

Übersicht der Vorlesung

1. Einführung
2. Bildverarbeitung
3. Morphologische Operationen
4. Bildsegmentierung
5. Merkmale von Objekten
6. Klassifikation
7. Dreidimensionale Bildinterpretation
8. Bewegungsanalyse aus Bildfolgen
9. PCA (Hauptkomponentenanalyse)
10. ICA (Independent Component Analysis – Unabhängigkeitsanalyse)

7 Dreidimensionale Bildinterpretation

7. Dreidimensionale Bildinterpretation

7.1 Einführung

7.2 Generierung der 2½D-Skizze

7.3 Formale Präzisierung der Gestaltsrekonstruktion

7.4 Naheliegende Grenzen der Gestaltsrekonstruktion

7.5 Zentralprojektion

7.6 Shape from Stereo

7.7 Shape from shading

7.8 Shape from contour

7.9 Weitere Möglichkeiten für Shape from X

7.1 Einführung

Einführung

- Gestaltsrekonstruktion dreidimensionaler Objekte aus Bildern
- Grundlage: Bilder oder Bildfolgen von einer oder mehreren Kameras
- Szene: eine durch die Kamera eingeschränkte dreidimensionale Umgebung der Welt zu einem bestimmten Zeitpunkt
 - Statische Szene:
Im Zeitintervall der Bildaufnahmen erfolgen keine Objektbewegungen. Es können aber z.B. Beleuchtungsänderungen erfolgen.
 - Dynamische Szene:
Objektbewegungen im Zeitintervall der Bildaufnahme sind möglich.
- Unterscheidung zwischen statischer und dynamischer Bildaufnahme
 - Statisch: Kameras im Zeitintervall der Bildaufnahme räumlich fest angeordnet, Änderungen der Kameraparameter sind möglich
- Beschreibung einer Szene S mittels Weltkoordinaten (x,y,z) des R^3

Oberfläche eines dreidimensionalen Objektes

$$F(x, y, z) = 0$$

$$F(x, y, z) = g(x, y) - z \longrightarrow z = g(x, y)$$

Normalenvektor:

$$\vec{n}(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} n_x(x_0, y_0, z_0) \\ n_y(x_0, y_0, z_0) \\ n_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tangentialebene - Gradient

Die Ebene, die den Punkt P_0 enthält und senkrecht zum Normalenvektor $n(x_0, y_0, z_0)$ steht, heißt Tangentialebene im Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Der Gradient von $z = g(x, y)$ im Punkt $P_0 = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ ist wie folgt erklärt:

$$\text{grad}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

7.2 Generierung der 2½D - Skizze

2½ D-Skizze

- Beschreibt eine unvollständige räumliche Information über die sichtbaren Oberflächen eines Objektes.
- Verfahren zur Generierung der 2½ D-Skizze orientieren sich an der menschlichen Wahrnehmung und nennen sich allgemein – **Shape from X**.
- Die dreidimensionale Form eines Objektes wird aufgrund einer bestimmten Methodik X errechnet.

2½ D-Skizze

Räumliche Informationen:

- **Entfernung:**
In jedem Pixel des Bildes wird die Entfernung des zugehörigen Punktes der Szene zur Kamera bestimmt.
- **Orientierung der Oberfläche:**
Zu jedem sichtbaren Punkt auf der Oberfläche eines Objektes werden die Normalenvektoren berechnet.
- **Randkurven von Objekten:**
Diese stellen Diskontinuitäten in der Entfernung dar.
- **Bewegung eines Objektes:**
Wird mit Hilfe von Verschiebungsvektoren dargestellt.

7.3 Formale Präzisierung der Gestaltsrekonstruktion

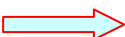
Formale Präzisierung der Gestaltsrekonstruktion

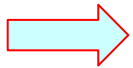
Szenenwert einer Kamera: $s : R^3 \rightarrow R$

$s(x, y, z)$  Grau- oder Farbwerte

Abbildung (z.B. Zentralprojektion) der Szenenpunkte auf die diskrete Bildebene:

$Z : S \rightarrow B$

$P = (x, y, z) \in S$  $B = \{(i, j) : i = 0, \dots, I-1 \quad j = 0, \dots, J-1\}$



$A : S \rightarrow G = (g(i, j))$

optische Abbildung
nicht eineindeutig

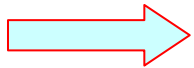
$$A(x, y, z) = g(i, j)$$

$$s(x, y, z) = g(i, j)$$

$$Z(x, y, z) = (i, j)$$

Problem

Szenenobjekte anhand von Bildern wieder als dreidimensionale Körper darzustellen



$$A^{-1} : G \rightarrow S$$

nicht eindeutig

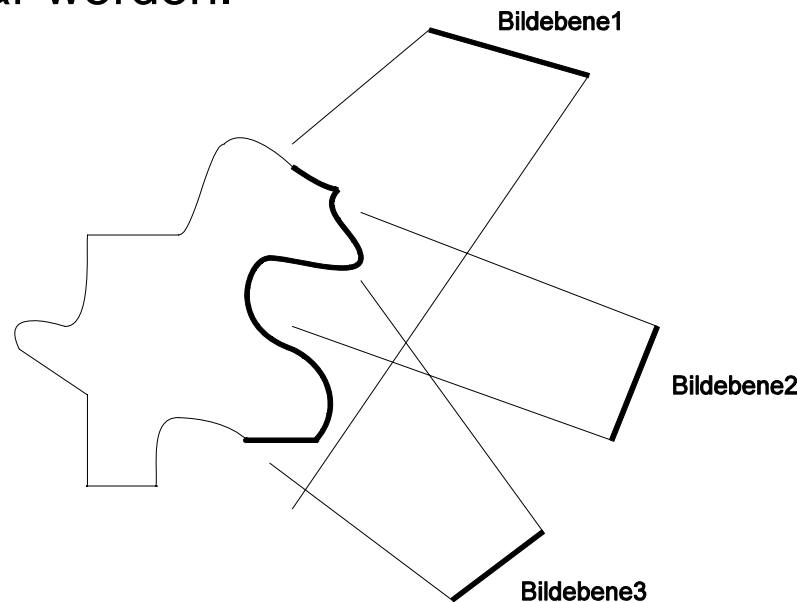
ist zu untersuchen

Nur eingeschränkte Problemstellungen können gelöst werden,
wie z.B.: Entfernungsbestimmung oder Orientierung der Oberfläche eines Objektes

7.4 Naheliegende Grenzen der Gestaltsrekonstruktion

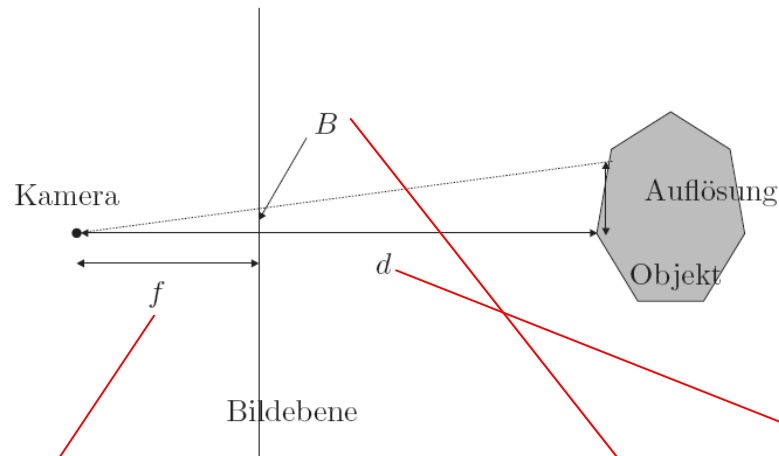
Grenzen der Gestaltsrekonstruktion

1. Man kann nur sichtbare Objektoberflächen rekonstruieren.
2. Eine Szene ist immer nur ein begrenzter Ausschnitt der realen Welt. Deshalb können nur die aus den Aufnahmegerichtungen sichtbaren dreidimensionalen Merkmale eines Objektes prinzipiell rekonstruierbar werden.



Grenzen der Gestaltsrekonstruktion

3. Nur eine begrenzte Ortsauflösung der Objektoberfläche ist möglich. Damit sind der Genauigkeit der Oberflächenrekonstruktion weitere Grenzen gesetzt.



$$\frac{B}{f} = \frac{\text{erreichbare Auflösung}}{d}$$

$$\text{erreichbare Auflösung} = \frac{B \cdot d}{f}$$

Kamerakonstante
(Abstand zwischen Projektionszentrum
und Bildebene)

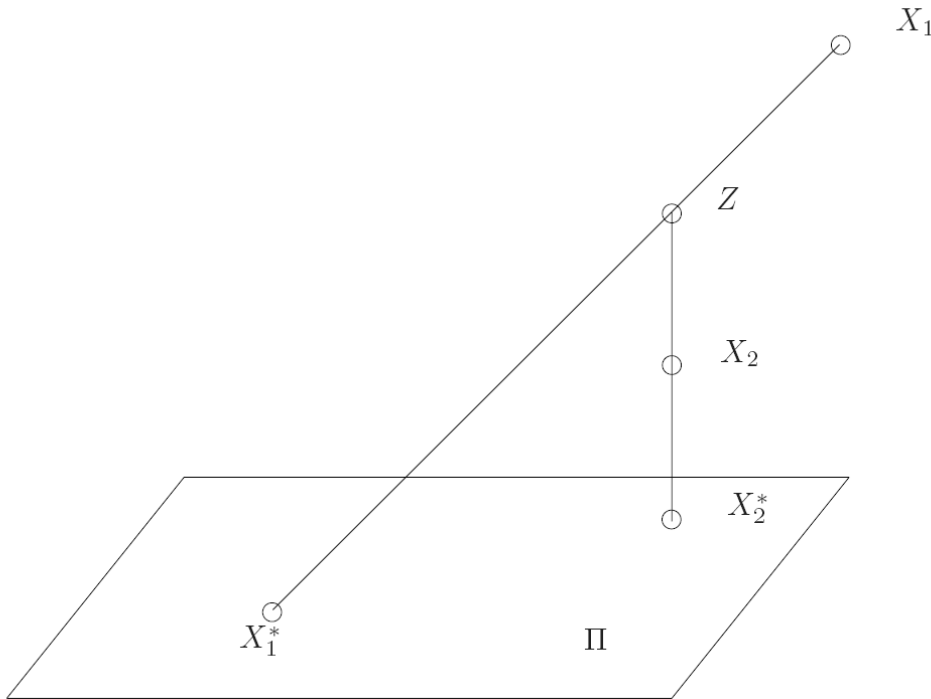
Abstand zwischen Kamera und Objekt

Breite einer Bildspalte

7.5 Zentralprojektion

7.5.1 Definition

Definition der Zentralprojektion



$\Pi \subset R^3$ Ebene

$Z \in R^3$ Projektionszentrum

$g(X, Z)$ Gerade durch X und Z
Projektionsgerade durch X

$$\sigma_Z : R^3 \rightarrow \Pi$$

$$\sigma_Z(X) = X^* = g(X, Z) \cap \Pi \quad (X \neq Z)$$

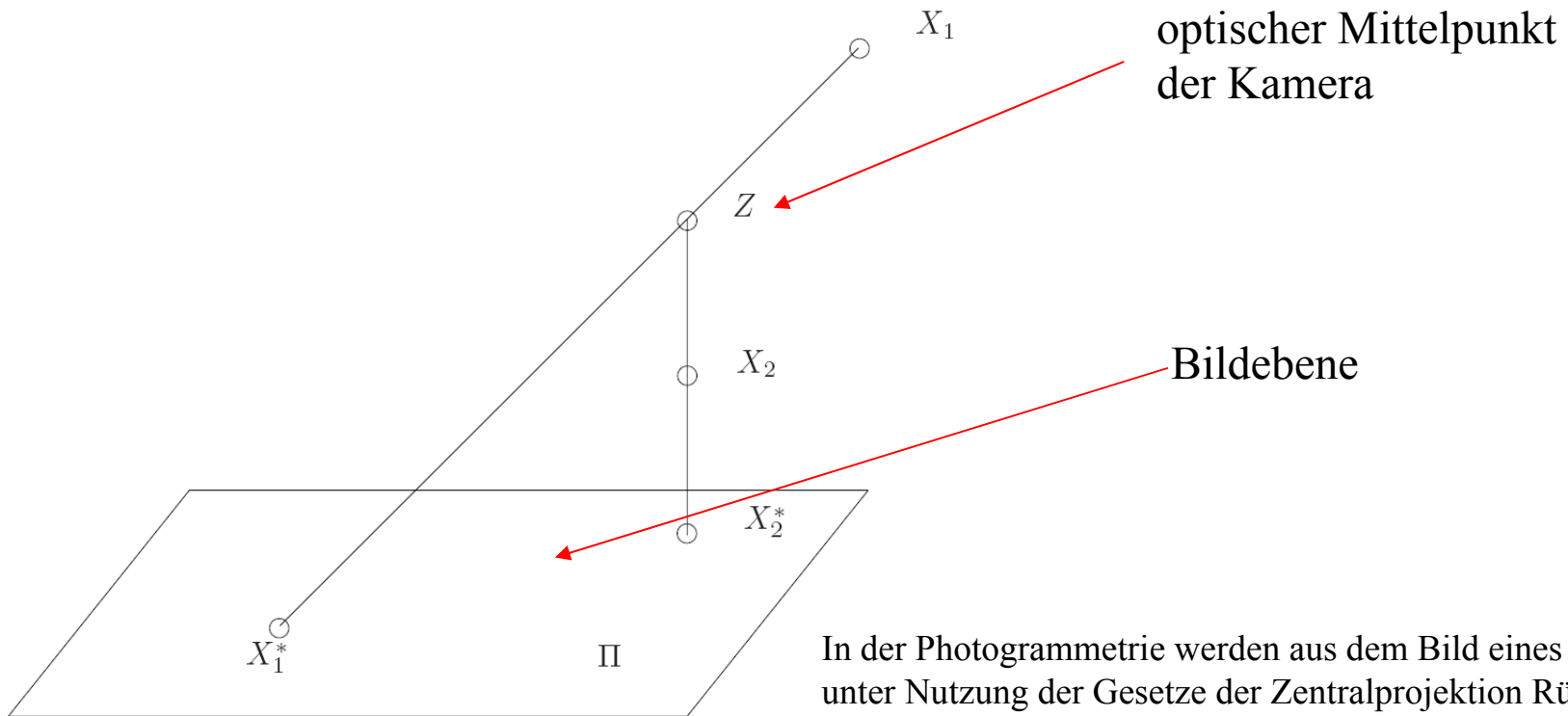
Zentralprojektion – Interpretation

Szene



Bild

Zentralprojektion

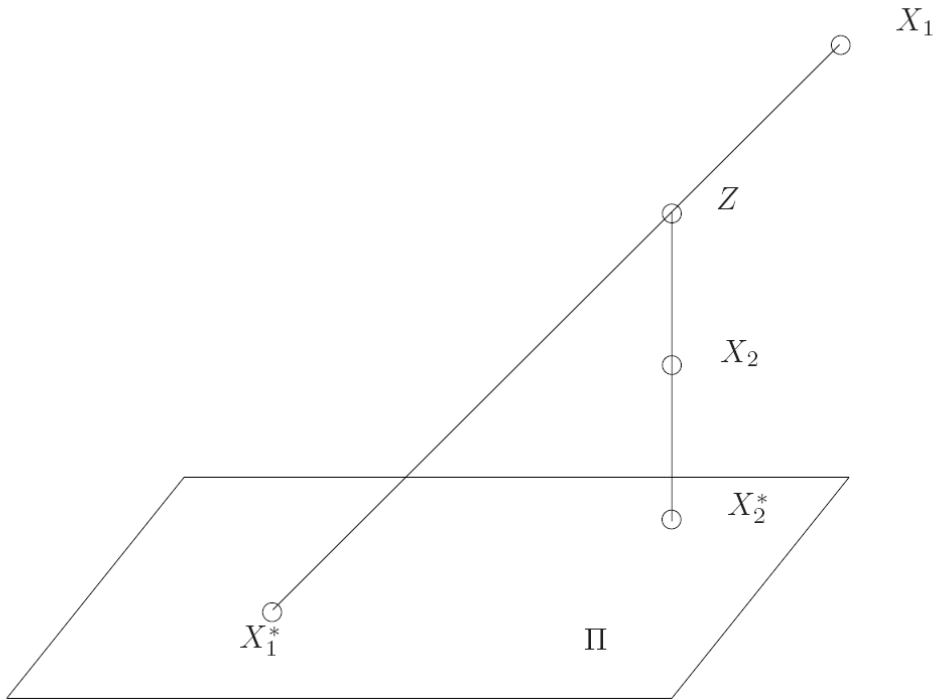


optischer Mittelpunkt
der Kamera

Bildebene

In der Photogrammetrie werden aus dem Bild eines Objektes unter Nutzung der Gesetze der Zentralprojektion Rückschlüsse auf Lage und Eigenschaften der Objekte gezogen.

Bemerkungen



σ_Z eindeutig
nicht umkehrbar eindeutig

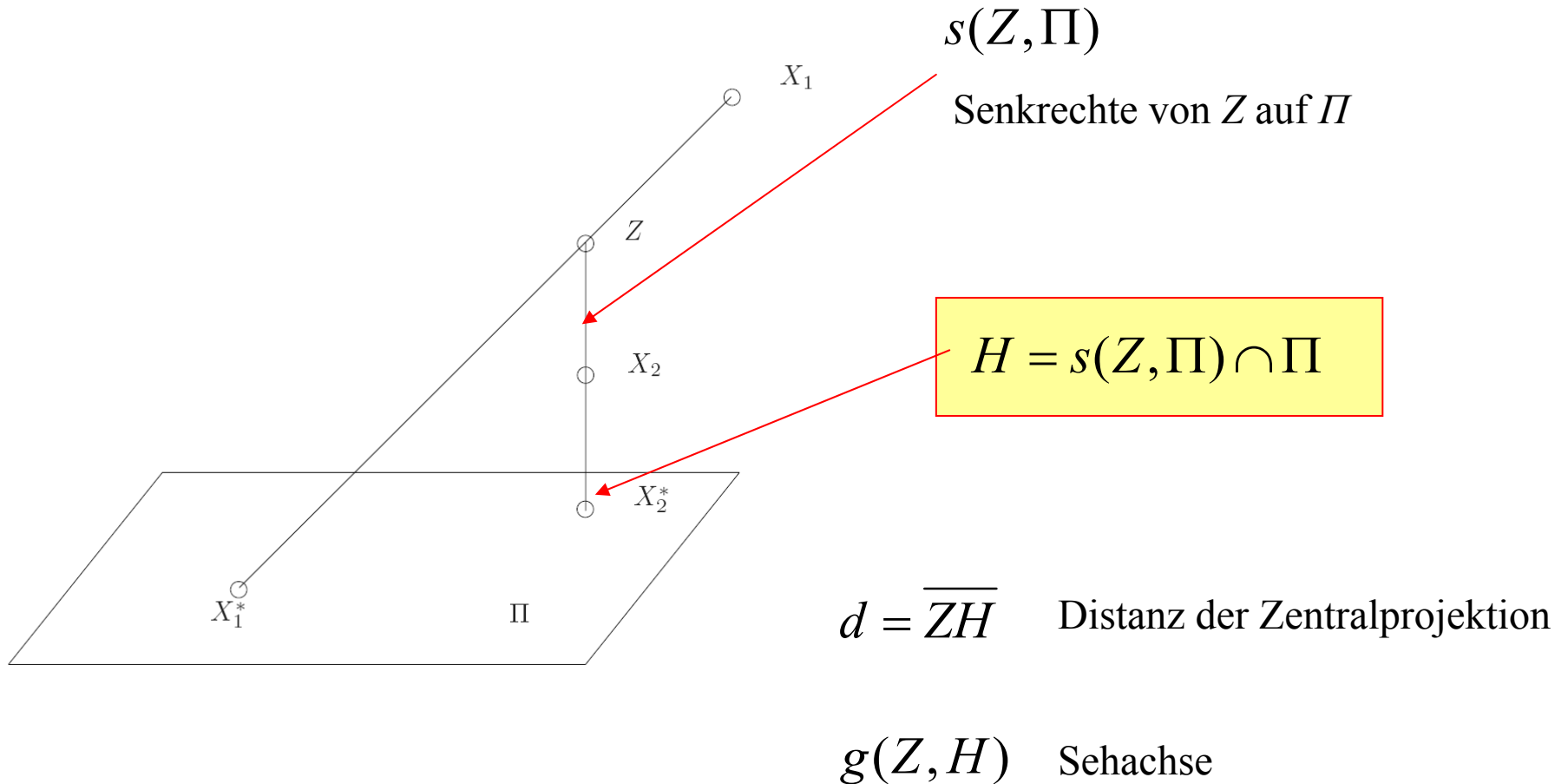
$$\sigma_Z(Y) = X^* \quad \forall Y \in g(X, Z) \quad Y \neq Z$$

$$\sigma_Z(X) = X^* = g(X, Z) \cap \Pi \quad (X \neq Z)$$

keine Gerade

$X = Z$ Zentralprojektion nicht erklärt

Hauptpunkt



Verschwindungsebene

$$\Pi_V \quad Z \in \Pi_V \quad \Pi_V \parallel \Pi$$

Die Zentralprojektion existiert nicht für alle Punkte von Π_V .

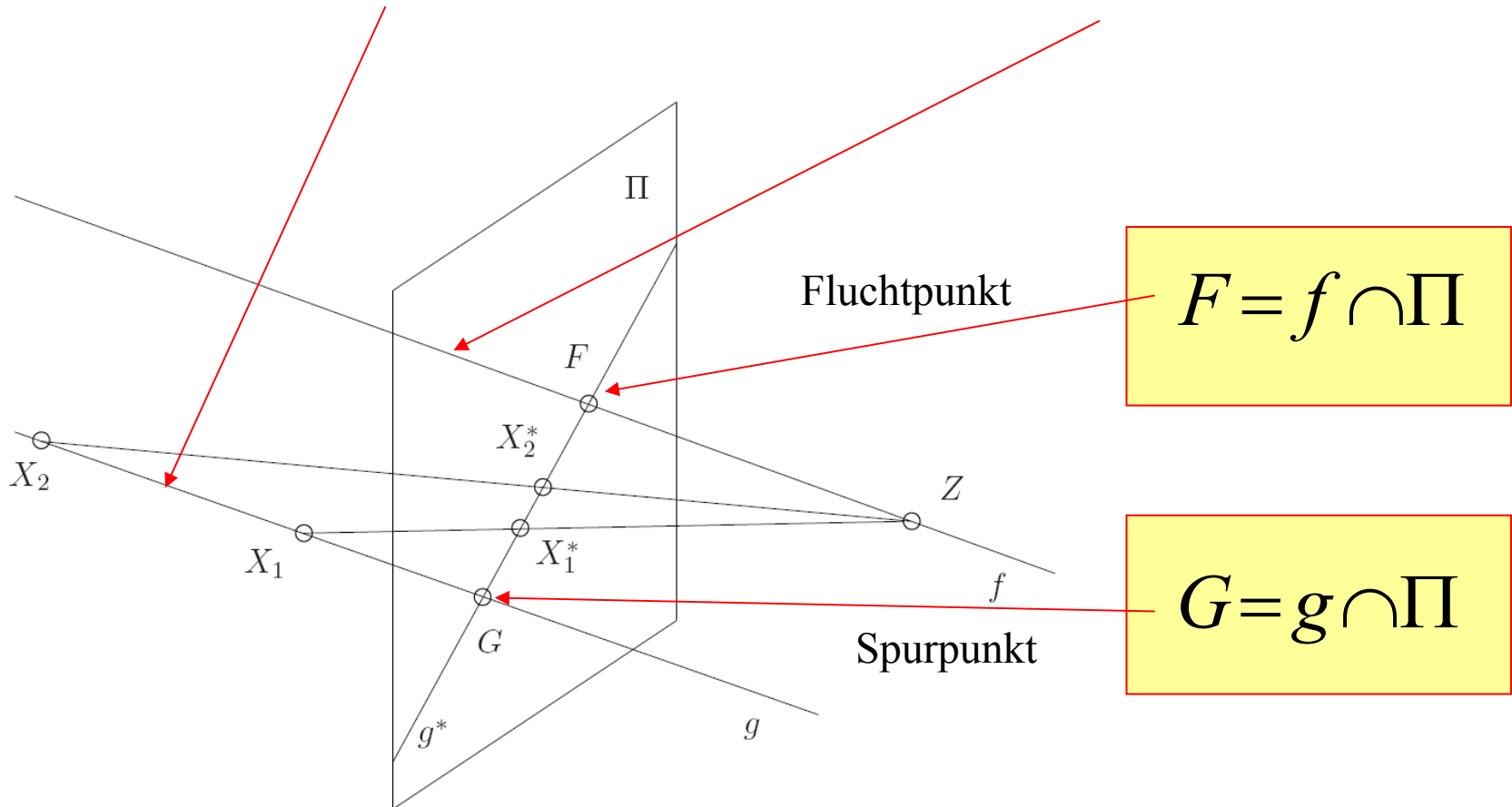
Man sagt auch, dass die Zentralprojektionen dieser Punkte auf der unendlich fernen Geraden von Π liegen.

7.5.2 Zentralprojektion von Geraden

Spurpunkt – Fluchtpunkt

$g \nparallel \Pi$ und $Z \notin g$

$f \parallel g$ und $Z \in f$

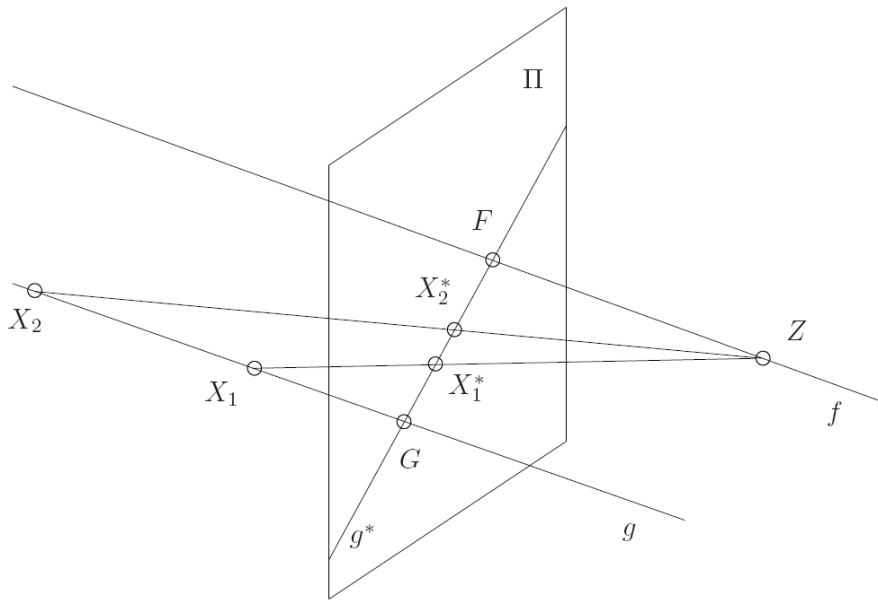


Eigenschaften

$$f \parallel g \text{ und } Z \in f$$

$$F = f \cap \Pi$$

$$H = s(Z, \Pi) \cap \Pi$$



Parallele Geraden, die nicht parallel zu Π sind, haben den gleichen Fluchtpunkt.

Geraden mit gleichem Fluchtpunkt sind parallel.

Für jede Gerade senkrecht zur Ebene Π fällt der Fluchtpunkt mit dem Hauptpunkt zusammen.

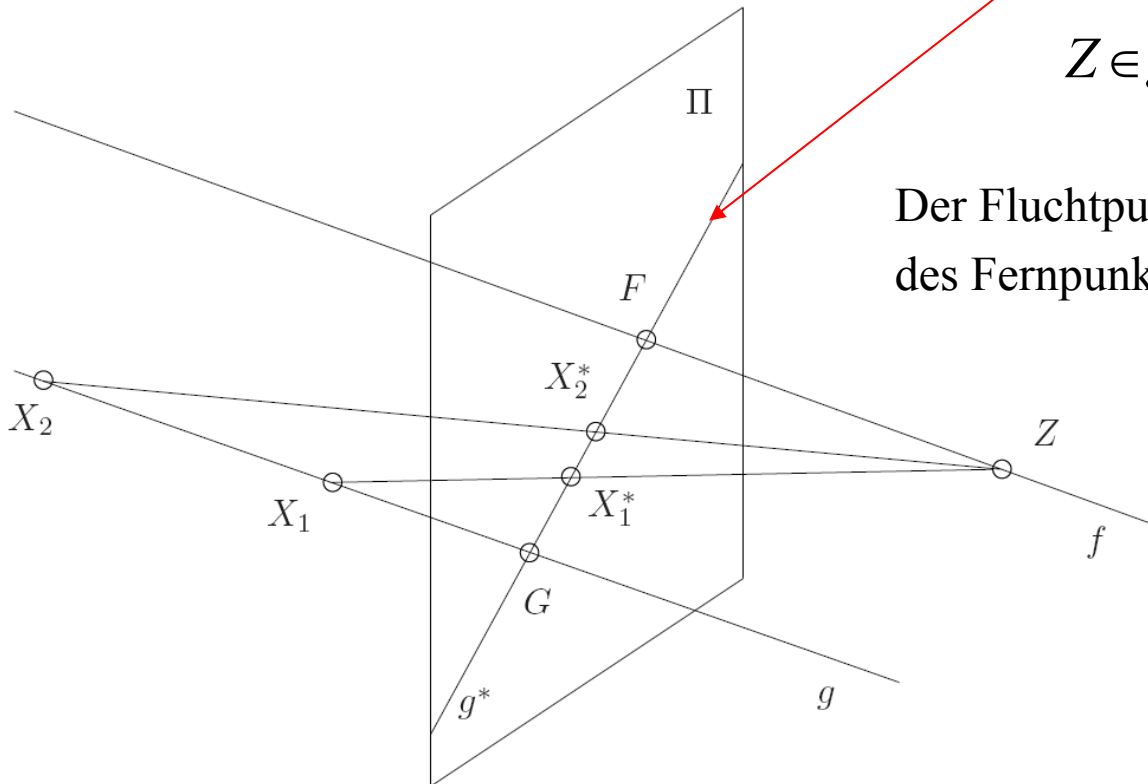
Zentralprojektion einer Geraden

$g \nparallel \Pi$ und $Z \notin g$

$$g^* = g(G, F)$$

$$Z \in g \quad \Rightarrow \quad g^* = G = F$$

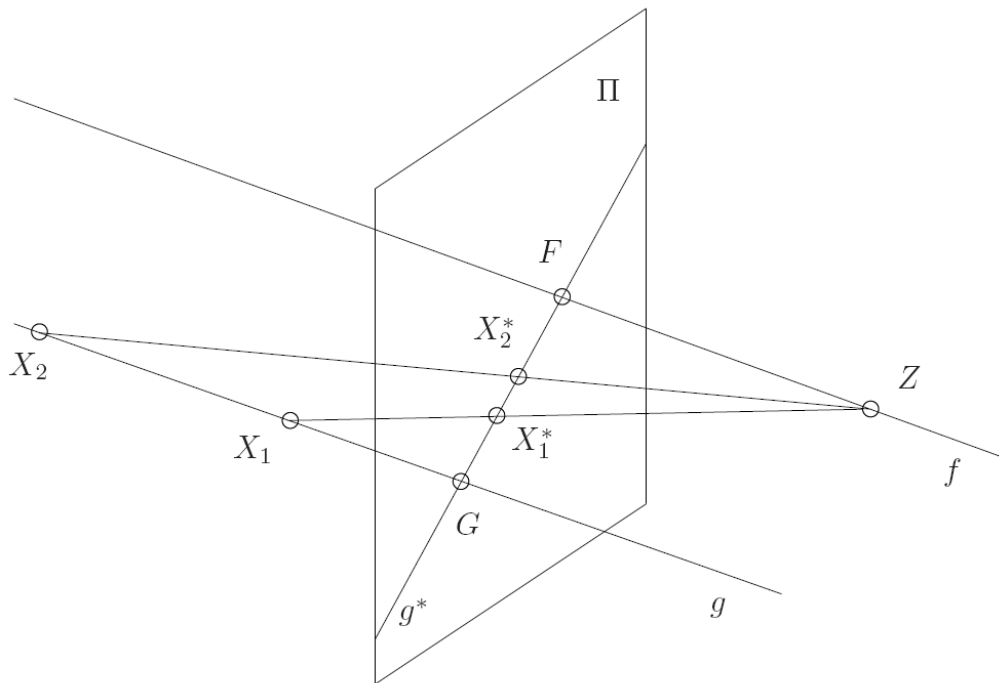
Der Fluchtpunkt F kann als Zentralprojektion des Fernpunktes von g aufgefasst werden.



Beweis

$g \nparallel \Pi$ und $Z \notin g$

$$g^* = g(G, F)$$



Ebene E $g \subset E$
 $Z \in E$

$$X_i \in g \rightarrow g(X_i, Z) \subset E$$

$$X_i^* \in E \cap \Pi = g^*$$

$$G, F \in E \quad G, F \in \Pi$$

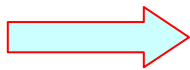
$$\Rightarrow G, F \in g^*$$

Bemerkungen

- Bei der Zentralprojektion werden also parallele Geraden i.a. nicht zu parallelen Geraden abgebildet

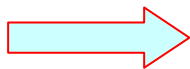
Sonderfall:

$$g_1 \parallel g_2 \parallel \Pi \quad g_1, g_2 \not\subset \Pi_V$$



$$g_1^* \parallel g_2^* \parallel g_1 \parallel g_2$$

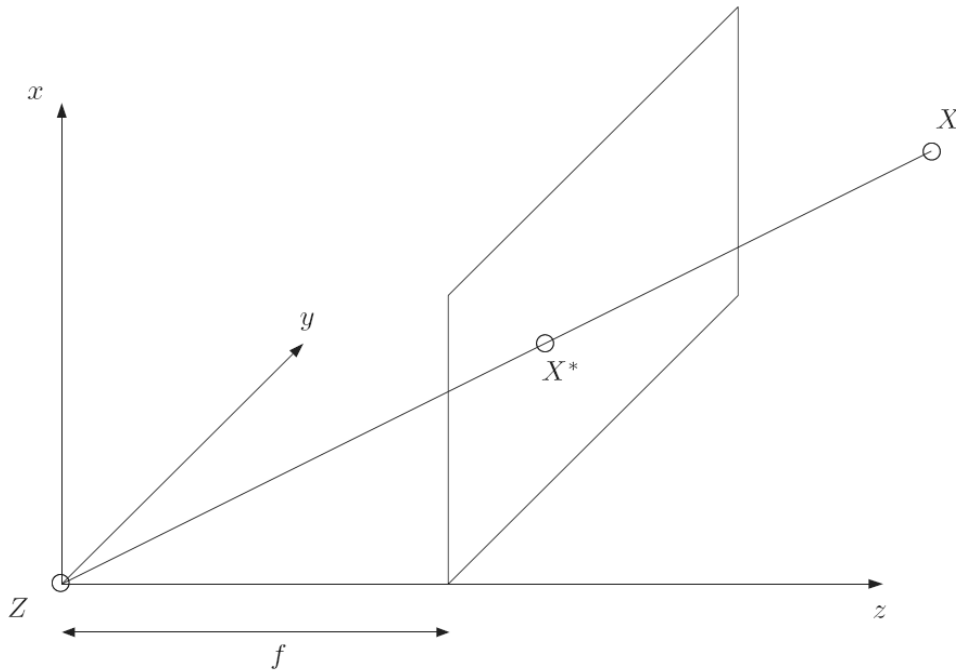
$$g \subset \Pi_V$$



Ferngerade von Π

7.5.3 Zentralprojektion im Koordinatensystem

Zentralprojektion im Koordinatensystem



$$Z = (0,0,0)$$

$\Pi \parallel (x, y)$ - Ebene

$$\Pi \rightarrow z = f$$

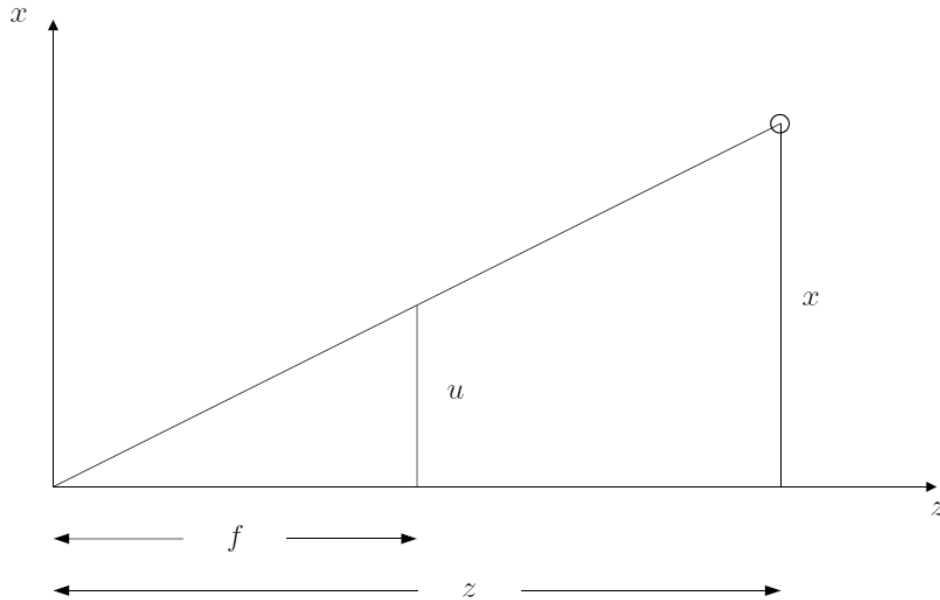
$$X = (x, y, z)$$

$$X^* = (u, v, f)$$

$$u = \frac{x \cdot f}{z}$$

$$v = \frac{y \cdot f}{z}$$

Beweis



$$\frac{z}{x} = \frac{f}{u}$$

$$u = \frac{x \cdot f}{z}$$

Andere Lage

$$Z = (0, 0, -f)$$

$\Pi \rightarrow$ Ebene $z = 0$

$$u = \frac{x \cdot f}{z + f}$$

$$v = \frac{y \cdot f}{z + f}$$

Bemerkungen

- Die Zentralprojektion ist nicht in Matrixform beschreibbar und damit keine affine Abbildung.
- Eine bessere analytische Beschreibung wird durch homogene Koordinaten ermöglicht.

Anwendung auf Geraden

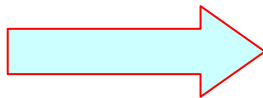
$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \exists \lambda \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\}$$

beliebiger fester Punkt
auf der Geraden

Richtungsvektor

Betrag von $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ sei gleich 1.

$$g^* = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} : \exists \eta \text{ mit } \begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ f \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\begin{aligned} (c_1 d_2 - c_2 d_1) a_3 - (d_2 a_1 - d_1 a_2) f &= 0 \\ b_3 (c_1 d_2 - c_2 d_1) - (d_2 b_1 - d_1 b_2) f &= 0 \end{aligned}$$

Beweis

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \exists \lambda \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$g^* = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} : \exists \eta \text{ mit } \begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ f \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u = f \frac{x}{z} \quad v = f \frac{y}{z}$$

$$\lambda \rightarrow \exists \eta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + \eta \cdot d_1 = f \frac{a_1 + \lambda \cdot b_1}{a_3 + \lambda \cdot b_3} \\ c_2 + \eta \cdot d_2 = f \frac{a_2 + \lambda \cdot b_2}{a_3 + \lambda \cdot b_3} \end{array} \right.$$

$$c_1 d_2 - c_2 d_1 = \frac{d_2 f (a_1 + \lambda b_1) - d_1 f (a_2 + \lambda b_2)}{a_3 + \lambda b_3}$$

$$(c_1 d_2 - c_2 d_1) a_3 - (d_2 a_1 - d_1 a_2) f + \lambda [b_3 (c_1 d_2 - c_2 d_1) - (d_2 b_1 - d_1 b_2) f] = 0$$

Die letzte Gleichung muss für alle λ gelten. \Rightarrow

$$\begin{aligned} (c_1 d_2 - c_2 d_1) a_3 - (d_2 a_1 - d_1 a_2) f &= 0 \\ b_3 (c_1 d_2 - c_2 d_1) - (d_2 b_1 - d_1 b_2) f &= 0 \end{aligned}$$

Anwendung auf Geraden

4 Gleichungen für die 6 Unbekannten von g .

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

$$(c_1d_2 - c_2d_1)a_3 - (d_2a_1 - d_1a_2)f = 0$$

$$b_3(c_1d_2 - c_2d_1) - (d_2b_1 - d_1b_2)f = 0$$

7.5.4 Homogene Koordinaten

Homogene Koordinaten – Homogene Transformationsmatrix

$$P = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$$

$$P_H = (hx, hy, hz, h)^T, \quad h \in \mathbb{R}, \quad h \neq 0$$

Skalierungsfaktor

Homogenen Transformationsmatrix (4×4 – Matrix):

$$D = \left(\begin{array}{c|c} R & T \\ \hline P & S \end{array} \right)$$

$R - 3 \times 3$ – Matrix

$T - 3 \times 1$ – Vektor

$P - 1 \times 3$ – Vektor

S – Zahl

Translation

Perspektivtransformation

Skalierung

Rotation und Skalierung

Bemerkungen

- Aus den homogenen Koordinaten $P_H = (hx, hy, hz, h)$ erhält man die üblichen räumlichen Koordinaten (x, y, z) des Punktes P , indem man die ersten drei Werte durch die 4. Koordinate dividiert.
- Vorteile:
 - einheitliche Matrixdarstellung vieler Transformationen (Translation, Rotation, Skalierung, Zentralprojektion)
 - Hintereinanderausführung durch Matrixmultiplikation

Beispiele

Translation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+T_x \\ y+T_y \\ z+T_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung:

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x x \\ S_y y \\ S_z z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{1}{S} \end{pmatrix}$$

übliche kartesische
Koordinaten:

$$\frac{x}{1} = S \cdot x$$

$$\frac{y}{1} = S \cdot y$$

$$\frac{z}{1} = S \cdot z$$



Beispiel – Rotation

x – Achse mit Winkel α_x

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_x) & -\sin(\alpha_x) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_x) & \cos(\alpha_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos(\alpha_x) - z \sin(\alpha_x) \\ y \sin(\alpha_x) + z \cos(\alpha_x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

y – Achse mit Winkel α_y

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_y) & 0 & \sin(\alpha_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\alpha_y) + z \sin(\alpha_y) \\ y \\ -x \sin(\alpha_y) + z \cos(\alpha_y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

z – Achse mit Winkel α_z

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_z) & -\sin(\alpha_z) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_z) & \cos(\alpha_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\alpha_z) - y \sin(\alpha_z) \\ y \cos(\alpha_z) + x \sin(\alpha_z) \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel – Zentralprojektion

$$Z = (0,0,0)$$

$\Pi \parallel (x, y)$ - Ebene

$$\Pi \rightarrow z = f$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{f} \end{pmatrix}$$

übliche kartesische
Koordinaten:

$$\frac{x}{\frac{z}{f}} = \frac{x \cdot f}{z}$$

$$\frac{y}{\frac{z}{f}} = \frac{y \cdot f}{z}$$

$$\frac{z}{\frac{z}{f}} = \frac{z \cdot f}{z} = f$$

Beispiel – Zentralprojektion

$$Z = (0,0,0)$$

$$\Pi \rightarrow Ax + By + Cz = D, \quad D \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{A}{D} & \frac{B}{D} & \frac{C}{D} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{Ax + By + Cz}{D} \end{pmatrix}$$

7.5.5 Rekonstruktion von 3D – Informationen aus der Zentralprojektion

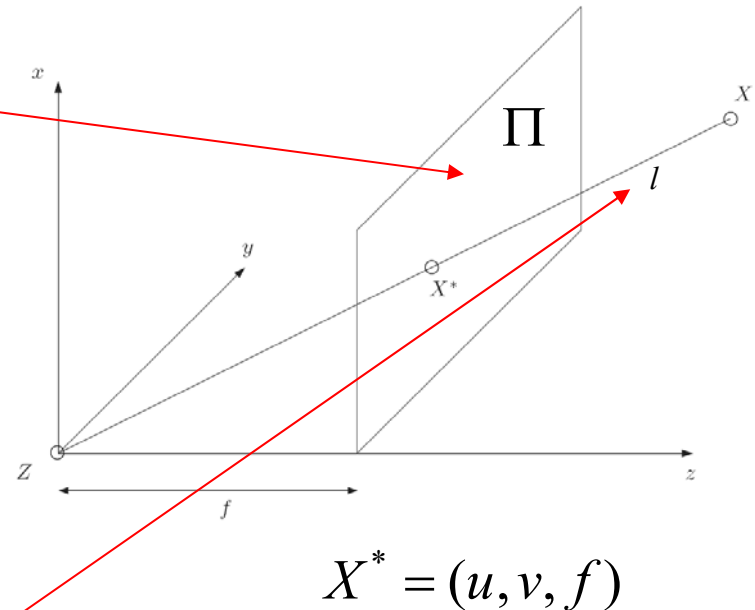
Inverse Zentralprojektion

$$Z = (0,0,0)$$

$$\Pi \rightarrow z = f$$

inverse Zentralprojektion des Punktes (u,v,f)

$$l = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \exists \lambda \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} \right\}$$



- Es ist keine eindeutige Rekonstruktion möglich.
- Verfügt man aber schon über Informationen des 3D-Objektes, so lässt es sich oft vollständig rekonstruieren.

Rekonstruktion eines Punktes in einer bekannten Ebene

gesuchter Punkt: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Zentralprojektion des gesuchten Punktes: $\begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix}$

gegebene Ebene: $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : Ax + By + Cz + D = 0 \right\}$ $l = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \exists \lambda \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = l \cap E \quad \Rightarrow \quad A\lambda u + B\lambda v + C\lambda f + D = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= \frac{-Du}{Au + Bv + Cf} \\ b &= \frac{-Dv}{Au + Bv + Cf} \\ c &= \frac{-Df}{Au + Bv + Cf} \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{-D}{Au + Bv + Cf}$$

Rekonstruktion einer Geraden in einer bekannten Ebene

gesuchte Gerade:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \exists \lambda \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\}$$

Zentralprojektion der
gesuchten Geraden:

$$g^* = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} : \exists \eta \text{ mit } \begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ f \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

gegebene Ebene:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : Ax + By + Cz + D = 0 \right\}$$

Rekonstruktion einer Geraden in einer bekannten Ebene

Ebene: Σ mit $g^* \subset \Sigma$ und $(0,0,0) \in \Sigma$

es gilt: $(0,0,0) \in \Sigma$, $(c_1, c_2, f) \in \Sigma$, $(c_1 + d_1, c_2 + d_2, f) \in \Sigma$

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_1 + d_1 & x \\ 0 & c_2 & c_2 + d_2 & y \\ 0 & f & f & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : fd_2x - fd_1y + (c_2d_1 - c_1d_2)z = 0 \right\}$$

$$g = \Sigma \cap E$$

Rekonstruktion einer Geraden in einer bekannten Ebene

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \exists \lambda \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$g = \Sigma \cap E$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : Ax + By + Cz + D = 0 \right\}$$

Normalenvektor

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : fd_2x - fd_1y + (c_2d_1 - c_1d_2)z = 0 \right\}$$

Normalenvektor

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} d_2f \\ -d_1f \\ c_2d_1 - c_1d_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} d_2f \\ -d_1f \\ c_2d_1 - c_1d_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \right\|}$$

$$l = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \exists \lambda \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ f \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = E \cap l$$

inverse Zentralprojektion

7.5.6 Doppelverhältnis

Teilverhältnis

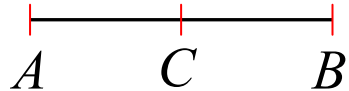
A, B, C liegen auf einer Geraden

$$t = T(A, B, C)$$

$$\overline{AC} = t \cdot \overline{BC}$$

als orientiert aufzufassen

Beispiel:



$$\overline{AC} = -\overline{BC}$$

$$T(A, B, C) = -1$$

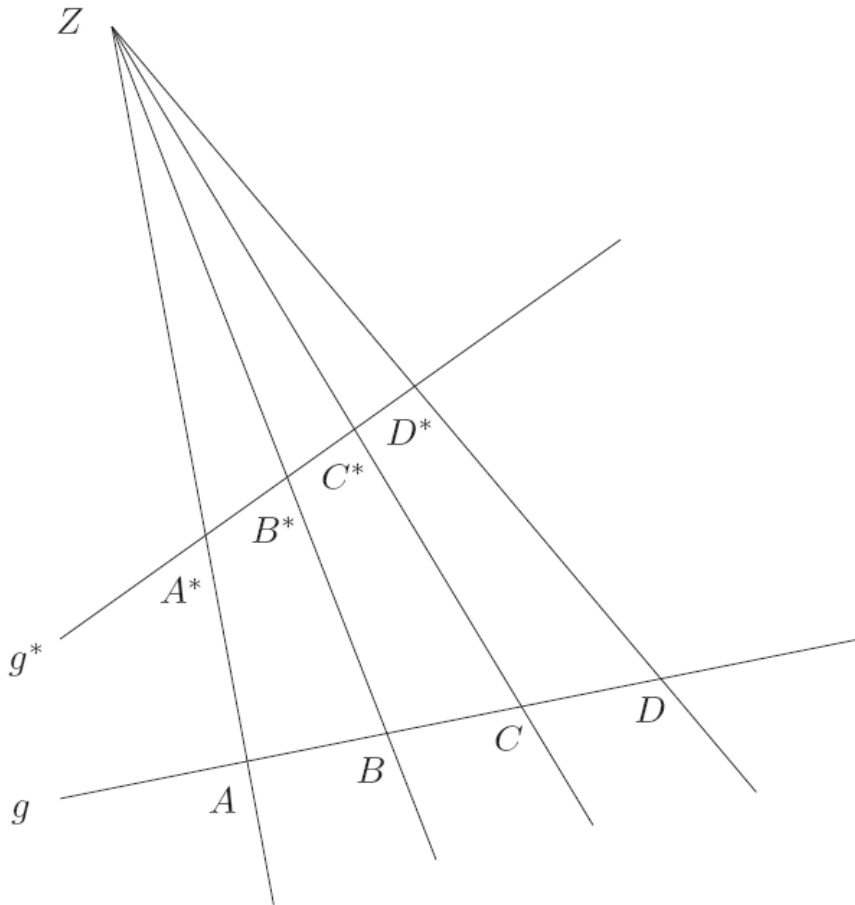
Doppelverhältnis

A, B, C, D liegen auf einer Geraden

$$D(A, B, C, D) = \frac{T(A, B, C)}{T(A, B, D)}$$

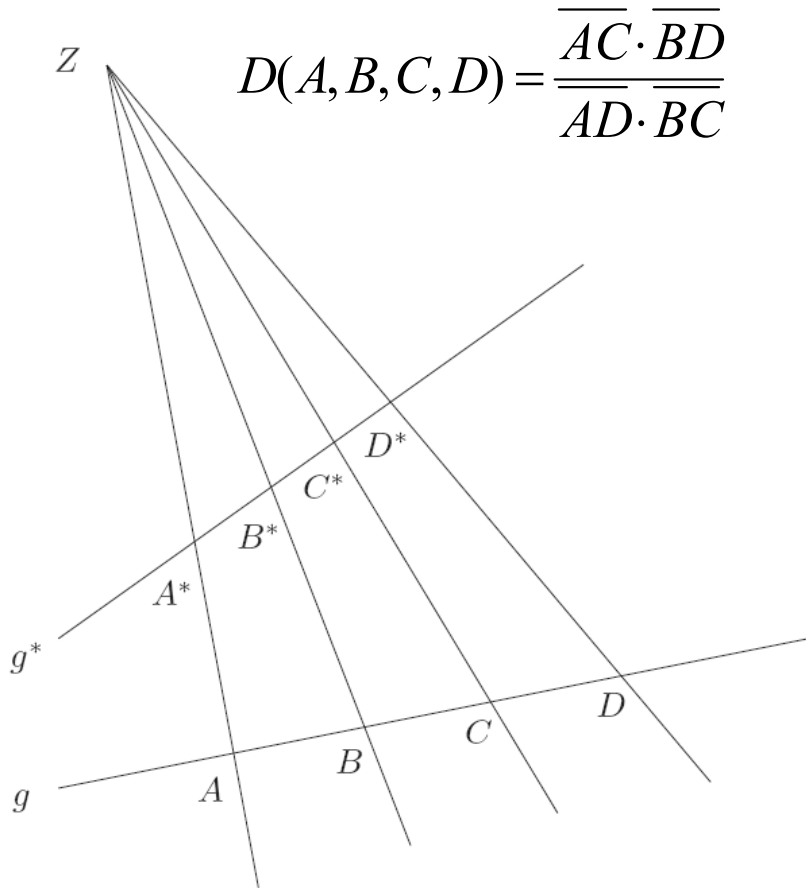
$$D(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}$$

Invariante



$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = \frac{\overline{A^*C^*} \cdot \overline{B^*D^*}}{\overline{A^*D^*} \cdot \overline{B^*C^*}}$$

Beispiel



$$D(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}$$

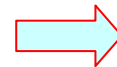
$$\overline{A^*B^*} = \overline{B^*C^*} = \overline{C^*D^*} = 2$$

$$\overline{AB} = 3 \quad \overline{BC} = 1$$

$$D(A^*, B^*, C^*, D^*) = \frac{4 \cdot 4}{6 \cdot 2} = \frac{4}{3}$$

$$D(A, B, C, D) = \frac{4}{3} = D(A^*, B^*, C^*, D^*)$$

$$= \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = \frac{4 \cdot (\overline{CD} + 1)}{(\overline{CD} + 4) \cdot 1}$$

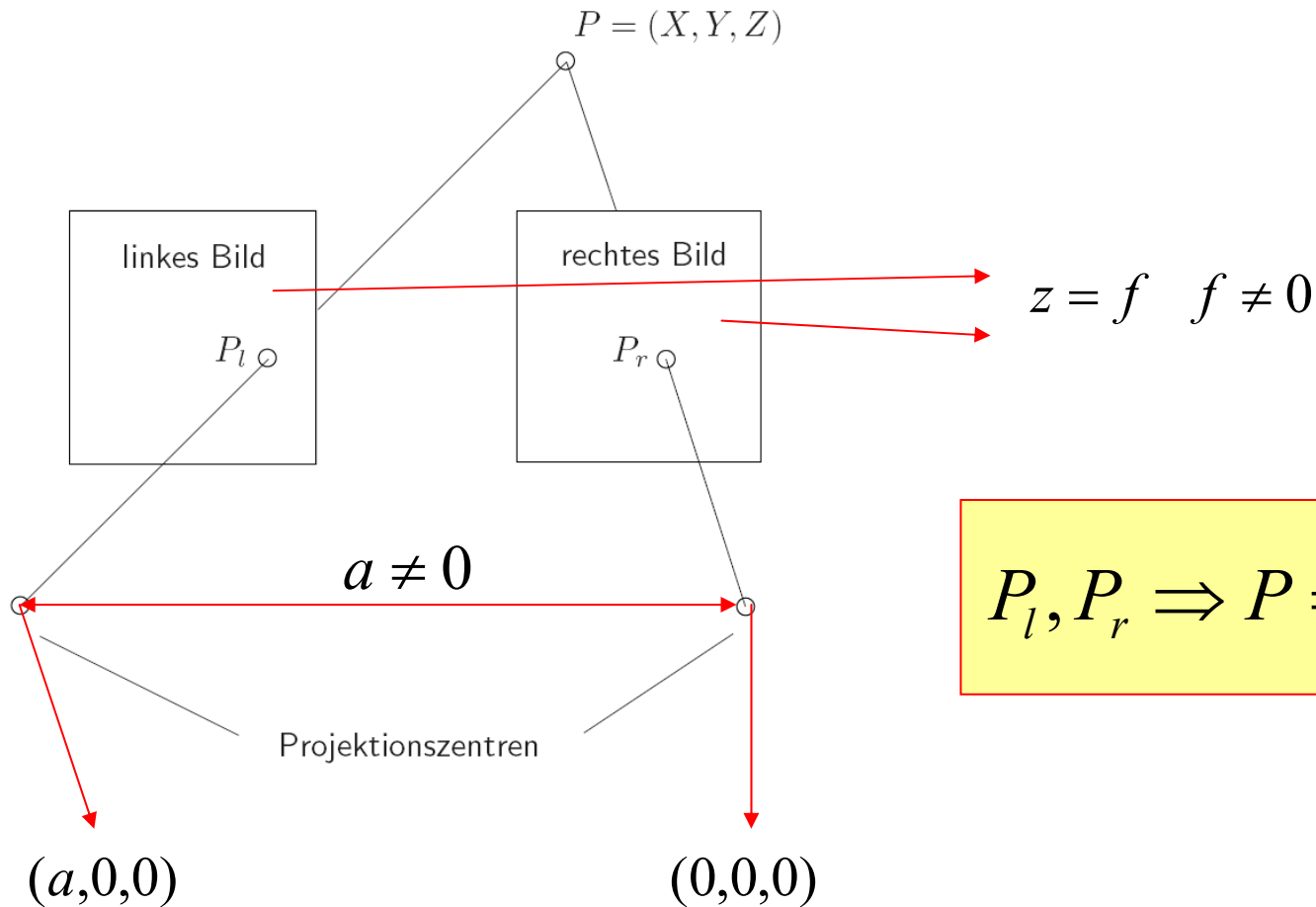


$$\overline{CD} = \frac{1}{2}$$

7.6 Shape from Stereo

7.6.1 Grundlagen

Standardstereogeometrie



$$P_l, P_r \Rightarrow P = (x, y, z)$$

Grundlagen

$$P = (x, y, z), \quad x \neq 0, \quad x \neq a, \quad z > f$$

$$P_l = (x_l, y_l, f) \quad P_r = (x_r, y_r, f)$$

$$x_r = \frac{f \cdot x}{z}$$

$$y_r = \frac{f \cdot y}{z}$$

$$x_l = a + \frac{f}{z}(x - a)$$

$$y_l = \frac{f \cdot y}{z}$$

(Übung)

$$y_r = y_l = y_B$$

Grundlagen

$$x_r = \frac{f \cdot x}{z}$$

$$x_l = a + \frac{f}{z}(x - a)$$

$$\Rightarrow z = \frac{f \cdot x}{x_r} = \frac{f \cdot (x - a)}{x_l - a} \Rightarrow \frac{x}{x_r} = \frac{x - a}{x_l - a}$$

$$x = \frac{-a \cdot x_r}{x_l - x_r - a} = \frac{a \cdot x_r}{x_r - x_l + a}$$

$$z = \frac{a \cdot f}{x_r - x_l + a}$$

$$y_r = \frac{f \cdot y}{z}$$

$$y = \frac{a \cdot y_B}{x_r - x_l + a}$$

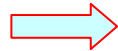
Ergebnis

$$P = (x, y, z), \quad x \neq 0, \quad x \neq a, \quad z > f$$

$$P_l = (x_l, y_l, f) \quad P_r = (x_r, y_r, f)$$

$$x = \frac{a \cdot x_r}{x_r - x_l + a} \quad y = \frac{a \cdot y_r}{x_r - x_l + a} \quad z = \frac{a \cdot f}{x_r - x_l + a}$$

$$x_r - x_l$$



Disparität

Problem: korrespondierende Punkte im linken und rechten Bild zu finden, so dass die Disparität gemessen werden kann.

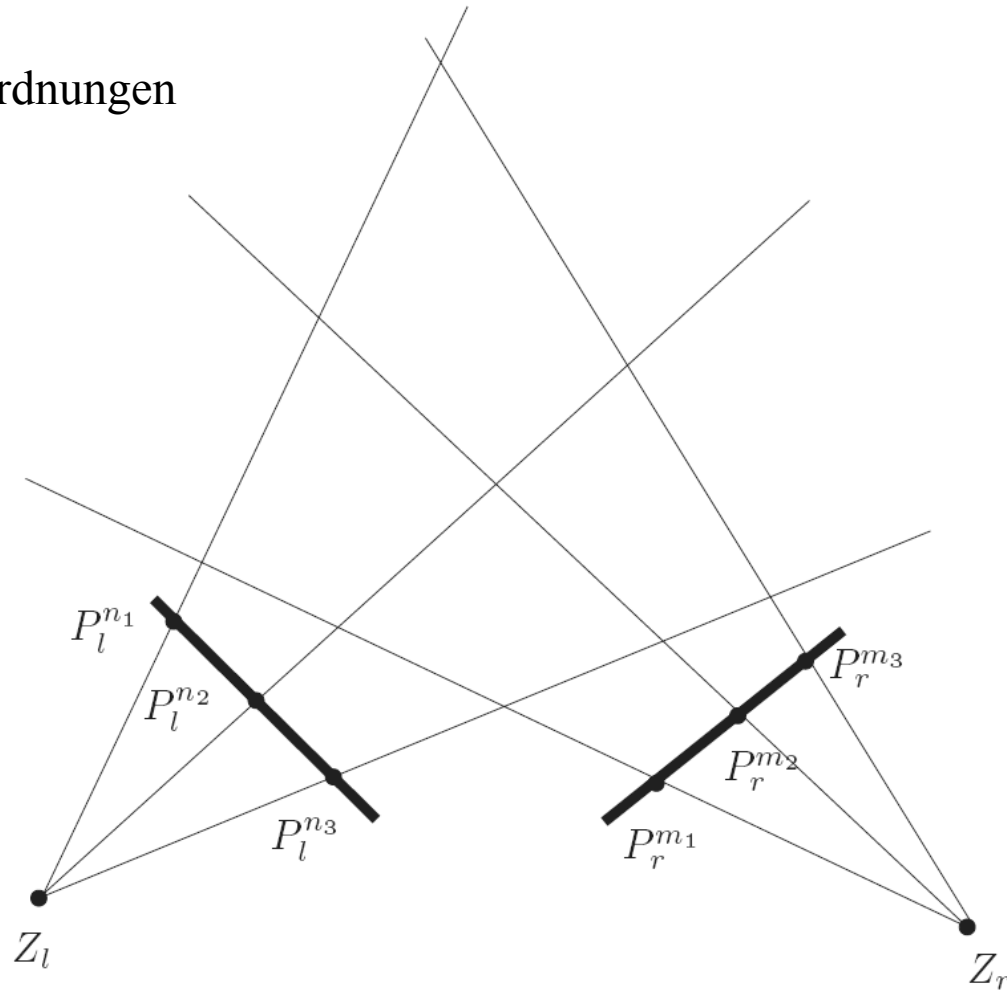
7.6.2 Korrespondenzproblem

Korrespondenzproblem

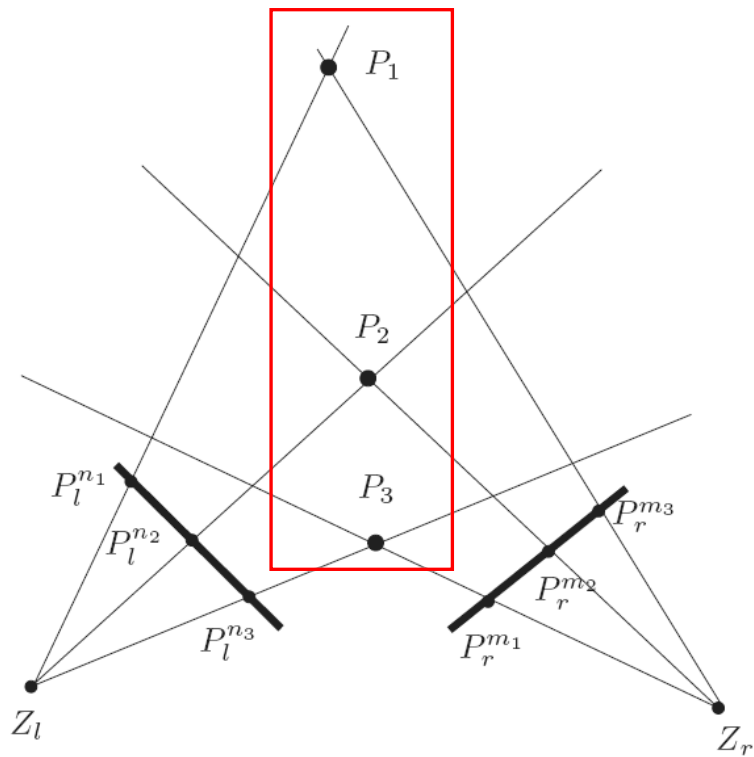
- Hier geht es um die Zuordnung korrespondierender Bildpunkte in den beiden Bildern (linkes und rechtes Bild).
- 2 Bildpunkte heißen korrespondierend, wenn sie Abbilder desselben Objektpunktes in der realen Welt (Szene) sind.
- Sind die Bildpunkte ununterscheidbar, so hat man bei jeweils n Punkten im linken bzw. rechten Bild $n!$ mögliche Zuordnungen, die alle zu anderen dreidimensionalen Interpretationen führen.

Beispiel

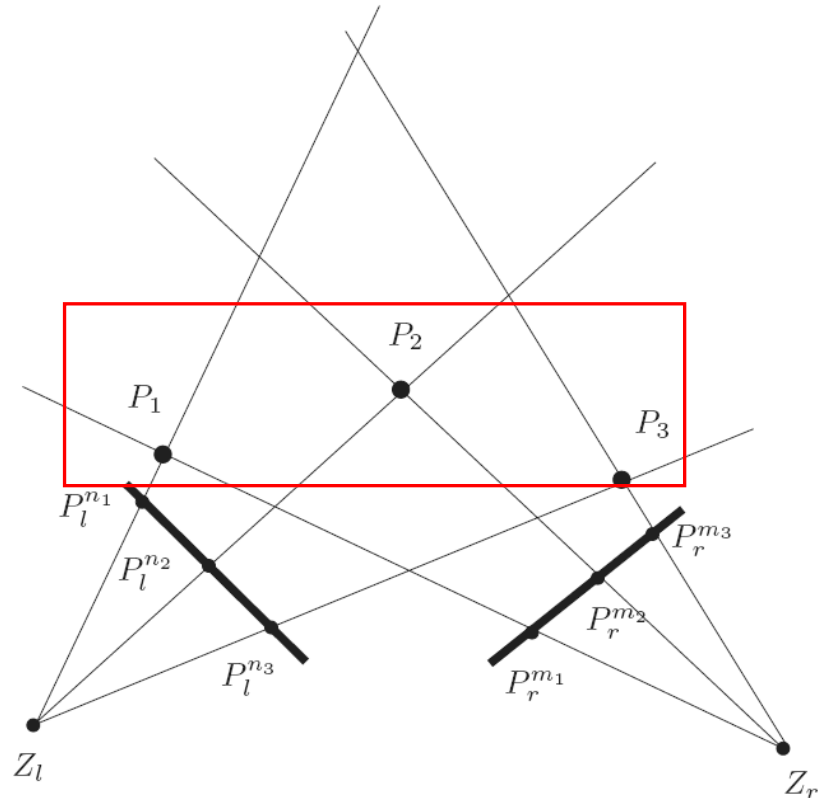
$6=3!$ Mögliche Zuordnungen



Beispiel



$$n_1 = m_3, n_2 = m_2, n_3 = m_1$$

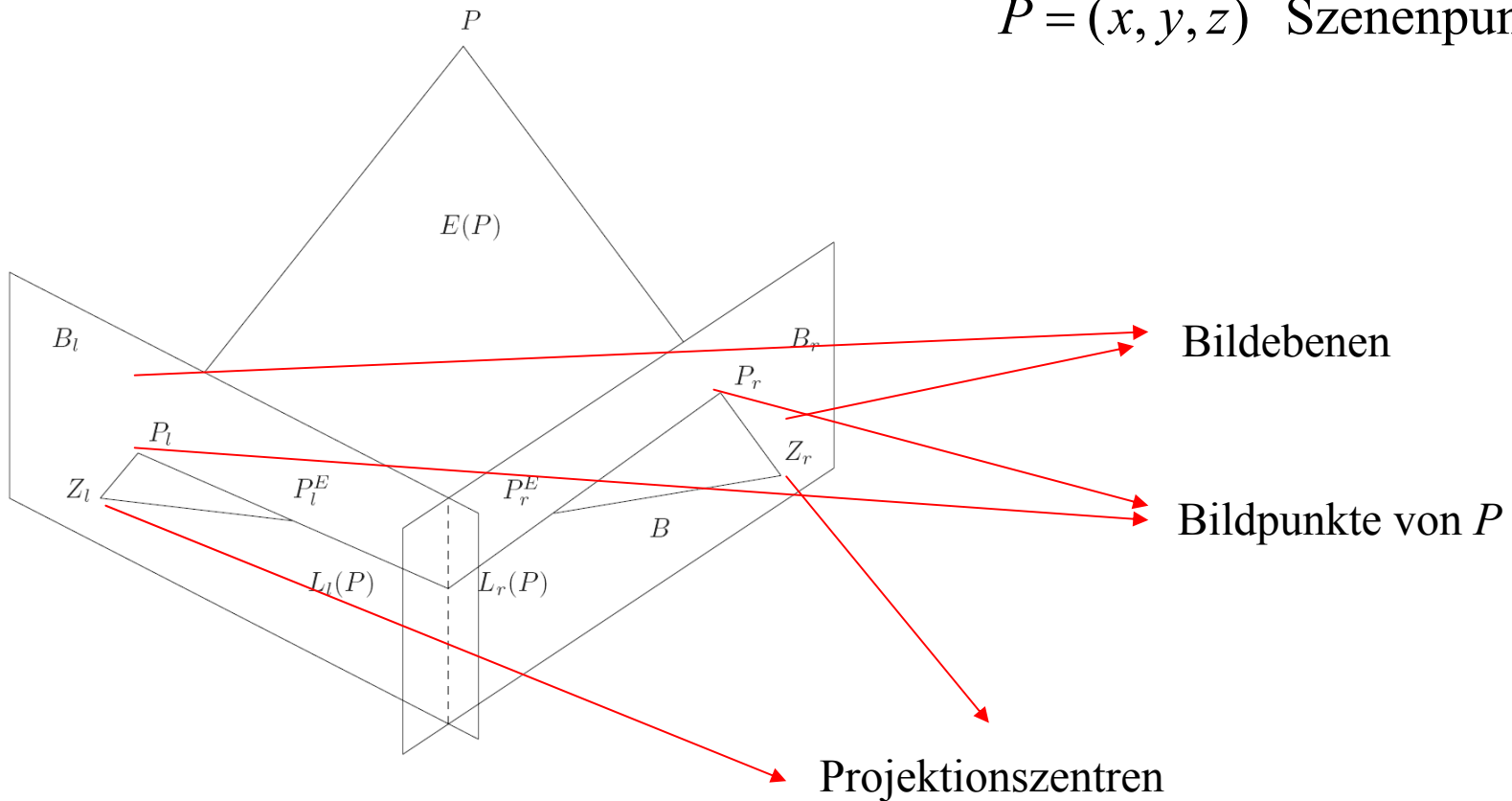


$$n_1 = m_1, n_2 = m_2, n_3 = m_3$$

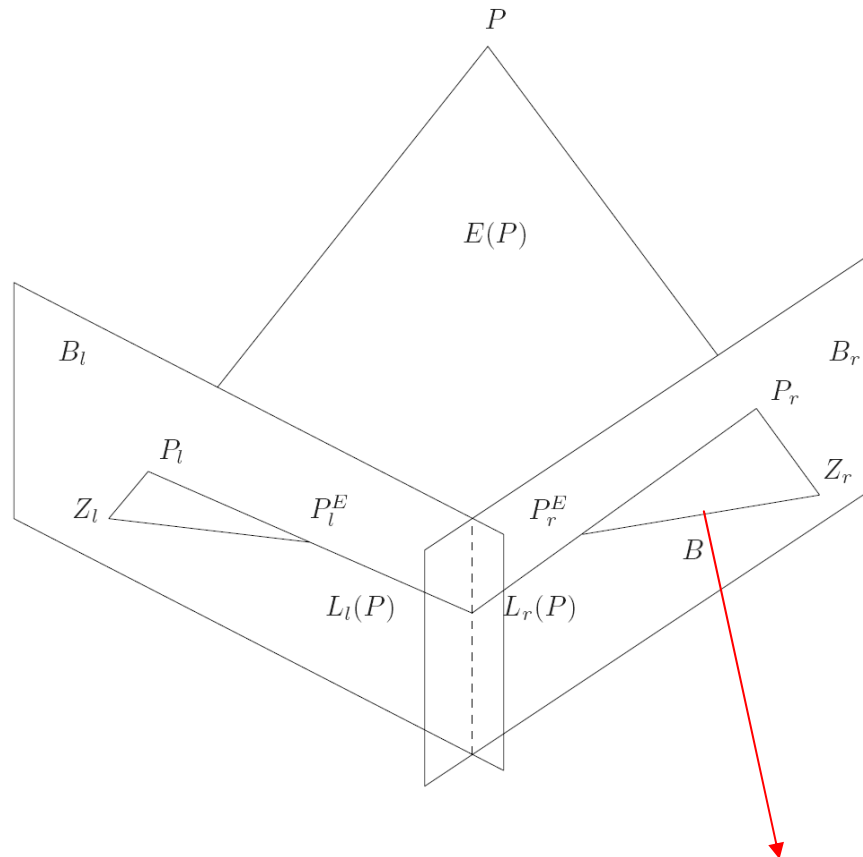
7.6.3 Epipolarlinien

Epipolargeometrie

$P = (x, y, z)$ Szenenpunkt



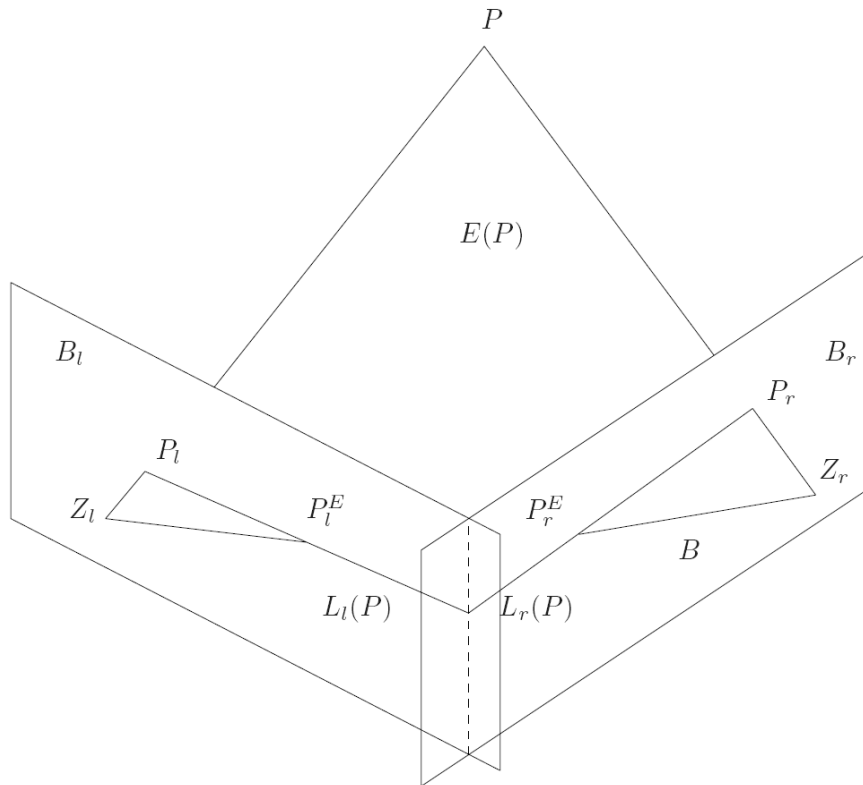
Basislinie



$$Z_l, Z_r \in B$$

Basislinie

Epipole



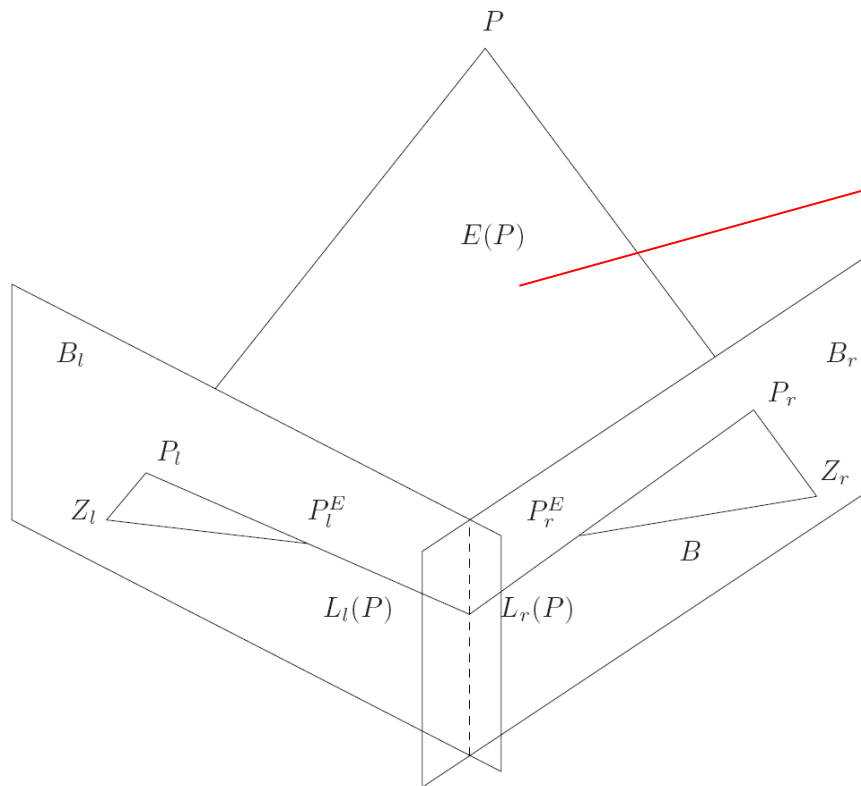
$$P_l^E = B \cap B_l$$

Bildpunkt des Projektionszentrums Z_r
in der linken Bildebene

$$P_r^E = B \cap B_r$$

Bildpunkt des Projektionszentrums Z_l
in der rechten Bildebene

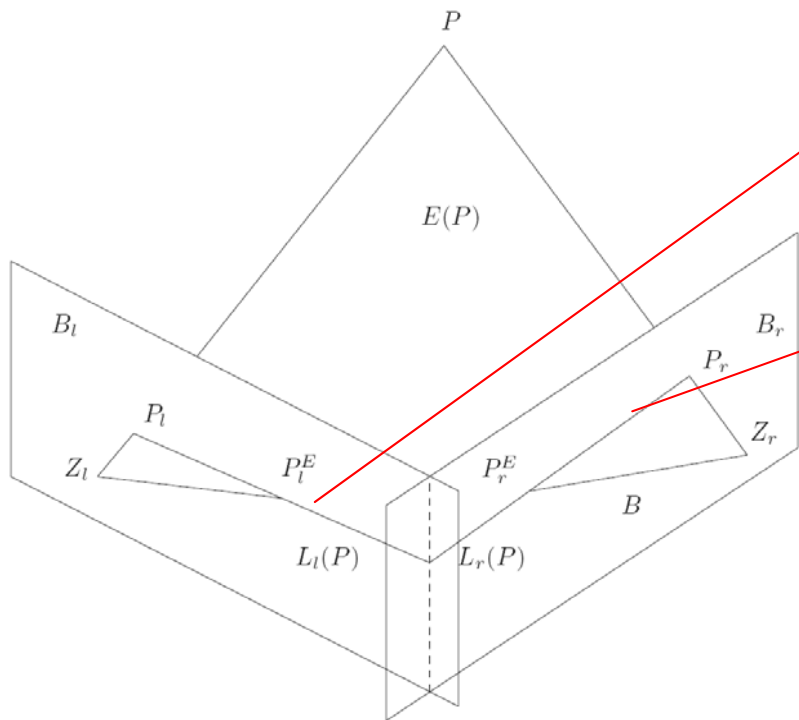
epipolare Ebene



$$P, Z_l, Z_r \in E(P)$$

$$B \subseteq E(P)$$

epipolare Linien



$$L_l(P) = E(P) \cap B_l$$

$$L_r(P) = E(P) \cap B_r$$

$$P_l \in L_l(P)$$

$$P_r \in L_r(P)$$

Standardstereogeometrie: $L_l(P) = L_r(P)$

$$B_l = B_r$$

Vorgehensweise

Gegeben: $P_l \in L_l(P)$

Konstruktion der epipolaren Ebene:

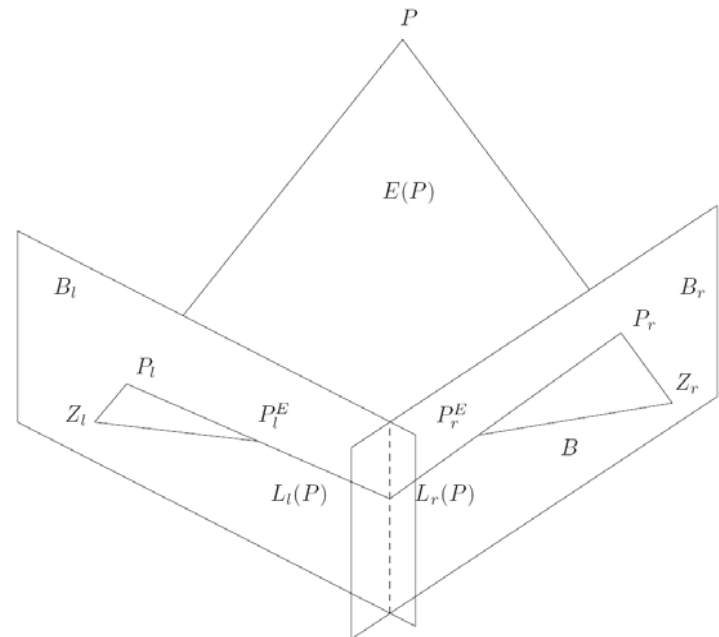
$$E(P) \text{ - aus } Z_l, Z_r, P_l$$

Epipolarlinie: $L_r(P) = E(P) \cap B_r$

es muss gelten: $P_r \in L_r(P)$

eindimensionale Suche

Standardstereogeometrie: $L_l(P) = L_r(P)$



7.6.4 Korrespondierende Punkte auf Grund von Bildeigenschaften

Korrespondierende Punkte auf Grund von Bildeigenschaften

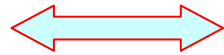
Möglichkeiten:

- Zu einem Bildpunkt im linken Bild wird man einen korrespondierenden Punkt nur in einem gewissen Bildausschnitt des rechten Bildes suchen.
- Punkte in den beiden Bildern können nur dann miteinander korrespondieren, wenn sie die gleiche physikalische Ursache in der Szene haben, wie
 - Grauwert
 - Farbe
 - Element einer Kante, außer Glanzlichtkanten und Verdeckungskanten
 - Kantenenden

7.6.5 Disparitätslimit

Disparitätslimit

$$P_l = (x_l, y_l, z_l)$$



$$P_r = (x_r, y_r, z_r)$$

korrespondieren miteinander, wenn:

$$\sqrt{(x_l - x_r)^2 + (y_l - y_r)^2 + (z_l - z_r)^2} < d_{\max}$$

Standardstereogeometrie:

$$|x_l - x_r| < d_{\max} \quad z = \frac{a \cdot f}{x_r - x_l + a}$$

Es wird ein Mindestabstand zwischen den Punkten der Szene und der Kamera festgelegt.

7.6.6 Kontinuität von Disparitäten

Kontinuität von Disparitäten

bekannte korrespondierende Punkte:

$$P_{l_1} = (x_{l_1}, y_{l_1}, z_{l_1}) \quad P_{r_1} = (x_{r_1}, y_{r_1}, z_{r_1})$$

$$P_{l_2} = (x_{l_2}, y_{l_2}, z_{l_2}) \quad \longleftrightarrow \quad P_{r_2} = (x_{r_2}, y_{r_2}, z_{r_2})$$

korrespondieren miteinander, wenn:

$$|d_1 - d_2| < \varepsilon$$

$$d_i = \sqrt{(x_{l_i} - x_{r_i})^2 + (y_{l_i} - y_{r_i})^2 + (z_{l_i} - z_{r_i})^2}$$

Standardstereogeometrie: $\left| |x_{l_1} - x_{r_1}| - |x_{l_2} - x_{r_2}| \right| < \varepsilon$

Eine Ausnahme bilden Punkte entlang den Objektbegrenzungen.

7.6.7

Disparitätsgradientenlimit

Disparitätsgradientenlimit

Standardstereogeometrie: $A_l = (x_{A_l}, y_A, f)$ $A_r = (x_{A_r}, y_A, f)$

(korrespondierende Punkte) $B_l = (x_{B_l}, y_B, f)$ $B_r = (x_{B_r}, y_B, f)$

Disparitätsgradient:

$$\Gamma_d = \frac{|\Delta x_l - \Delta x_r|}{\sqrt{\frac{1}{4}(\Delta x_l - \Delta x_r)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$\Delta x_l = |x_{A_l} - x_{B_l}|, \quad \Delta x_r = |x_{A_r} - x_{B_r}|, \quad \Delta y = |y_A - y_B|$$

$$\Gamma_d < \Gamma_{\max}, \quad 0.5 \leq \Gamma_{\max} \leq 2$$

Es wird damit gleichzeitig die maximal zulässige Neigung von
Objektoberflächen der Szene gegenüber der Kamera festgelegt.

7.6.8 Reihenfolge der Punkte

Reihenfolge der Punkte

Punkte, die in einem Stereobild auf einer Epipolarlinie liegen, werden in genau derselben Reihenfolge auf der korrespondierenden Epipolarlinie des anderen Bildes abgebildet. Dabei müssen die Punkte sich in etwa gleicher Entfernung zur Kamera befinden.

