text{oder} \\ (|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 2 \quad \text{und} \quad i_1 + j_1 = i_2 + j_2)\}$$

Nachbarn von (i, j) : $|i - i_n| + |j - j_n| = 1$ 

$$\{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\} = N_4((i, j)) \subseteq N_6((i, j))$$

$$|i - i_n| + |j - j_n| = 2 \quad i + j = i_n + j_n \quad \Rightarrow$$

$$i = i_n \rightarrow j = j_n \rightarrow |i - i_n| + |j - j_n| = 0 \quad j = j_n \rightarrow i = i_n \rightarrow |i - i_n| + |j - j_n| = 0$$

$$\Rightarrow |i - i_n| = 1 \wedge |j - j_n| = 1$$

$$|i - i_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} i_n = i - 1 \\ i_n = i + 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} j_n = j + 1 \\ j_n = j - 1 \end{array}$$

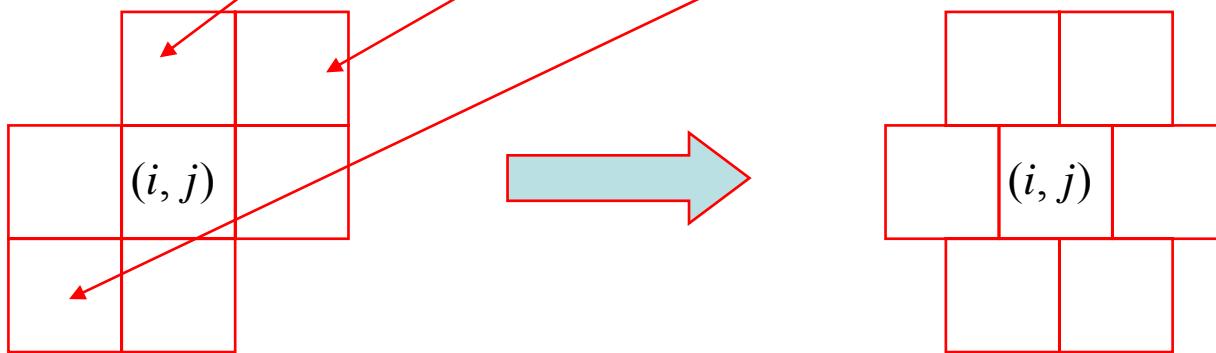


$$(i-1, j+1), (i+1, j-1) \in N_6((i, j))$$

Aufgabe 1

$$N_6((i, j)) = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1), (i-1, j+1), (i+1, j-1)\}$$

$$N_6((i, j)) = N_4((i, j)) \cup \{(i-1, j+1), (i+1, j-1)\}$$



Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass jeder Weg in der 4 – Nachbarschaft auch ein Weg in der 8 – Nachbarschaft ist.

Zeigen Sie, dass nicht jeder Weg in der 8 – Nachbarschaft auch ein Weg in der 4 – Nachbarschaft ist.

Aufgabe 2

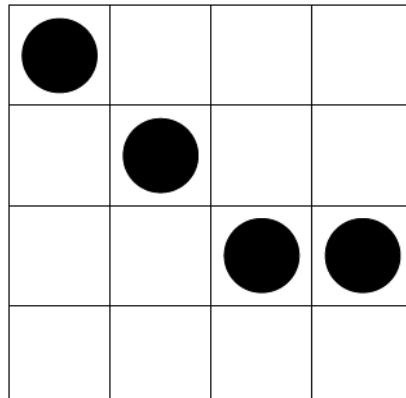
$$N_4 \subset N_8$$



Jeder Weg in der 4 – Nachbarschaft ist auch ein Weg in der 8 – Nachbarschaft.

Nicht jeder Weg in der 8 – Nachbarschaft ist auch ein Weg in der 4 – Nachbarschaft.

Beispiel:



Aufgabe 3

$$V_M = \{ (p, q) \in P \times P : p \text{ und } q \text{ sind bez\"uglich } M \text{ verbunden} \}$$

\exists Weg (p, \dots, q) in M oder \exists Weg (p, \dots, q) in $\overline{M} = P \setminus M$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der
Verbundenheitsrelation V_M .

$$V_M \subseteq (M \times M) \cup (\overline{M} \times \overline{M}) \quad \overline{M} = P \setminus M$$

$$(p, p) \in V_M$$

$$(p, q) \in V_M \Rightarrow (q, p) \in V_M$$

$$((p, q) \in V_M \wedge (q, r) \in V_M) \Rightarrow (p, r) \in V_M$$

Aufgabe 3

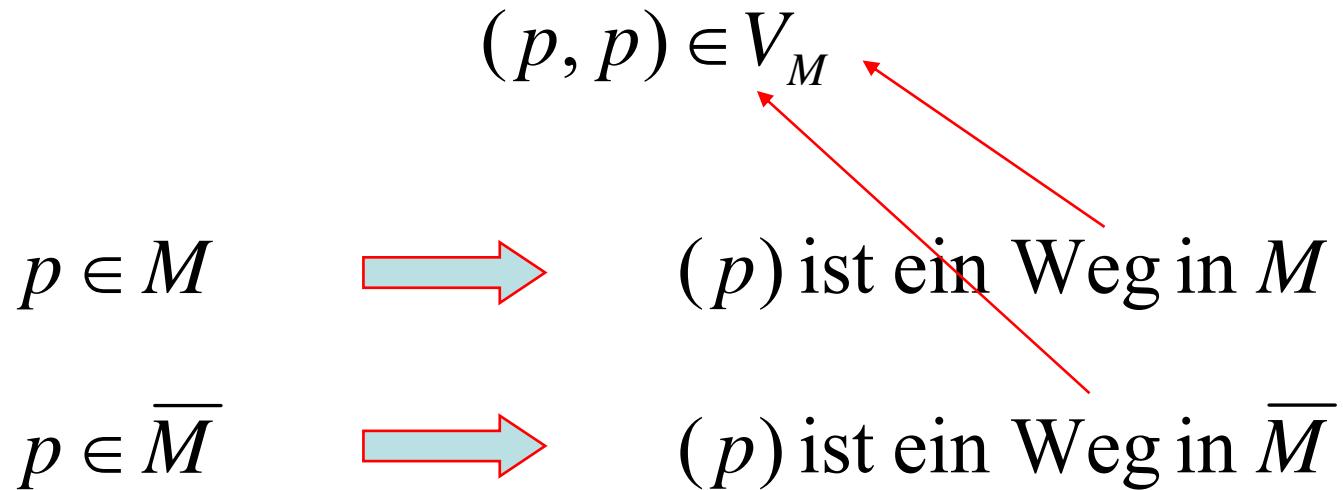
$$V_M \subseteq (M \times M) \cup (\overline{M} \times \overline{M}) \quad \quad \overline{M} = P \setminus M$$

$$(p, q) \in V_M \quad \quad \xrightarrow{\text{red arrow}}$$

$$p, q \in M \quad \quad \text{oder} \quad \quad p, q \in \overline{M}$$

$$\xrightarrow{\text{red arrow}} \quad V_M \subseteq (M \times M) \cup (\overline{M} \times \overline{M})$$

Aufgabe 3



Aufgabe 3

$$(p, q) \in V_M \Rightarrow (q, p) \in V_M$$

$$(p, q) \in V_M \quad \xrightarrow{\text{red arrow}}$$

$$(\exists \text{ Weg } (p, \dots, q) \text{ in } M) \vee (\exists \text{ Weg } (p, \dots, q) \text{ in } \overline{M})$$

$$\xrightarrow{\text{red arrow}} ((q, \dots, p) \text{ Weg in } M) \vee ((q, \dots, p) \text{ Weg in } \overline{M})$$

$$\xrightarrow{\text{red arrow}} (q, p) \in V_M$$

Aufgabe 3

$$((p, q) \in V_M \wedge (q, r) \in V_M) \Rightarrow (p, r) \in V_M$$

$$(p, q) \in V_M \quad (q, r) \in V_M$$

→ \exists Wege $(p, \dots, q), (q, \dots, r)$ in M oder in \overline{M}

→ (p, \dots, r) ist ein Weg in M oder in \overline{M}

→ $(p, r) \in V_M$

Aufgabe 4

$$K_M^i \quad i = 1, \dots n(V_M)$$

Äquivalenzklassen von P bezüglich der Relation V_M

Zeigen Sie:

$$P = \bigcup_{i=1}^{n(V_M)} K_M^i$$

$$K_M^i \cap K_M^j = \emptyset \quad i \neq j$$

K_M^i ist zusammenhängend

Aufgabe 4

$K_M^i \quad i = 1, \dots, n(V_M)$ V_M - Äquivalenzrelation

$$P = \bigcup_{i=1}^{n(V_M)} K_M^i \quad K_M^i \cap K_M^j = \emptyset \quad i \neq j$$

K_M^i ist zusammenhängend

$$p, q \in K_M^i \quad \xrightarrow{\text{light blue arrow}} \quad (p, q) \in V_M \quad \xrightarrow{\text{red arrow}}$$

\exists Weg (p, \dots, q) in M oder in \overline{M}

$\xrightarrow{\text{light blue arrow}}$ (p, \dots, q) auch Weg in K_M^i

Aufgabe 5

$$K_M^i \quad i = 1, \dots n(V_M)$$

Äquivalenzklassen von P bezüglich der Relation V_M

Zeigen Sie:

$$K_M^i \subseteq M \vee K_M^i \subseteq \overline{M}$$

Aufgabe 5

$$K_M^i \subseteq M \vee K_M^i \subseteq \overline{M}$$

$$p \in K_M^i, \quad p \in M \quad \xrightarrow{\text{red}} \quad$$

$$\forall q \in K_M^i \rightarrow (p, q) \in V_M \subseteq M \times M \quad \xrightarrow{\text{red}} \quad q \in M$$

$$\xrightarrow{\text{red}} \quad K_M^i \subseteq M$$

$$p \in K_M^i, \quad p \in \overline{M} \quad \xrightarrow{\text{red}} \quad$$

$$\forall q \in K_M^i \rightarrow (p, q) \in V_M \subseteq \overline{M} \times \overline{M} \quad \xrightarrow{\text{red}} \quad q \in \overline{M}$$

$$\xrightarrow{\text{red}} \quad K_M^i \subseteq \overline{M}$$

Aufgabe 6

$$K_M^i \quad i = 1, \dots n(V_M)$$

Äquivalenzklassen von P bezüglich der Relation V_M

Zeigen Sie:

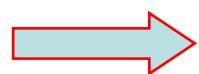
$$\forall p \in P \ \exists i : K_M^i = K_M(p) = \{q \in P : (p, q) \in V_M\}$$

Aufgabe 6

$$\forall p \in P \ \exists i : K_M^i = K_M(p) = \{q \in P : (p, q) \in V_M\}$$

$$p \in P \rightarrow p \in K_M^i$$

$$q \in K_M^i \leftrightarrow (p, q) \in V_M$$



$$K_M^i = K_M(p)$$

Kapitel 4.4

Bestimmung von Komponenten

Aufgabe 1

Wenden Sie das Region Growing Verfahren für die 4-Nachbarschaft und für die 8-Nachbarschaft an.

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Aufgabe 1

Lösung ist leicht durchzuführen.

Aufgabe 2

Wenden Sie das Zeilenkoizidenz Verfahren für die 8-Nachbarschaft an.

Aufgabe 2

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0



0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	2	2	0
0	1	1	0	0	2	2	0
0	1	1	1	2	2	2	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	3	3
0	4	4	4	4	3	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$1 \equiv 2$$

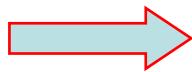
$$3 \equiv 4$$

$i-1,$ $j-1$	$i-1, j$	$i-1,$ $j+1$
$i, j-1$	i, j	

Aufgabe 2

$$1 \equiv 2 \quad 3 \equiv 4$$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	2	2	0
0	1	1	0	0	2	2	0
0	1	1	1	2	2	2	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	3	3
0	4	4	4	4	3	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0



0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	2	2
0	2	2	2	2	2	2	0
0	0	0	0	0	0	0	0

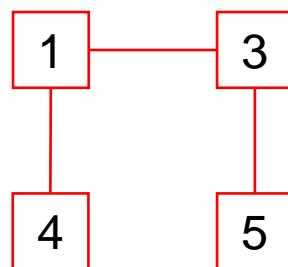
Aufgabe 4

Wie kann man die Neunummerierung der Marken im Zeilenkoizidenz Verfahren algorithmisch lösen.

Aufgabe 4

Graph: Knoten sind die Marken und die Kanten verbinden äquivalente Marken.

Jeder zusammenhängende Teil dieses Graphen bildet dann eine Komponente.



4 Komponenten

Kapitel 4.5

Regionenorientierte
Segmentierung

Aufgabe 1

Segmentieren Sie mit Region Growing:

1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	2	2	7
3	3	3	3	2	2	8	7
3	3	3	3	3	3	8	8
3	3	3	3	3	3	8	8

Verwenden Sie verschiedene geeignete Homogenitätsfunktionen.

Region Growing

Eingabe: P, N, h

while $P <> \emptyset$ do begin

 wähle $p \in P$;

$P := P \setminus \{p\}$;

$X := \{p\}$; $T := \{p\}$;

 while $T <> \emptyset$ do begin

 wähle $q \in T$;

$T := T \setminus \{q\}$;

 bestimme $N(q)$;

 wähle $S \subseteq N(q)$ mit $h(X \cup S) = \text{true}$;

$X := X \cup S$;

$T := T \cup S$;

$P := P \setminus S$;

 end;

 Ausgabe: X als ein Objekt der Segmentierung

end;

Aufgabe 1

$$M_k = \{(i, j) : g_E(i, j) = k\} \quad k = 1, 2, 3, 7, 8 \quad N = N_4$$

$$h(M) = \begin{cases} \text{true} & \text{falls } M \subseteq M_1 \vee M \subseteq M_2 \vee M \subseteq M_3 \vee M \subseteq M_7 \vee M \subseteq M_8 \\ \text{false} & \text{sonst} \end{cases}$$

1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	2	2	7
3	3	3	3	2	2	8	7
3	3	3	3	3	3	8	8
3	3	3	3	3	3	8	8



1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	2	2	4
3	3	3	3	2	2	5	4
3	3	3	3	3	3	5	5
3	3	3	3	3	3	5	5

Aufgabe 1

$$M_k = \{(i, j) : g_E(i, j) = k\} \quad k = 1, 2, 3, 7, 8 \quad N = N_4$$

$$h(M) = \begin{cases} \text{true} & \text{falls } (M \subseteq M_1 \cup M_2) \vee (M \subseteq M_2 \cup M_3) \vee M \subseteq M_7 \cup M_8 \\ \text{false} & \text{sonst} \end{cases}$$

1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	2	2	7
3	3	3	3	2	2	8	7
3	3	3	3	3	3	8	8
3	3	3	3	3	3	8	8



1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	1	3
2	2	2	2	1	1	3	3
2	2	2	2	2	2	3	3
2	2	2	2	2	2	3	3

Beginn

Aufgabe 1

$$M_k = \{(i, j) : g_E(i, j) = k\} \quad k = 1, 2, 3, 7, 8 \quad N = N_4$$

$$h(M) = \begin{cases} \text{true} & \text{falls } (M \subseteq M_1 \cup M_2) \vee (M \subseteq M_2 \cup M_3) \vee M \subseteq M_7 \cup M_8 \\ \text{false} & \text{sonst} \end{cases}$$

1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	2	2	7
3	3	3	3	2	2	8	7
3	3	3	3	3	3	8	8
3	3	3	3	3	3	8	8



2	2	2	2	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	3
1	1	1	1	1	1	3	3
1	1	1	1	1	1	3	3
1	1	1	1	1	3	3	3

Beginn

Kapitel 4.6

Kantenorientierte Segmentierung

Aufgabe 1 (Lü Wang)

Wird der Punkt P entfernt?

0	0	0
0	P	1
1	1	1

Algorithmus von Lü und Wang

3 x 3 Maske:

P_1	P_2	P_3
P_8	P	P_4
P_7	P_6	P_5

$$P_i \in \{0,1\}$$

P gehört immer zum Segment (alle Einsen) und hat den Wert 1
(Binärbilder)

$A(P)$ – Anzahl der Übergänge von $0 \rightarrow 1$,

wenn die Punkte P_1, \dots, P_8, P_1 einmal
durchlaufen werden.

$B(P)$ – Anzahl der 1 unter den Punkten P_1, \dots, P_8 .

0	0	1
1	1	0
1	0	0

$$A(P)=2$$
$$B(P)=3$$

1	0	1
0	1	1
0	1	0

$$A(P)=3$$
$$B(P)=4$$

Algorithmus von Lü und Wang

Wir schieben die Maske in mehreren Iterationen über das Bild.

P wird im Segment gelöscht, wenn:

$$3 \leq B(P) \leq 6$$

$$A(P) = 1$$

$$P_4 \wedge P_6 \wedge (P_2 \vee P_8) = \text{false}$$

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false}$$

bei gerader Iteration (2., 4., ...)

bei ungerader Iteration (1., 3., ...)

Bei den letzten 2 Bedingungen betrachten wir P_i als logische Variable mit den Werten true und false.

Aufgabe 1

0	0	0
0	P	1
1	1	1

$$\begin{aligned}A(P) &= 1 \\B(P) &= 4\end{aligned}$$

bei gerader Iteration:

$$P_4 \wedge P_6 \wedge (P_2 \vee P_8) = \text{true} \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee \text{false}) = \text{false}$$

bei ungerader Iteration:

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false} \wedge \text{false} \wedge (\text{true} \vee \text{true}) = \text{false}$$

P wird also immer entfernt.

Aufgabe 2 (Lü Wang)

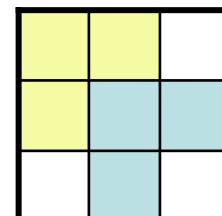
Wird der Punkt P entfernt?

0	0	.
0	P	1
.	1	.



Für . kann dabei 0 oder 1 stehen.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Wirkung
des Strukturelementes B^1 aus 3.4.



Aufgabe 2

0	0	.
0	P	1
.	1	.

$$1 \leq A(P) \leq 2$$

$$2 \leq B(P) \leq 5$$

bei gerader Iteration:

$$P_4 \wedge P_6 \wedge (P_2 \vee P_8) = \text{true} \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee \text{false}) = \text{false}$$

bei ungerader Iteration:

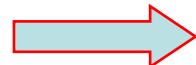
$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false} \wedge \text{false} \wedge (\text{true} \vee \text{true}) = \text{false}$$

Aufgabe 2

0	0	.
0	P	1
.	1	.

0	0	.
0	P	1
.	1	1

$$A(P) = 1$$



P wird entfernt

$$3 \leq B(P) \leq 5$$

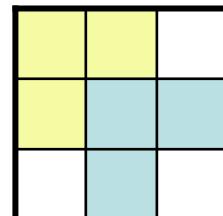
0	0	.
0	P	1
.	1	0

$$A(P) = 2$$



P wird nicht entfernt

$$2 \leq B(P) \leq 5$$



P wird immer entfernt

Aufgabe 3 (Lü Wang)

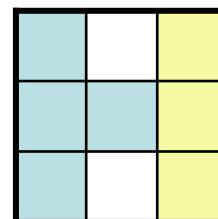
Wird der Punkt P entfernt?

1	.	0
1	P	0
1	.	0



Für . kann dabei 0 oder 1 stehen.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Wirkung
des Strukturelementes B^2 aus 3.4.



Aufgabe 3

1	.	0
1	P	0
1	.	0

$$A(P) = 1$$

$$3 \leq B(P) \leq 5$$

bei gerader Iteration:

$$P_4 \wedge P_6 \wedge (P_2 \vee P_8) = \text{false} \wedge . \wedge (. \vee \text{true}) = \text{false}$$

bei ungerader Iteration:

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = . \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee .) = .$$

noch offen

Aufgabe 3

1	.	0
1	P	0
1	.	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = . \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee .) = .$$

1	0	0
1	P	0
1	0	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false} \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee \text{false}) = \text{false}$$



P wird entfernt

1	0	0
1	P	0
1	1	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false} \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee \text{true}) = \text{false}$$



P wird entfernt

Aufgabe 3

1	.	0
1	P	0
1	.	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = . \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee .) = .$$

1	1	0
1	P	0
1	0	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{true} \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee \text{false}) = \text{false}$$



P wird entfernt

1	1	0
1	P	0
1	1	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{true} \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee \text{true}) = \text{true}$$



P wird nicht entfernt

Aufgabe 3

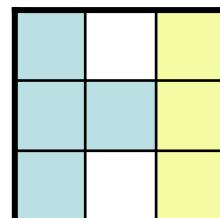
1	.	0
1	P	0
1	.	0

1	1	0
1	P	0
1	1	0

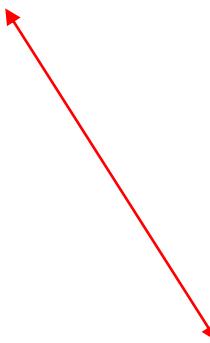
$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{true} \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee \text{true}) = \text{true}$$



P wird nicht entfernt



P wird immer entfernt



Aufgabe 4

Wenden Sie den Skelettierungsalgorithmus von Lü und Wang an.

1 1 1

1 1 1

1

1

1 1 1

1 1 1

Aufgabe 4 (1. Iteration)

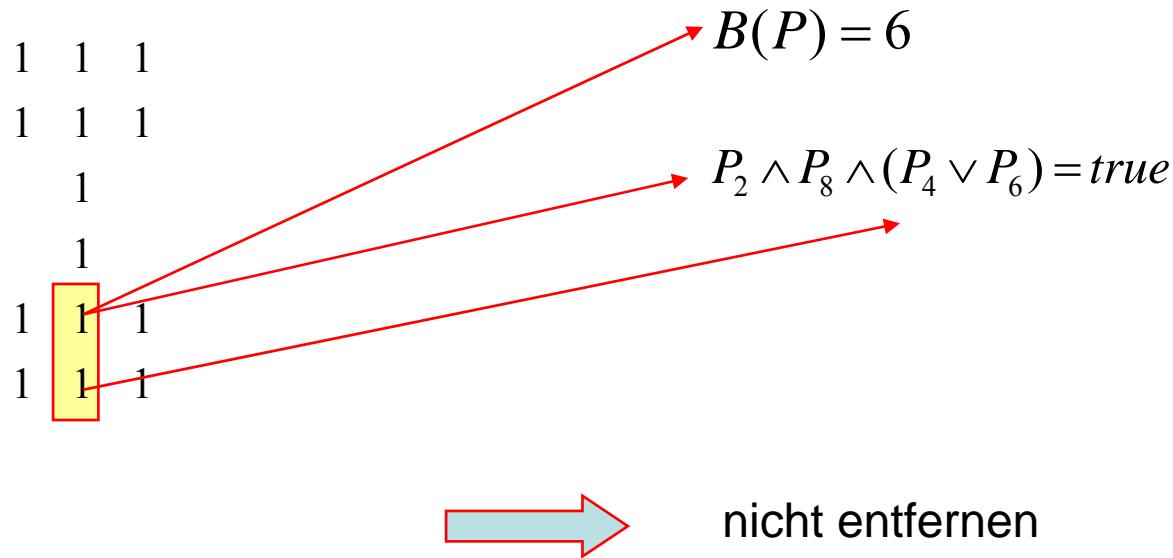
1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1

$A(P) = 2$



nicht entfernen

Aufgabe 4 (1. iteration)



Aufgabe 4 (1. iteration)

1	1	1
---	---	---

1 1 1
1

1
1 1 1
1 1 1

$$A(P) = 1$$

$$3 \leq B(P) \leq 5$$

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false}$$



entfernen

Aufgabe 4 (1. Iteration)

1	1	1
1	1	1
1		
1		
1	1	1
1	1	1

$$A(P) = 1$$

$$B(P) = 4$$

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false}$$



entfernen

Aufgabe 4 (1. Iteration)

1 1 1

$$A(P) = 1$$

1 1 1
1 1 1
1

$$B(P) = 4$$

1
1 1 1
1 1 1

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false}$$



entfernen

Aufgabe 4 (1. Iteration)

1 1 1

$$A(P) = 1$$

1 1 1

1

$$B(P) = 4$$

1 1 1

1 1 1

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false}$$



entfernen

Aufgabe 4 (1. Iteration)

1 1 1

$$A(P) = 1$$

1 1 1

1

$$B(P) = 3$$

1

1 1 1

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false}$$

1 1 1



entfernen

Aufgabe 4 (1. iteration)

1 1 1

$$A(P) = 1$$

1 1 1

$$3 \leq B(P) \leq 4$$

1

1

1

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false}$$

1

1

1



entfernen

Aufgabe 4

1 1 1
1 1 1

1
1

1 1 1
1 1 1

1. Iteration



1
1
1
1
1

Aufgabe 4

1

2. Iteration

1

1



1

1

1

1

$B(P) \leq 2$

1

1

1

kein Punkt wird entfernt

weitere Iterationen ergeben keine Veränderung

Aufgabe 5

Kommen der Skelettierungsalgorithmus von Lü und Wang und der in 3.4 betrachtete morphologische Algorithmus zum gleichen Ergebnis?

Aufgabe 5

