

Übung 5 – Bildsegmentierung

Teil 1

Kapitel 4.3

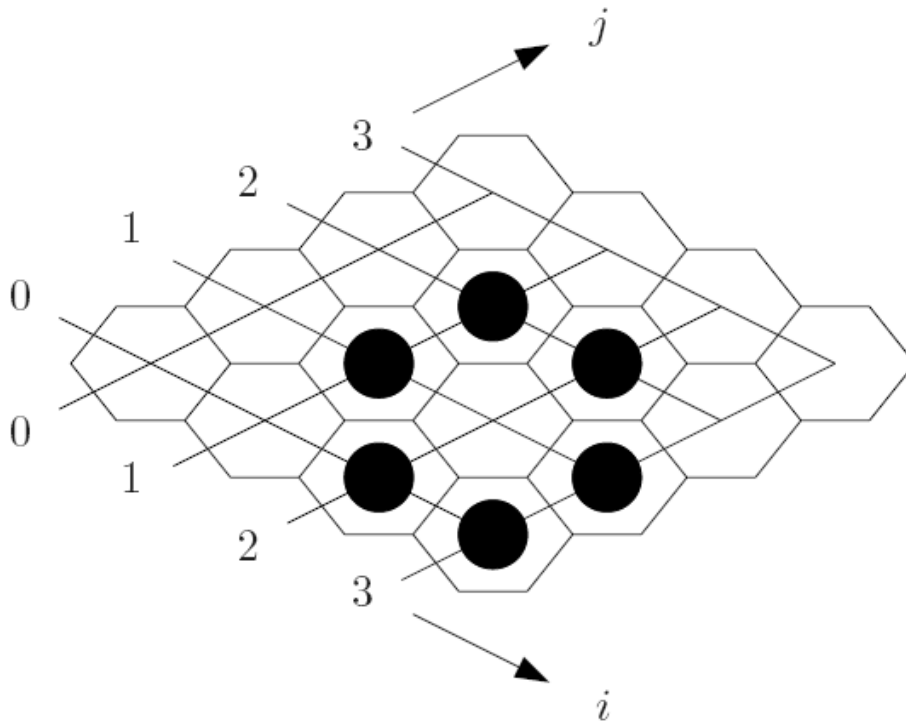
Mathematische Grundlagen

Aufgabe 1

Interpretieren Sie die 6 – Nachbarschaft für normale quadratische Bildraster.

Aufgabe 1

$$N = N_6 = \{[(i_1, j_1), (i_2, j_2)] : |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1 \text{ oder } (|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 2 \text{ und } i_1 + j_1 = i_2 + j_2)\}$$



Aufgabe 1

$$N = N_6 = \{[(i_1, j_1), (i_2, j_2)] : |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1 \text{ oder} \\ (|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 2 \text{ und } i_1 + j_1 = i_2 + j_2)\}$$

Nachbarn von (i, j) : $|i - i_n| + |j - j_n| = 1 \quad \Rightarrow$

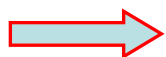
$$\{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\} = N_4((i, j)) \subseteq N_6((i, j))$$

$$|i - i_n| + |j - j_n| = 2 \quad i + j = i_n + j_n \quad \Rightarrow$$

$$i = i_n \rightarrow j = j_n \rightarrow |i - i_n| + |j - j_n| = 0 \quad j = j_n \rightarrow i = i_n \rightarrow |i - i_n| + |j - j_n| = 0$$

$$\Rightarrow |i - i_n| = 1 \wedge |j - j_n| = 1$$

$$|i - i_n| = 1 \quad \Rightarrow \begin{matrix} i_n = i - 1 \\ i_n = i + 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} j_n = j + 1 \\ j_n = j - 1 \end{matrix}$$

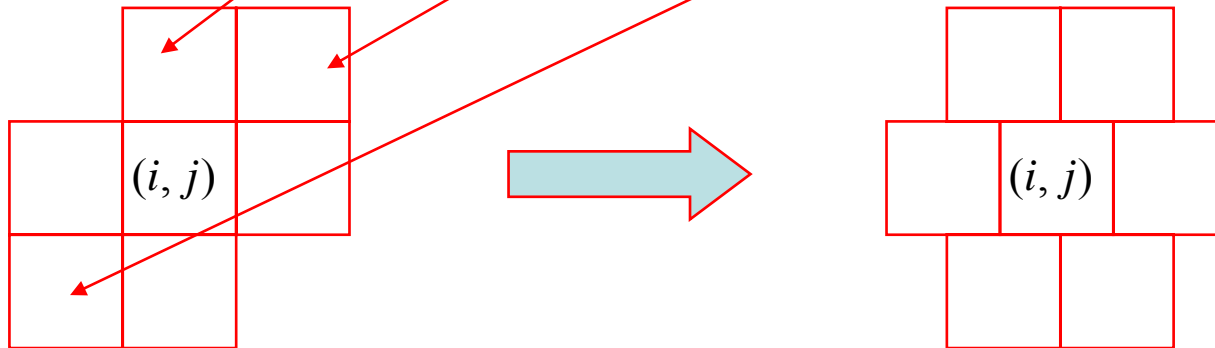


$$(i-1, j+1), (i+1, j-1) \in N_6((i, j))$$

Aufgabe 1

$$N_6((i, j)) = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1), (i-1, j+1), (i+1, j-1)\}$$

$$N_6((i, j)) = N_4((i, j)) \cup \{(i-1, j+1), (i+1, j-1)\}$$



Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass jeder Weg in der 4 – Nachbarschaft auch ein Weg in der 8 – Nachbarschaft ist.

Zeigen Sie, dass nicht jeder Weg in der 8 – Nachbarschaft auch ein Weg in der 4 – Nachbarschaft ist.

Aufgabe 2

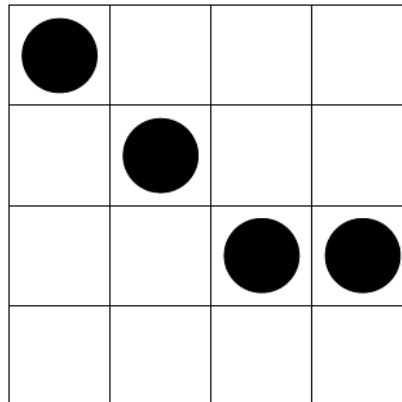
$$N_4 \subset N_8$$



Jeder Weg in der 4 – Nachbarschaft ist auch ein Weg in der 8 – Nachbarschaft.

Nicht jeder Weg in der 8 – Nachbarschaft ist auch ein Weg in der 4 – Nachbarschaft.

Beispiel:



Aufgabe 3

$$V_M = \{ (p, q) \in P \times P : p \text{ und } q \text{ sind bezüglich } M \text{ verbunden} \}$$

\exists Weg (p, \dots, q) in M oder \exists Weg (p, \dots, q) in $\bar{M} = P \setminus M$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Verbundenheitsrelation V_M .

$$V_M \subseteq (M \times M) \cup (\bar{M} \times \bar{M}) \quad \bar{M} = P \setminus M$$

$$(p, p) \in V_M$$

$$(p, q) \in V_M \Rightarrow (q, p) \in V_M$$

$$((p, q) \in V_M \wedge (q, r) \in V_M) \Rightarrow (p, r) \in V_M$$

Aufgabe 3

$$V_M \subseteq (M \times M) \cup (\overline{M} \times \overline{M}) \quad \overline{M} = P \setminus M$$

$$(p, q) \in V_M \quad \longrightarrow$$

$$p, q \in M \quad \text{oder} \quad p, q \in \overline{M}$$



$$V_M \subseteq (M \times M) \cup (\overline{M} \times \overline{M})$$

Aufgabe 3

$$(p, p) \in V_M$$

$$p \in M$$

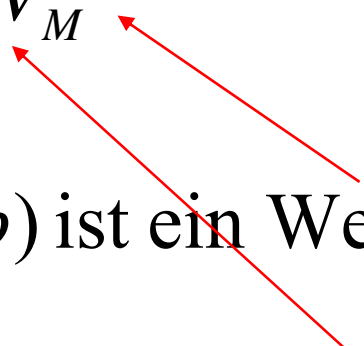


(p) ist ein Weg in M

$$p \in \overline{M}$$



(p) ist ein Weg in \overline{M}



Aufgabe 3

$$(p, q) \in V_M \Rightarrow (q, p) \in V_M$$

$$(p, q) \in V_M \quad \longrightarrow$$

$$(\exists \text{Weg } (p, \dots, q) \text{ in } M) \vee (\exists \text{Weg } (p, \dots, q) \text{ in } \bar{M})$$

$$\longrightarrow ((q, \dots, p) \text{ Weg in } M) \vee ((q, \dots, p) \text{ Weg in } \bar{M})$$

$$\longrightarrow (q, p) \in V_M$$

Aufgabe 3

$$((p, q) \in V_M \wedge (q, r) \in V_M) \Rightarrow (p, r) \in V_M$$

$$(p, q) \in V_M \quad (q, r) \in V_M$$

➡ \exists Wege $(p, \dots, q), (q, \dots, r)$ in M oder in \overline{M}

➡ (p, \dots, r) ist ein Weg in M oder in \overline{M}

➡ $(p, r) \in V_M$

Aufgabe 4

$$K_M^i \quad i = 1, \dots, n(V_M)$$

Äquivalenzklassen von P bezüglich der Relation V_M

Zeigen Sie:

$$P = \bigcup_{i=1}^{n(V_M)} K_M^i$$

$$K_M^i \cap K_M^j = \emptyset \quad i \neq j$$

K_M^i ist zusammenhängend

Aufgabe 4

$K_M^i \quad i = 1, \dots, n(V_M) \quad V_M$ - Äquivalenzrelation

$$P = \bigcup_{i=1}^{n(V_M)} K_M^i$$

$$K_M^i \cap K_M^j = \emptyset \quad i \neq j$$

K_M^i ist zusammenhängend

$$p, q \in K_M^i \implies (p, q) \in V_M$$

\exists Weg (p, \dots, q) in M oder in \overline{M}

(p, \dots, q) auch Weg in K_M^i

Aufgabe 5

$$K_M^i \quad i = 1, \dots, n(V_M)$$

Äquivalenzklassen von P bezüglich der Relation V_M

Zeigen Sie:

$$K_M^i \subseteq M \vee K_M^i \subseteq \overline{M}$$

Aufgabe 5

$$K_M^i \subseteq M \vee K_M^i \subseteq \overline{M}$$

$$p \in K_M^i, \quad p \in M \quad \longrightarrow$$

$$\forall q \in K_M^i \rightarrow (p, q) \in V_M \subseteq M \times M \quad \longrightarrow \quad q \in M$$

$$\longrightarrow \quad K_M^i \subseteq M$$

$$p \in K_M^i, \quad p \in \overline{M} \quad \longrightarrow$$

$$\forall q \in K_M^i \rightarrow (p, q) \in V_M \subseteq \overline{M} \times \overline{M} \quad \longrightarrow \quad q \in \overline{M}$$

$$\longrightarrow \quad K_M^i \subseteq \overline{M}$$

Aufgabe 6

$$K_M^i \quad i = 1, \dots, n(V_M)$$

Äquivalenzklassen von P bezüglich der Relation V_M

Zeigen Sie:

$$\forall p \in P \quad \exists i : K_M^i = K_M(p) = \{q \in P : (p, q) \in V_M\}$$

Aufgabe 6

$$\forall p \in P \quad \exists i : K_M^i = K_M(p) = \{q \in P : (p, q) \in V_M\}$$

$$p \in P \rightarrow p \in K_M^i$$

$$q \in K_M^i \leftrightarrow (p, q) \in V_M$$


$$K_M^i = K_M(p)$$

Kapitel 4.4

Bestimmung von Komponenten

Aufgabe 1

Wenden Sie das Region Growing Verfahren für die 4-Nachbarschaft und für die 8-Nachbarschaft an.

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Aufgabe 1

Lösung ist leicht durchzuführen.

Aufgabe 2

Wenden Sie das Zeilenkoizidenz Verfahren für die 8-Nachbarschaft an.

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Aufgabe 2

```

0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 1 0 0 1 1 0
0 1 1 0 0 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 1
0 1 1 1 1 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
    
```



```

0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 1 0 0 2 2 0
0 1 1 0 0 2 2 0
0 1 1 1 2 2 2 0
0 1 1 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 3 3
0 4 4 4 4 3 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
    
```

$$1 \equiv 2$$

$$3 \equiv 4$$

$i-1, j-1$	$i-1, j$	$i-1, j+1$
$i, j-1$	i, j	

Aufgabe 2

$$1 \equiv 2 \quad 3 \equiv 4$$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	2	2	0
0	1	1	0	0	2	2	0
0	1	1	1	2	2	2	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	3	3
0	4	4	4	4	3	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0



0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	2	2
0	2	2	2	2	2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

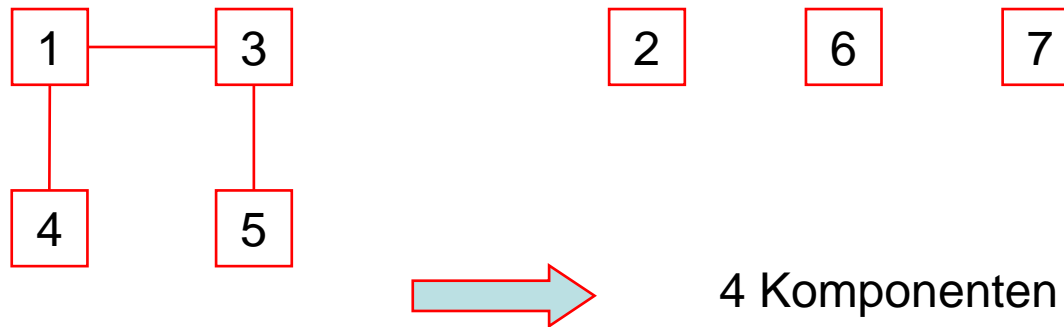
Aufgabe 4

Wie kann man die Neunummerierung der Marken im Zeilenkoizidenz Verfahren algorithmisch lösen.

Aufgabe 4

Graph: Knoten sind die Marken und die Kanten verbinden äquivalente Marken.

Jeder zusammenhängende Teil dieses Graphen bildet dann eine Komponente.



Kapitel 4.5

Regionenorientierte Segmentierung

Aufgabe 1

Segmentieren Sie mit Region Growing:

1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	2	2	7
3	3	3	3	2	2	8	7
3	3	3	3	3	3	8	8
3	3	3	3	3	3	8	8

Verwenden Sie verschiedene geeignete Homogenitätsfunktionen.

Region Growing

Eingabe: P, N, h

while $P \neq \emptyset$ do begin

 wähle $p \in P$;

$P := P \setminus \{p\}$;

$X := \{p\}$; $T := \{p\}$;

 while $T \neq \emptyset$ do begin

 wähle $q \in T$;

$T := T \setminus \{q\}$;

 bestimme $N(q)$;

 wähle $S \subseteq N(q)$ mit $h(X \cup S) = \text{true}$;

$X := X \cup S$;

$T := T \cup S$;

$P := P \setminus S$;

 end;

 Ausgabe: X als ein Objekt der Segmentierung

end;

Aufgabe 1

$$M_k = \{(i, j) : g_E(i, j) = k\} \quad k=1,2,3,7,8$$

$$N = N_4$$

$$h(M) = \begin{cases} true & \text{falls } M \subseteq M_1 \vee M \subseteq M_2 \vee M \subseteq M_3 \vee M \subseteq M_7 \vee M \subseteq M_8 \\ false & \text{sonst} \end{cases}$$

1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	2	2	7
3	3	3	3	2	2	8	7
3	3	3	3	3	3	8	8
3	3	3	3	3	3	8	8



1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	2	2	4
3	3	3	3	2	2	5	4
3	3	3	3	3	3	5	5
3	3	3	3	3	3	5	5

Aufgabe 1

$$M_k = \{(i, j) : g_E(i, j) = k\} \quad k=1,2,3,7,8$$

$$N = N_4$$

$$h(M) = \begin{cases} true & \text{falls } (M \subseteq M_1 \cup M_2) \vee (M \subseteq M_2 \cup M_3) \vee M \subseteq M_7 \cup M_8 \\ false & \text{sonst} \end{cases}$$

1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	2	2	7
3	3	3	3	2	2	8	7
3	3	3	3	3	3	8	8
3	3	3	3	3	3	8	8



1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	1	3
2	2	2	2	1	1	3	3
2	2	2	2	2	2	3	3
2	2	2	2	2	2	3	3

Beginn

Aufgabe 1

$$M_k = \{(i, j) : g_E(i, j) = k\} \quad k=1,2,3,7,8$$

$$N = N_4$$

$$h(M) = \begin{cases} true & \text{falls } (M \subseteq M_1 \cup M_2) \vee (M \subseteq M_2 \cup M_3) \vee M \subseteq M_7 \cup M_8 \\ false & \text{sonst} \end{cases}$$

1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	2	2	7
3	3	3	3	2	2	8	7
3	3	3	3	3	3	8	8
3	3	3	3	3	3	8	8



2	2	2	2	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	3
1	1	1	1	1	1	3	3
1	1	1	1	1	1	3	3
1	1	1	1	1	1	3	3

Beginn

Kapitel 4.6

Kantenorientierte Segmentierung

Aufgabe 1 (Lü Wang)

Wird der Punkt P entfernt?

0	0	0
0	P	1
1	1	1

Algorithmus von Lü und Wang

3 x 3 Maske:

P_1	P_2	P_3
P_8	P	P_4
P_7	P_6	P_5

$$P_i \in \{0,1\}$$

P gehört immer zum Segment (alle Einsen) und hat den Wert 1 (Binärbilder)

$A(P)$ – Anzahl der Übergänge von $0 \rightarrow 1$,
wenn die Punkte P_1, \dots, P_8, P_1 einmal
durchlaufen werden.

0	0	1
1	1	0
1	0	0

$$\begin{aligned} A(P) &= 2 \\ B(P) &= 3 \end{aligned}$$

$B(P)$ – Anzahl der 1 unter den Punkten P_1, \dots, P_8 .

1	0	1
0	1	1
0	1	0

$$\begin{aligned} A(P) &= 3 \\ B(P) &= 4 \end{aligned}$$

Algorithmus von Lü und Wang

Wir schieben die Maske in mehreren Iterationen über das Bild.

P wird im Segment gelöscht, wenn:

$$3 \leq B(P) \leq 6$$

$$A(P) = 1$$

$$P_4 \wedge P_6 \wedge (P_2 \vee P_8) = false$$

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = false$$

bei gerader Iteration (2.,4.,...)

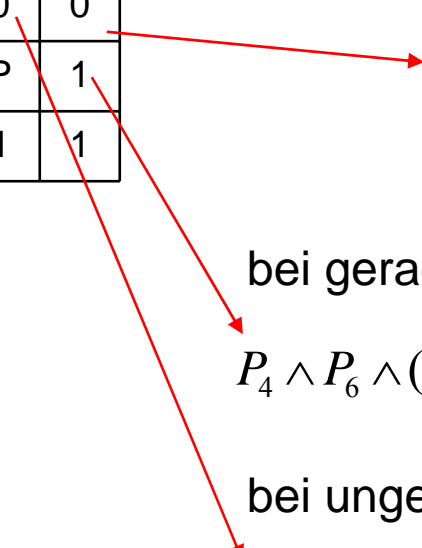
bei ungerader Iteration (1.,3.,...)



Bei den letzten 2 Bedingungen betrachten wir P_i als logische Variable mit den Werten true und false.

Aufgabe 1

0	0	0
0	P	1
1	1	1



$A(P)=1$
 $B(P)=4$

bei gerader Iteration:

$$P_4 \wedge P_6 \wedge (P_2 \vee P_8) = \text{true} \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee \text{false}) = \text{false}$$

bei ungerader Iteration:

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false} \wedge \text{false} \wedge (\text{true} \vee \text{true}) = \text{false}$$

P wird also immer entfernt.

Aufgabe 2 (Lü Wang)

Wird der Punkt P entfernt?

0	0	.
0	P	1
.	1	.

Für . kann dabei 0 oder 1 stehen.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Wirkung des Strukturelementes B^1 aus 3.4.

Aufgabe 2

0	0	.
0	P	1
.	1	.

$$1 \leq A(P) \leq 2$$

$$2 \leq B(P) \leq 5$$

bei gerader Iteration:

$$P_4 \wedge P_6 \wedge (P_2 \vee P_8) = \text{true} \wedge \text{true} \wedge (\text{false} \vee \text{false}) = \text{false}$$

bei ungerader Iteration:

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \text{false} \wedge \text{false} \wedge (\text{true} \vee \text{true}) = \text{false}$$

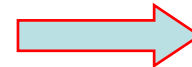
Aufgabe 2

0	0	.
0	P	1
.	1	.

0	0	.
0	P	1
.	1	1

$$A(P) = 1$$

$$3 \leq B(P) \leq 5$$

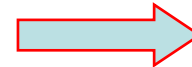


P wird entfernt

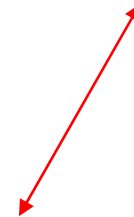
0	0	.
0	P	1
.	1	0

$$A(P) = 2$$

$$2 \leq B(P) \leq 5$$



P wird nicht entfernt



P wird immer entfernt

Aufgabe 3 (Lü Wang)

Wird der Punkt P entfernt?

1	.	0
1	P	0
1	.	0

Für . kann dabei 0 oder 1 stehen.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Wirkung des Strukturelementes B^2 aus 3.4.

■	□	■
■	■	■
■	□	■

Aufgabe 3

1	.	0
1	P	0
1	.	0

$$A(P) = 1$$

$$3 \leq B(P) \leq 5$$

bei gerader Iteration:

$$P_4 \wedge P_6 \wedge (P_2 \vee P_8) = false \wedge . \wedge (. \vee true) = false$$

bei ungerader Iteration:

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = . \wedge true \wedge (false \vee .) = .$$



noch offen

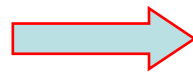
Aufgabe 3

1	.	0
1	P	0
1	.	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = . \wedge true \wedge (false \vee .) = .$$

1	0	0
1	P	0
1	0	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = false \wedge true \wedge (false \vee false) = false$$



P wird entfernt

1	0	0
1	P	0
1	1	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = false \wedge true \wedge (false \vee true) = false$$



P wird entfernt

Aufgabe 3

1	.	0
1	P	0
1	.	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = . \wedge true \wedge (false \vee .) = .$$

1	1	0
1	P	0
1	0	0

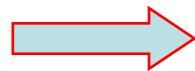
$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = true \wedge true \wedge (false \vee false) = false$$



P wird entfernt

1	1	0
1	P	0
1	1	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = true \wedge true \wedge (false \vee true) = true$$



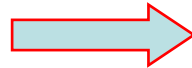
P wird nicht entfernt

Aufgabe 3

1	.	0
1	P	0
1	.	0

1	1	0
1	P	0
1	1	0

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = true \wedge true \wedge (false \vee true) = true$$



P wird nicht entfernt

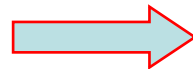
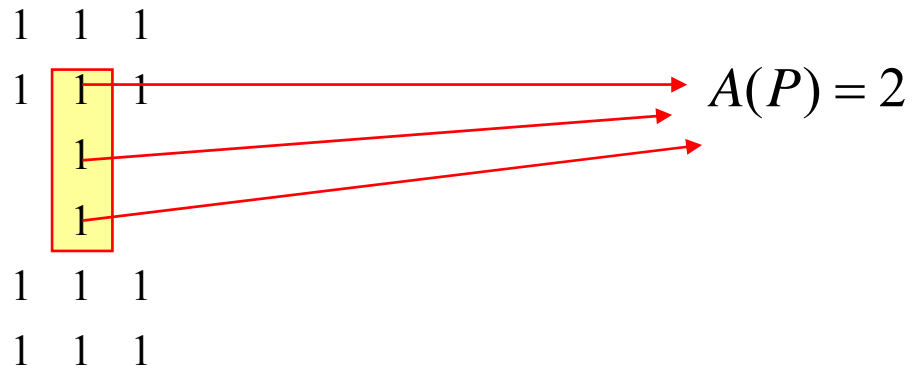
P wird immer entfernt

Aufgabe 4

Wenden Sie den Skelettierungsalgorithmus von Lü und Wang an.

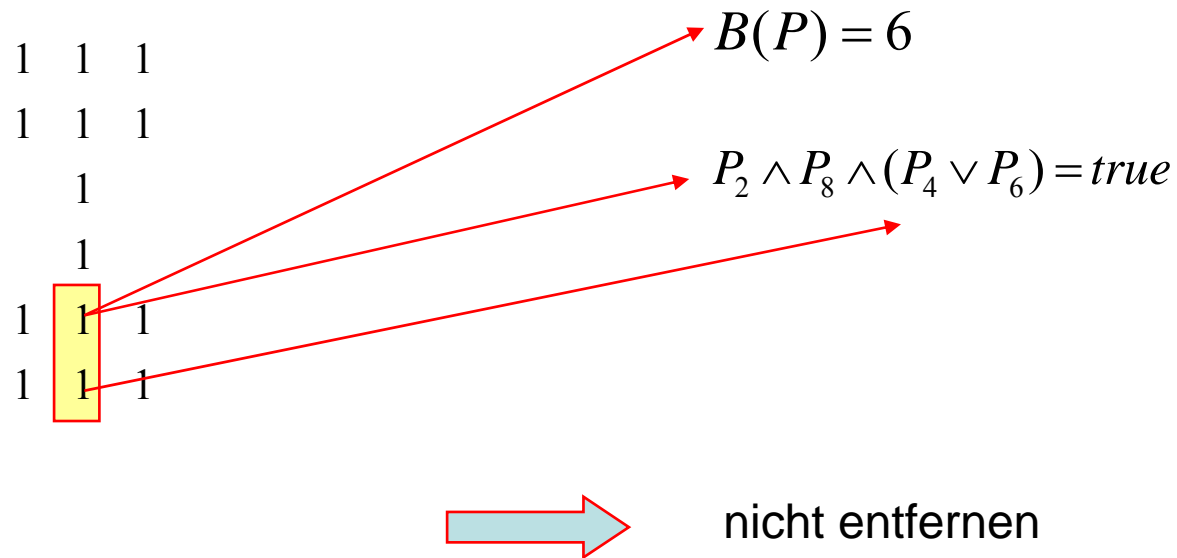
```
1  1  1
1  1  1
   1
   1
1  1  1
1  1  1
```

Aufgabe 4 (1.Iteration)



nicht entfernen

Aufgabe 4 (1.iteration)



Aufgabe 4 (1.iteration)

1	1	1
---	---	---

1	1	1
---	---	---

1

1

1	1	1
---	---	---

1	1	1
---	---	---

$$A(P) = 1$$

$$3 \leq B(P) \leq 5$$

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \textit{false}$$



entfernen

Aufgabe 4 (1.Iteration)

1	1	1
1	1	1
	1	
	1	
1	1	1
1	1	1

$$A(P) = 1$$

$$B(P) = 4$$

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \textit{false}$$



entfernen

Aufgabe 4 (1.Iteration)

1	1	1
1	1	1
	1	
	1	
1	1	1
1	1	1

$$A(P) = 1$$

$$B(P) = 4$$

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = false$$



entfernen

Aufgabe 4 (1.Iteration)

1 1 1

1 1 1

1

1

1 1 1

1 1 1

$$A(P) = 1$$

$$B(P) = 4$$

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = false$$



entfernen

Aufgabe 4 (1.Iteration)

1 1 1

1 1 1

1

1

1 1 1

1 1 1

$$A(P) = 1$$

$$B(P) = 3$$

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = false$$



entfernen

Aufgabe 4 (1.iteration)

1	1	1
1	1	1
	1	
	1	
1	1	1
1	1	1

$$A(P) = 1$$

$$3 \leq B(P) \leq 4$$

$$P_2 \wedge P_8 \wedge (P_4 \vee P_6) = \textit{false}$$



entfernen

Aufgabe 4

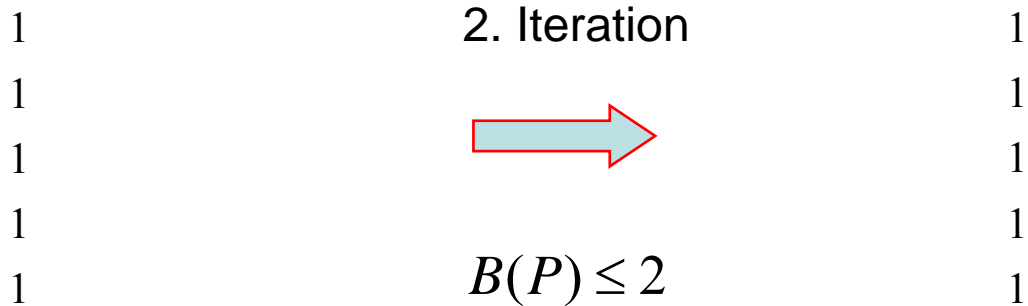
1 1 1
1 1 1
1
1
1 1 1
1 1 1

1. Iteration



1
1
1
1
1
1

Aufgabe 4



kein Punkt wird entfernt

weitere Iterationen ergeben keine Veränderung

Aufgabe 5

Kommen der Skelettierungsalgorithmus von Lü und Wang und der in 3.4 betrachtete morphologische Algorithmus zum gleichen Ergebnis?

Aufgabe 5

