

Skript zur Vorlesung

Vektoranalysis

WS 2015/16

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

1	Mehrdimensionale Integralrechnung	7
1.1	Flächenintegrale	7
1.2	Variablensubstitution in Flächenintegralen	11
1.3	Verallgemeinerung auf den m -dimensionalen Fall	12
1.4	Beweis der Substitutionsregel	13
1.5	Übungsaufgaben	18
2	Kurvenintegrale	21
2.1	Wege, Kurven und ihre Längen	21
2.2	Wegintegrale	24
2.3	Wegunabhängigkeit	27
2.4	Übungsaufgaben	30
3	Oberflächenintegrale und Integralsätze	33
3.1	Definition der Oberflächenintegrale	33
3.2	Integralsätze	37
3.3	Folgerungen aus den Integralsätzen	42
3.4	Wirbel- und quellfreie Felder	43
3.5	Felder in krummlinigen orthogonalen Koordinaten	47
3.6	Zur Wärmeleitungsgleichung	52
3.7	Zum Beweis des Gauß'schen Integralsatzes	54
3.8	Übungsaufgaben	60

Literaturverzeichnis

- [1] A. Böttcher, Analysis - Skript zur Vorlesung 2010/11 von A. T. Oestreich,
[http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/ang-funktionalanalysis/rost/
AnalysisI-II-Mathematiker/Kap1-9.pdf](http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/ang-funktionalanalysis/rost/AnalysisI-II-Mathematiker/Kap1-9.pdf)
- [2] K. Burg, H. Haf, F. Wille, Vektoranalysis - Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker, B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden.
- [3] K. Burg, H. Haf, F. Wille, Vektoranalysis und Funktionentheorie - Höhere Mathematik für Ingenieure (Band IV), B. G. Teubner, Stuttgart.
- [4] G. M. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung, Band 3, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [5] H. Fischer, H. Kaul, Mathematik für Physiker, Band 1: Grundkurs, B. G. Teubner, Stuttgart.
- [6] H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 2, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden.
- [7] P. Junghanns, Analysis - Skript zur Vorlesung 2013/14,
<http://www-user.tu-chemnitz.de/~peju/>

Kapitel 1

Mehrdimensionale Integralrechnung

1.1 Flächenintegrale

Es seien $B = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck und $f : B \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige Funktion. Wie groß ist das Volumen unter dem Graphen $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in B\}$ der Funktion f , d.h. das Volumen V des Körpers $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$?

Erste Antwort: Der Flächeninhalt einer Schnittfläche durch K parallel zur xz -Ebene ist gleich $\alpha(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, so dass das gesuchte Volumen gleich

$$V = \int_c^d \alpha(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

sein müsste. Analog würde man durch Vertauschen der Rollen von x und y die Formel

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

erhalten.

Beispiel 1.1 Für $B = [3, 4] \times [1, 2]$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (2x + y)^{-2}$ berechnen wir mittels der in der ersten Antwort vorgestellten Methode $V = \frac{1}{2} \ln \frac{36}{35}$.

Zweite Antwort: Zwei Zerlegungen

$$Z_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{Z}[a, b] \quad \text{und} \quad Z_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\} \in \mathcal{Z}[c, d]$$

der Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ erzeugen eine Zerlegung von B in Teilrechtecke $B_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$. Wir definieren

$$m_{jk} = \inf \{f(x, y) : (x, y) \in B_{jk}\} \quad \text{und} \quad M_{jk} = \sup \{f(x, y) : (x, y) \in B_{jk}\}.$$

Dann gilt bestimmt

$$S_u(f; Z_1 \times Z_2) := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m m_{jk} \Delta_{jk} \leq V \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m M_{jk} \Delta_{jk} =: S_o(f; Z_1 \times Z_2),$$

wobei $\Delta_{jk} = (x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) =: |B_{jk}|$ den Flächeninhalt des Teilrechtecks B_{jk} bezeichnet. $S_u(f; Z_1 \times Z_2)$ bzw. $S_o(f; Z_1 \times Z_2)$ nennt man **Darboux'sche Unter-** bzw. **Obersumme** der

Funktion f bzgl. der Zerlegung $Z_1 \times Z_2$ (vgl. [1, Beweis von Satz 7.2] oder [7, Abschnitt 5.5]). Wir definieren nun **unteres** und **oberes Darboux'sches Integral** als

$$J_u(f) = \sup \{S_u(f; Z_1 \times Z_2) : Z_1 \in \mathcal{Z}[a, b], Z_2 \in \mathcal{Z}[c, d]\}$$

und

$$J_o(f) = \inf \{S_o(f; Z_1 \times Z_2) : Z_1 \in \mathcal{Z}[a, b], Z_2 \in \mathcal{Z}[c, d]\}$$

Definition 1.2 *Es seien $B = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Man nennt f auf B **Riemann-integrierbar**, falls $J_u(f) = J_o(f)$ gilt, und bezeichnet diese Zahl mit*

$$\iint_B f(x, y) d(x, y).$$

Es ergibt sich natürlich die Frage, ob erste und zweite Antwort auf das gleiche Resultat führen. Der folgende Satz 1.3 liefert die Antwort "Ja".

Satz 1.3 (Fubini) *Es sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Rechteck $B = [a, b] \times [c, d]$ Riemann-integrierbar. Existieren die Riemann-Integrale*

$$\beta(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad \forall x \in [a, b],$$

so gilt

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \beta(x) dx.$$

Bemerkung 1.4 *Unter den Voraussetzungen der Definition 1.2 ist f genau dann Riemann-integrierbar auf B , wenn eine Zahl I existiert, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z_1 \times Z_2$ des Rechteckes B gibt mit*

$$\left| I - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(\xi_j, \eta_k) |B_{jk}| \right| < \varepsilon \quad \forall (\xi_j, \eta_k) \in B_{jk}.$$

Definition 1.5 *Es seien $B \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ferner seien $B^0 = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck mit $B \subset B^0$ sowie*

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & : (x, y) \in B, \\ 0 & : (x, y) \in B^0 \setminus B. \end{cases}$$

*Wir sagen, dass f auf B **Riemann-integrierbar** ist, falls \tilde{f} auf B^0 Riemann-integrierbar ist, und setzen in diesem Fall*

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) := \iint_{B^0} \tilde{f}(x, y) d(x, y).$$

Diese Definition ist korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl des Rechteckes B^0 . Mit $\chi_B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir die **Indikatorfunktion** der Menge $B \subset \mathbb{R}^2$, d.h.

$$\chi_B(x, y) = \begin{cases} 1 & : (x, y) \in B, \\ 0 & : (x, y) \notin B. \end{cases}$$

Definition 1.6 Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Jordan-messbar**, wenn die Indikatorfunktion χ_B auf B Riemann-integrierbar ist. Man nennt dann

$$|B| = \iint_B \chi_B(x, y) d(x, y)$$

das **Jordan-Maß** von B . Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ mit $|B| = 0$ wird **Menge vom (Jordan-)Maß Null** oder kurz **Nullmenge** genannt.

Offenbar gilt für $B \subset B^0 = [a, b] \times [c, d]$ folgende Äquivalenzkette:

$$|B| = 0 \iff J_o(\chi_B) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists Z_1 \in \mathcal{Z}[a, b], Z_2 \in \mathcal{Z}[c, d] : S_o(\chi_B; Z_1 \times Z_2) < \varepsilon$$

Dabei gilt $S_o(\chi_B; Z_1 \times Z_2) = \sum_{B_{jk}^0 \cap B \neq \emptyset} |B_{jk}^0|$. Damit sieht man schnell ein, dass aus $|B_1| = |B_2| = 0$

folgt $|B_1 \cup B_2| = 0$ und dass aus $|B_1| = 0$ sowie $B_2 \subset B_1$ folgt $|B_2| = 0$. Für ein $\varepsilon > 0$ und einen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir mit $U_\varepsilon((x, y))$ die (offene) ε -**Umgebung** um den Punkt (x, y) , d.h.,

$$U_\varepsilon((x, y)) = \left\{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} < \varepsilon \right\}.$$

Satz 1.7 Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand

$$\partial B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : U_\varepsilon((x, y)) \cap B \neq \emptyset \text{ und } U_\varepsilon((x, y)) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B) \neq \emptyset \forall \varepsilon > 0 \right\}$$

eine Menge vom Maß Null ist.

Sind $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \forall x \in [a, b]$, so nennen wir $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ einen **Normalbereich**. Der Graph $G_f = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Menge vom Maß Null.

Folgerung 1.8 Jeder Normalbereich ist Jordan-messbar.

Satz 1.9 Sind $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $B \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und kompakt, so ist f auf B Riemann-integrierbar.

Folgerung 1.10 Sind $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

ein Normalbereich, so gilt

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Beispiel 1.11 Für $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y$ erhalten wir

$$\iint_B (x^2 + y) d(x, y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy dx = \frac{33}{140}.$$

Beispiel 1.12 Wir berechnen das Volumen V eines Ellipsoiden mit den Halbachsen $a, b, c \in (0, \infty)$, d.h. des Körpers

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Wir erhalten

$$V = 8c \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dy dx = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Bemerkung 1.13 Sind f auf $[a, b]$ und g auf $[c, d]$ Riemann-integrierbar, so ist die Funktion $f(x)g(y)$ auf $B := [a, b] \times [c, d]$ Riemann-integrierbar, wobei

$$\iint_B f(x)g(y) d(x, y) = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) dy.$$

Bemerkung 1.14 Es sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge.

- (a) Sind f und g auf B Riemann-integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ auf B Riemann-integrierbar, wobei

$$\iint_B [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d(x, y) = \alpha \iint_B f(x, y) d(x, y) + \beta \iint_B g(x, y) d(x, y)$$

gilt. D.h., die Menge der über B Riemann-integrierbaren Funktionen ist ein linearer Raum und das Riemann-Integral ein lineares Funktional auf diesem Raum.

- (b) Ist $|B| = 0$, so gilt $\iint_B f(x, y) d(x, y) = 0$ für jede beschränkte Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$.

- (c) Sind f und g auf B Riemann-integrierbar und $f(x, y) \leq g(x, y)$ für alle $(x, y) \in B$ mit evtl. Ausnahme einer Menge vom Maß Null, so gilt

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) \leq \iint_B g(x, y) d(x, y).$$

- (d) Sind f und g auf B Riemann-integrierbar, so auch $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ und fg . Dabei gilt

$$\left| \iint_B f(x, y) d(x, y) \right| \leq \iint_B |f(x, y)| d(x, y).$$

- (e) Sind f auf B_1 und B_2 Riemann-integrierbar sowie $|B_1 \cap B_2| = 0$, so ist f auf $B_1 \cup B_2$ Riemann-integrierbar, wobei

$$\iint_{B_1 \cup B_2} f(x, y) d(x, y) = \iint_{B_1} f(x, y) d(x, y) + \iint_{B_2} f(x, y) d(x, y).$$

- (f) Sind $f : B \rightarrow [a, b]$ auf B Riemann-integrierbar und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $g \circ f : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf B Riemann-integrierbar.

Bemerkung 1.15 (Mittelwertsatz) Sind $B \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $m \leq f(x, y) \leq M$ für alle $(x, y) \in B$ mit evtl. Ausnahme einer Menge vom Maß Null, so gilt

$$m|B| \leq \iint_B f(x, y) d(x, y) \leq M|B|.$$

1.2 Variablensubstitution in Flächenintegralen

Es sei $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto g(u, v) = \begin{bmatrix} g^1(u, v) \\ g^2(u, v) \end{bmatrix}$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sind $R = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2] \subset \Omega$ ein "kleines" Rechteck und $\tilde{R} = g(R)$ dessen Bild bezüglich der Abbildung g , also i. Allg. ein "krummlinig berandetes Parallelogramm", so gilt

$$|\tilde{R}| \approx \left| \det \begin{bmatrix} g_u^1(u_1, v_1) & g_v^1(u_1, v_1) \\ g_u^2(u_1, v_1) & g_v^2(u_1, v_1) \end{bmatrix} \right| \cdot |R|.$$

Satz 1.16 Die Abbildung $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ injektiv und stetig differenzierbar mit $\det g'(u, v) \neq 0$ für alle $(u, v) \in \Omega$. Sind $\tilde{B} \subset \Omega$ kompakt und Jordan-messbar sowie $f : g(\tilde{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $B = g(\tilde{B})$ kompakt und Jordan-messbar, und es gilt

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \iint_{\tilde{B}} f(g(u, v)) |\det g'(u, v)| d(u, v).$$

$J(u, v) := \det g'(u, v)$ nennt man auch die **Funktionaldeterminante** der Transformation g .

Beispiel 1.17 (Polarkoordinaten) Wir betrachten $g : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Auf $\Omega = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ sind die Voraussetzungen von Satz 1.16 erfüllt, denn dort gilt

$$\det g'(r, \varphi) = \det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} = r.$$

Durch geeignete Grenzübergänge kann man aber zeigen, dass z.B. für den Kreis

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r_0^2\}, \quad r_0 > 0,$$

und eine stetige Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \iint_R f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi)$$

mit $R = [0, r_0] \times [0, 2\pi]$.

Beispiel 1.18 (verallgemeinerte Polarkoordinaten) Wir berechnen den Flächeninhalt $|B|$ der Ellipse

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a > 0, b > 0,$$

und verwenden dazu die Substitution

$$g(r, \varphi) = (ar \cos \varphi, br \sin \varphi), \quad (r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Es folgt $J(r, \varphi) = abr$ und $A = \pi ab$.

Beispiel 1.19 Wir berechnen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$$

unter Verwendung von

$$\left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \cdot \int_{-R}^R e^{-y^2} dy = \iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y), \quad Q_R = [-R, R]^2,$$

und erhalten $I = \sqrt{\pi}$.

Beispiel 1.20 Wir berechnen den Flächeninhalt der Menge $B \subset \mathbb{R}^2$, die von den Kurven $y^2 = px$, $y^2 = qx$ ($0 < p < q$) und $x^2 = ay$, $x^2 = by$ ($0 < a < b$) berandet wird. Unter Verwendung der Substitution

$$y^2 = ux, \quad x^2 = vy, \quad p \leq u \leq q, \quad a \leq v \leq b,$$

d.h., $x = (uv^2)^{\frac{1}{3}}$ und $y = (u^2v)^{\frac{1}{3}}$, erhalten wir $J(u, v) = -\frac{1}{3}$ und $|B| = \frac{(b-a)(q-p)}{3}$.

1.3 Verallgemeinerung auf den m -dimensionalen Fall

Sämtliche Begriffe aus Abschnitt 1.1 lassen sich problemlos auf Funktionen $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ über kompakten Bereichen $B \subset \mathbb{R}^m$ übertragen, indem man zuerst das Riemann-Integral über einem m -dimensionalen Quader $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$ definiert und dann zu kompakten Bereichen $B \subset \mathbb{R}^m$ übergeht. Der Satz von Fubini kann induktiv verallgemeinert werden. Bem. 1.4, Satz 1.7, Satz 1.9, Bem. 1.13–1.15 und Satz 1.16 gelten analog.

Einen Punkt $x \in \mathbb{R}^m$ schreiben wir sowohl in der Form $x = (x_1, \dots, x_m)$ als auch in der Form $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$. Außerdem verwenden wir die Bezeichnungen

$$|x| := \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2} \quad \text{und} \quad \langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^m x_k y_k$$

für den Betrag (Euklidische Norm) und das innere Produkt, wobei $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Beispiel 1.21 (Zylinder- und Kugelkoordinaten) Für die Substitution

$$g(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

gilt $\det g'(r, \varphi, z) = r$, $(r, \varphi, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ (Zylinderkoordinaten). Für

$$g(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta)$$

erhalten wir $\det g'(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \cos \vartheta$, $(r, \varphi, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Kugelkoordinaten). Das Volumen der Kugel $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, $R > 0$, ergibt sich damit zu

$$\iiint_B d(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \cos \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Beispiel 1.22 (verallgemeinerte Kugelkoordinaten) Wir berechnen das Volumen des Ellipsoids E mit den Halbachsen a, b, c (vgl. Bsp. 1.12) unter Verwendung der Transformation

$$g(r, \varphi, \vartheta) = (ar \cos \vartheta \cos \varphi, br \cos \vartheta \sin \varphi, cr \sin \vartheta), \quad (r, \varphi, \vartheta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Wir erhalten $J(r, \varphi, \vartheta) = abc r^2 \cos \vartheta$ und das Volumen

$$\iiint_E d(x, y, z) = abc \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cos \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Beispiel 1.23 Wir nehmen an, dass sich der Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ unter Verwendung der Polarkoordinaten in der Form

$$B = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) : 0 \leq r \leq \rho(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$$

mit einer stetigen Funktion $\rho : [\varphi_1, \varphi_2] \rightarrow [0, \infty)$ schreiben lässt. Es folgt

$$|B| = \iint_B d(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\rho(\varphi)} r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\rho(\varphi)]^2 \, d\varphi. \quad (1.1)$$

Bemerkung zu verallgemeinerten Riemannschen Integralsummen:

Es seien $Z = \{B_1, \dots, B_N\}$ eine (verallg.) Zerlegung des messbaren Kompaktums $B \subset \mathbb{R}^m$ in zusammenhängende messbare Kompakta B_j , so dass $|B_j \cap B_k| = 0$ für $j \neq k$, und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Mit $d(Z) = \max \{d(B_j) : j = 1, \dots, N\}$ bezeichnen wir den **Durchmesser** der Zerlegung Z , wobei $d(B_j) = \sup \{|x' - x''| : x', x'' \in B_j\}$. Wir betrachten Summen der Gestalt

$$\sum_{j=1}^N f(x^j) |B_j|, \quad x^j \in B_j.$$

Gibt man sich nun ein $\varepsilon > 0$ vor und wählt den Durchmesser der Zerlegung so klein, dass

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{|B| + 1} \quad \forall x', x'' \in B_j, j = 1, \dots, N$$

gilt (gleichmäßige Stetigkeit von f auf B !), so folgt aus Bem. 1.15

$$\int_{B_j} f(x) \, dx = f(\xi^j) |B_j|$$

für ein $\xi^j \in B_j$ und unter Verwendung von Bem. 1.14(f)

$$\left| \int_B f(x) \, dx - \sum_{j=1}^N f(x^j) |B_j| \right| = \left| \sum_{j=1}^N [f(\xi^j) - f(x^j)] |B_j| \right| \leq \frac{\varepsilon}{|B| + 1} |B| < \varepsilon.$$

Also: Haben wir eine Folge verallgemeinerter Zerlegungen von B und eine beliebige zugehörige Folge verallgemeinerter Riemannscher Integralsummen, wobei die Durchmesser der Zerlegungsfolge gegen Null konvergieren, so konvergiert die Folge der verallgemeinerten Riemannschen Integralsummen gegen das Integral der stetigen Funktion f .

1.4 Beweis der Substitutionsregel

Die Verallgemeinerung von Satz 1.16 auf den m -dimensionalen Fall lautet:

Die Abbildung $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ injektiv und stetig differenzierbar mit $\det g'(u) \neq 0$ für alle $u \in \Omega$. Sind $\tilde{B} \subset \Omega$ kompakt und Jordan-messbar sowie $f : g(\tilde{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $B = g(\tilde{B})$ kompakt und Jordan-messbar, und es gilt

$$\int_B f(x) \, dx = \int_{\tilde{B}} f(g(u)) |\det g'(u)| \, du.$$

Wir erinnern an den Satz über die Umkehrabbildung (vgl. [1, Satz 5.29]):

Sind $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $x^0 \in \Omega$, $\det f'(x^0) \neq 0$ und $y^0 = f(x^0)$, so existieren offene Mengen $U \subset \Omega$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ mit $x^0 \in U$ und $y^0 \in V$, so dass $f : U \rightarrow V$ bijektiv und $f^{-1} : V \rightarrow U$ stetig differenzierbar sind. Dabei gilt

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1} \quad \forall y \in V.$$

Zum Beweis der Substitutionsregel verwenden wir wesentlich die folgenden Sätze 1.24–1.27.

Satz 1.24 (Zerlegungssatz) Es seien $m = 2, 3, \dots$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge,

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad u \mapsto (g_1(u), \dots, g_m(u))$$

stetig differenzierbar und $\det g'(u) \neq 0$ für alle $u \in \Omega$. Dann existieren für jedes $u^0 \in \Omega$ eine offene Umgebung $W \subset \Omega$ von u^0 und Funktionen

$$\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \omega : \psi(W) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Das Bild $\psi(W)$ ist offen
- (b) Die Funktionen ψ und ω sind injektiv und stetig differenzierbar.
- (c) Bei geeigneter Numerierung der u_1, \dots, u_m gilt

$$\psi(u) = (\psi_1(u), \dots, \psi_{m-1}(u), u_m) \quad \forall u \in W$$

und

$$\omega(v) = (v_1, \dots, v_{m-1}, \omega_m(v)) \quad \forall v \in \psi(W).$$

- (d) Es gilt $g(u) = \omega(\psi(u))$ für alle $u \in W$.

Satz 1.25 Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar, $m \leq p$. Ist $N \subset \Omega$ eine kompakte Menge vom Jordan-Maß Null, so ist auch $g(N)$ eine solche Menge.

Satz 1.26 Ist $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf der kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ stetig, so ist auch das Bild $f(K)$ kompakt.

Satz 1.27 Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ injektiv und stetig differenzierbar sowie $g'(x) \in \mathcal{G}\mathbb{R}^{m \times m}$ für alle $x \in \Omega$. Ist $B \subset \Omega$ kompakt und Jordan-messbar, so gilt $\partial g(B) = g(\partial B)$, und $g(B)$ ist Jordan-messbar.

Folgerung 1.28 Unter den Voraussetzungen des Satzes zur Substitutionsregel ist $B = g(\tilde{B})$ kompakt und Jordan-messbar, so dass wegen der Stetigkeit von f und g sowie g' nach Satz 1.9 die Integrale

$$\int_B f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{\tilde{B}} f(g(u)) |\det g'(u)| du$$

existieren.

Beweis der Substitutionsregel:

(A) Wir nehmen an, dass die Substitutionsregel für jeden Quader $Q \subset \tilde{B}$ gilt,

$$\int_{g(Q)} f(x) dx = \int_Q f(g(u)) |\det g'(u)| du,$$

und betrachten die allgemeine Situation: Es sei $\mathcal{F} = \{Q_1, \dots, Q_r\}$ eine Überdeckung von \tilde{B} durch Würfel Q_j , wobei $|Q_j \cap Q_k| = 0$ für $j \neq k$ gelte. Wir definieren

$$M_1 := \left\{ j \in \{1, \dots, r\} : Q_j \cap \partial \tilde{B} \neq \emptyset \right\}, \quad M_2 = \left\{ j \in \{1, \dots, r\} : Q_j \subset \tilde{B} \right\}, \quad \mathcal{F}_i = \bigcup_{j \in M_i} Q_j.$$

Aus dem Beweis von Satz 1.25 wissen wir, dass die Q_j so klein gewählt werden können, so dass eine Konstante $c_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $|g(Q_j)| \leq c_0 |Q_j|$, $j = 1, \dots, r$. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so können die Q_j auch so klein gewählt werden, dass $|\mathcal{F}_1| < \varepsilon$ gilt. Aus $\tilde{B} \setminus \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ folgt $|\tilde{B} \setminus \mathcal{F}_2| < \varepsilon$, so dass $|g(\mathcal{F}_1)| \leq c_0 \varepsilon$ und wegen $g(\tilde{B}) \setminus g(\mathcal{F}_2) \subset g(\mathcal{F}_1)$ auch $|g(\tilde{B}) \setminus g(\mathcal{F}_2)| \leq c_0 \varepsilon$ gilt. Ferner bemerken wir, dass eine Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|f(x)| \leq c_1$ und $|f(g(u))| \cdot |\det g'(u)| \leq c_1$ für alle $x \in g(\tilde{B})$ und alle $u \in \tilde{B}$ gilt. Aus der gemachten Voraussetzung folgt nun

$$\int_{g(\mathcal{F}_2)} f(x) dx = \int_{\mathcal{F}_2} f(g(u)) |\det g'(u)| du.$$

Das impliziert

$$\begin{aligned} & \left| \int_{g(\tilde{B})} f(x) dx - \int_{\tilde{B}} f(g(u)) |\det g'(u)| du \right| \\ &= \left| \int_{g(\tilde{B}) \setminus g(\mathcal{F}_2)} f(x) dx - \int_{\tilde{B} \setminus \mathcal{F}_2} f(g(u)) |\det g'(u)| du \right| \\ &\leq \int_{g(\tilde{B}) \setminus g(\mathcal{F}_2)} |f(x)| dx + \int_{\tilde{B} \setminus \mathcal{F}_2} |f(g(u))| \cdot |\det g'(u)| du \leq c_1(c_0 + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

(B) Es seien $\tilde{B} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ und $g(u)$ von der Gestalt $g(u) = (u_1, \dots, u_{m-1}, g_m(u))$. Wir verwenden die Bezeichnungen $u' = (u_1, \dots, u_{m-1})$ und $x' = (x_1, \dots, x_{m-1})$, haben also $g(u) = g(u', u_m) = (u', g_m(u))$.

1. Fall: $\det g'(u) > 0 \quad \forall u \in \tilde{B}$

Offenbar gilt $\det g'(u) = \frac{\partial g_m(u)}{\partial u_m}$. Es folgt

$$B = g(\tilde{B}) = \{x \in \mathbb{R}^m : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, m-1, g_m(x', a_m) \leq x_m \leq g_m(x', b_m)\}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{B}} f(g(u)) |\det g'(u)| du &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{m-1}}^{b_{m-1}} \int_{a_m}^{b_m} f(u', g_m(u)) \frac{\partial g_m(u)}{\partial u_m} du_m du_{m-1} \dots du_1 \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{m-1}}^{b_{m-1}} \int_{g_m(u', a_m)}^{g_m(u', b_m)} f(u', x_m) dx_m du_{m-1} \dots du_1 \\ &= \int_B f(x) dx. \end{aligned}$$

2. Fall: $\det g'(u) < 0 \forall u \in \tilde{B}$, analog.

Damit folgt unter Verwendung von (A), dass die Substitutionsregel für alle $g : \tilde{B} \rightarrow B$ der Gestalt $g(u) = (u_1, \dots, u_{m-1}, g_m(u))$ gilt.

(C) \tilde{B} wie in (B), aber keine weitere Einschränkung an g . Für $m = 1$ gilt bekanntlich die Substitutionsregel. Wir nehmen an, sie gilt für $m = k - 1 \geq 1$ und zeigen, dass sie dann auch für $m = k$ gilt:

- Nach Satz 1.24 existiert für jedes $u^0 \in \Omega$ eine offene Menge $U(u^0) \subset \Omega$ mit $u^0 \in U(u^0)$ und $g(u) = \omega(\psi(u)) \forall u \in U(u^0)$, wobei ω und ψ Satz 1.24, (a)-(c) mit $W = U(u^0)$ genügen. Da $\{U(u) : u \in \tilde{B}\}$ eine offene Überdeckung von \tilde{B} ist, existieren

$u^1, \dots, u^r \in \tilde{B}$ mit $\tilde{B} \subset \bigcup_{j=1}^r U(u^j)$. Wir zerlegen \tilde{B} in Teilquader Q_1, \dots, Q_s , so dass

$$\tilde{B} = \bigcup_{j=1}^s Q_j, |Q_j \cap Q_k| = 0 \text{ für } j \neq k \text{ und}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, s\} \exists k \in \{1, \dots, r\} : Q_j \subset U(u^k).$$

Auf Q_j gilt dann $g = \omega^j \circ \psi^j$ entsprechend Satz 1.24.

- Wir haben nur noch zu zeigen, dass

$$\int_{g(Q_j)} f(x) dx = \int_{Q_j} f(g(u)) |\det g'(u)| du, \quad j = 1, \dots, s,$$

gilt. Betrachten also $g : Q \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g = \omega \circ \psi$, $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]$, $\omega(v) = (v', \omega_k(v))$, $\psi(u) = (\psi_1(u), \dots, \psi_{k-1}(u), u_k)$, wobei $g = \omega \circ \psi$ auf einer offenen Menge $U \supset Q$ erklärt ist und $\omega : \psi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ sowie $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ injektiv sind.

- Wir definieren $Q_0 = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{k-1}, b_{k-1}]$, $U'_{u_k} = \{u' \in \mathbb{R}^{k-1} : (u', u_k) \in U\}$ und

$$h_{u_k} : U'_{u_k} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}, u' \mapsto (g_1(u', u_k), \dots, g_{k-1}(u', u_k)).$$

Dann sind $U'_{u_k} \subset \mathbb{R}^{k-1}$ offen, $Q_0 \subset U'_{u_k}$, h_{u_k} stetig differenzierbar und injektiv, wobei

$$h'_{u_k}(u') = \left[\frac{\partial g_j(u', u_k)}{\partial u_i} \right]_{j,i=1}^{k-1}$$

und $g_j(u', u_k) = \omega_j(\psi(u', u_k)) = \psi_j(u', u_k)$, $j = 1, \dots, k-1$, also

$$\frac{\partial g_j(u', u_k)}{\partial u_i} = \frac{\partial \psi_j(u', u_k)}{\partial u_i},$$

so dass

$$\det h'_{u_k}(u') = \det \psi'(u', u_k) \neq 0, \quad (\det)$$

weil nach der Kettenregel $g'(u) = \omega'(\psi(u))\psi'(u)$ gilt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also für eine stetige Funktion $\tilde{f} : h_{u_k}(Q_0) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{h_{u_k}(Q_0)} \tilde{f}(x') dx' = \int_{Q_0} \tilde{f}(h_{u_k}(u')) |\det h'_{u_k}(u')| du'. \quad (\text{IV})$$

- Aus

$$\begin{aligned}
g(u) = \omega(\psi(u)) &= \omega(\psi_1(u), \dots, \psi_{k-1}(u), u_k) \\
&= (\psi_1(u), \dots, \psi_{k-1}(u), \omega_k(\psi_1(u), \dots, \psi_{k-1}(u), u_k)) \\
&= (g_1(u), \dots, g_{k-1}(u), \omega_k(g_1(u), \dots, g_{k-1}(u), u_k))
\end{aligned}$$

folgt

$$g(u) = \omega(g_1(u), \dots, g_{k-1}(u), u_k) \quad \text{und} \quad \psi(u) = (g_1(u), \dots, g_{k-1}(u), u_k).$$

Die Abbildung $v' \mapsto \omega(v', u_k)$ ist also für alle $v' \in h_{u_k}(Q_0)$ und jedes $u_k \in [a_k, b_k]$ definiert. Wir setzen

$$F(v', u_k) := f(\omega(v', u_k)) |\det \omega'(v', u_k)|$$

und erhalten aus (IV) und (det)

$$\begin{aligned}
\int_{h_{u_k}(Q_0)} F(v', u_k) dv' &= \int_{Q_0} F(h_{u_k}(u'), u_k) |\det h'_{u_k}(u')| du' \\
&= \int_{Q_0} F(g_1(u', u_k), \dots, g_{k-1}(u', u_k), u_k) |\det \psi'(u', u_k)| du' \\
&= \int_{Q_0} F(\psi(u', u_k)) |\det \psi'(u', u_k)| du'.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(Q)} F(v', u_k) d(v', u_k) &= \int_{a_k}^{b_k} \int_{h_{u_k}(Q_0)} F(v', u_k) dv' du_k \\
&= \int_{a_k}^{b_k} \int_{Q_0} F(\psi(u', u_k)) |\det \psi'(u', u_k)| du' du_k \\
&= \int_Q F(\psi(u)) |\det \psi'(u)| du = \int_Q f(g(u)) |\det g'(u)| du
\end{aligned}$$

wegen

$$F(\psi(u)) |\det \psi'(u)| = f(\omega(\psi(u)) |\det \omega'(\psi(u))| \cdot |\det \psi'(u)| = f(g(u)) |\det g'(u)|.$$

Außerdem folgt aus (B) unter Beachtung von $\omega(v) = (v_1, \dots, v_{k-1}, \omega_k(v))$, dass

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(Q)} F(v', u_k) d(v', u_k) &= \int_{\psi(Q)} f(\omega(v', u_k)) |\det \omega'(v', u_k)| d(v', u_k) \\
&= \int_{\omega(\psi(Q))} f(x) dx = \int_{g(Q)} f(x) dx.
\end{aligned}$$

1.5 Übungsaufgaben

1. Man schreibe das Integral $\iint_B f(x, y) d(x, y)$ als iteriertes Integral:
- B sei das Dreieck mit den Eckpunkten in $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ und $C = (1, 0)$.
 - B sei das Dreieck mit den Eckpunkten in $A = (0, 0)$, $B = (2, 1)$ und $C = (1, 1)$.
 - B werde begrenzt durch $x = 0$, $y = 1$ und $y^2 = x$.

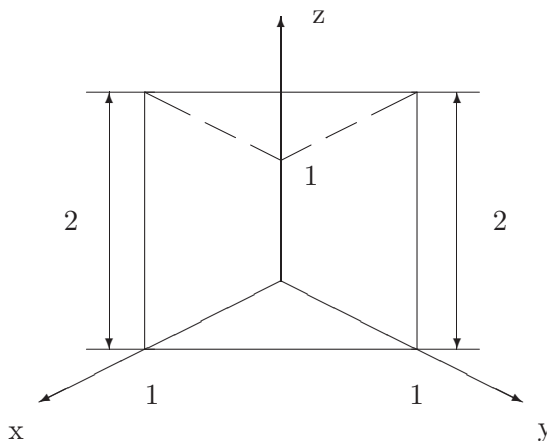
2. Man berechne

- $\iint_B x d(x, y)$, wobei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \leq 2 - x\}$,
- $\iint_B \left(\frac{x}{y}\right)^2 d(x, y)$, wobei B von $y = x$, $x = 2$ und $xy = 1$ begrenzt wird,
- $\iint_B y d(x, y)$, wobei B der Bereich zwischen einem Zykloidenbogen

$$\{(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)) : 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

und der x -Achse ist.

- Man bestimme mit Hilfe eines Bereichsintegrals das Volumen des Körpers, der durch das elliptische Paraboloid $z = 2x^2 + y^2 + 1$, die Ebene $x + y = 1$ und die Koordinatenebenen begrenzt wird.
- Stellen Sie das Raumintegral zur Berechnung des Volumens des in der Abbildung gezeigten Prismas auf.



- Man berechne mittels eines Raumintegrals das Volumen des Körpers, der durch die Flächen $x^2 + y^2 = a^2$ und $x^2 + z^2 = a^2$ begrenzt wird.

6. Nutzen Sie Polarkoordinaten für die Berechnung von

(a) $\iint_B \sqrt{1-x^2-y^2} d(x,y)$, B - Einheitskreisscheibe,

(b) $\int_0^2 \int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2}) dy dx$, $f \in \mathbf{C}[0, 2\sqrt{2}]$.

7. Man berechne das Volumen des Körpers, der von der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ aus dem Zylinder $x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}$ herausgeschnitten wird.

8. Man berechne

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) d(x, y, z)$$

für Bereich B , der von $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ und $z = c$ mit $a, b, c > 0$ berandet wird.

9. Man bestimme die Masse und den Schwerpunkt der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, wenn die Dichte in den Kugelpunkten dem Abstand dieser Punkte vom Koordinatenursprung umgekehrt proportional ist.

10. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment für einen Hohlzylinder und einen Kegelstumpf, wenn beide um ihre Symmetrieachse rotieren und jeweils homogene Massenverteilung haben (Dichte konstant).

Kapitel 2

Kurvenintegrale

2.1 Wege, Kurven und ihre Längen

Unter einem **Weg** γ in \mathbb{R}^m verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eines Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Die von diesem Weg erzeugte **Kurve** $\Gamma = \Gamma_\gamma$ ist das Bild dieser Abbildung,

$$\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}.$$

Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)) = [\gamma_1(t) \quad \dots \quad \gamma_m(t)]^T = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{bmatrix} = [\gamma_j(t)]_{j=1}^m.$$

Ist $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{Z}[a, b]$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, so bezeichnen wir mit $L(\gamma, Z)$ die Länge des Polygonzuges $[\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)]$, d.h.

$$L(\gamma, Z) = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

Man nennt nun den Weg γ **rektifizierbar**, wenn $L(\gamma) := \sup \{L(\gamma, Z) : Z \in \mathcal{Z}[a, b]\}$ eine endliche Zahl ist. In diesem Fall heißt $L(\gamma)$ die **Länge** des Weges γ .

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt von **beschränkter Variation**, wenn

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| : Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{Z}[a, b] \right\} < \infty$$

gilt. Der Weg $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann rektifizierbar ist, wenn jede Funktion $\gamma_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, von beschränkter Variation ist.

Beispiel 2.1 Die stetige Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t \sin \frac{\pi}{2t} & : 0 < t \leq 1, \\ 0 & : t = 0, \end{cases}$$

ist nicht von beschränkter Variation, so dass der Weg

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$$

nicht rektifizierbar ist.

Sind $\gamma^1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\gamma^2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^m$ zwei Wege mit $\gamma^1(b) = \gamma^2(b)$, so verstehen wir unter der **Summe** $\gamma = \gamma^1 \oplus \gamma^2$ den Weg

$$\gamma : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma^1(t) & : a \leq t \leq b, \\ \gamma^2(t) & : b < t \leq c. \end{cases}$$

Offenbar ist der Weg γ genau dann rektifizierbar, wenn die Wege γ^1 und γ^2 rektifizierbar sind, wobei $L(\gamma) = L(\gamma^1) + L(\gamma^2)$ gilt.

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Weg. Für $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ bezeichnen wir mit $s(t_1, t_2)$ die Länge des Weges $\gamma|_{[t_1, t_2]}$. Insbesondere sei $s(t) = s(a, t)$, $a \leq t \leq b$, die sogenannte **Weglängenfunktion**. Man nennt $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ einen **Jordanweg**, wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ injektiv ist. Eine Kurve Γ heißt **Jordankurve**, wenn sie von einem Jordanweg erzeugt wird.

Satz 2.2 *Es seien Γ eine Jordankurve und $\gamma^j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2$, zwei Γ erzeugende Jordanwege mit $\gamma^1(a_1) = \gamma^2(a_2)$ und $\gamma^1(b_1) = \gamma^2(b_2)$. Dann existiert eine stetige Bijektion $\varphi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$, so dass*

$$\gamma^2(t) = \gamma^1(\varphi(t)), \quad t \in [a_2, b_2],$$

also $\gamma^2 = \gamma^1 \circ \varphi$, gilt.

Wir bemerken, dass umgekehrt $\gamma^2 = \gamma^1 \circ \varphi : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Jordanweg ist, wenn $\gamma^1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Jordanweg und $\varphi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ eine stetige Bijektion sind.

Satz 2.3 *Es seien $\gamma^1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Weg, $\varphi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ eine stetige Bijektion und $\gamma^2 = \gamma^1 \circ \varphi$. Dann sind γ^1 und γ^2 gleichzeitig rektifizierbar oder nicht rektifizierbar, wobei $L(\gamma^1) = L(\gamma^2)$ gilt.*

Die Sätze 2.2 und 2.3 erlauben die folgende Definition der Länge einer Jordankurve: Ist γ ein die Kurve Γ erzeugender Jordanweg, so ist die **Länge** von Γ gleich $L(\gamma)$.

Für den Beweis des Satzes 2.5 benötigen wir den folgenden Satz. Ist $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Riemann-integrierbaren Funktionen $f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, gegeben, so vereinbaren wir die Bezeichnung

$$\int_a^b f(t) dt = \left[\int_a^b f_j(t) dt \right]_{j=1}^m.$$

Satz 2.4 *Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, so gilt*

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Satz 2.5 *Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein stetig differenzierbarer Weg, so gilt $s'(t) = |\gamma'(t)|$, $t \in [a, b]$, und somit*

$$L(\gamma) = s(a, b) = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t) dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

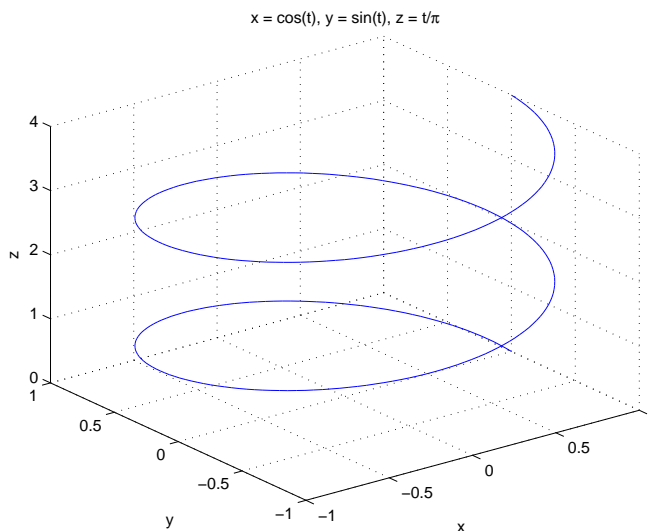
Beispiel 2.6 *Wir berechnen den Umfang eines Kreises mit dem Radius r ,*

$$\{(r \cos t, r \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}.$$

Beispiel 2.7 Die Länge einer Voldrehung der Schraubenlinie mit dem Radius r und der Ganghöhe h ,

$$\left\{ \left(r \cos t, r \sin t, \frac{ht}{2\pi} \right) : 0 \leq t \leq 2\pi \right\}$$

ist gleich $\sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}$.



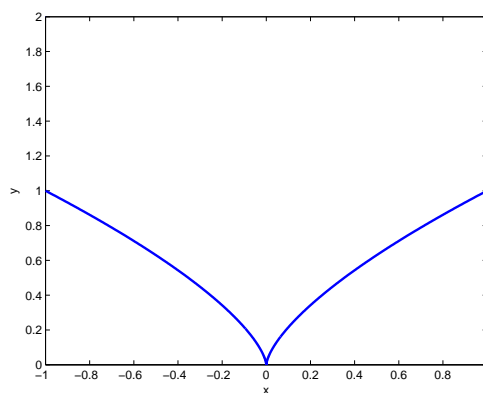
Zwei Voldrehungen der Schraubenlinie mit dem Radius 1 und der Ganghöhe 2

Beispiel 2.8 Die Länge der Kurve, die durch den Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben wird, ist gleich

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

Man nennt einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ **glatt**, wenn er stetig differenzierbar ist und $\gamma'(t) \neq \Theta$ (d.h., $|\gamma'(t)| \neq 0 \forall t \in [a, b]$) gilt.

Beispiel 2.9 Der Weg $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}$ ist ein Beispiel für einen stetig differenzierbaren, aber nicht glatten Weg. Die zugehörige Kurve nennt man **Neil'sche Parabel**.



Die Neil'sche Parabel

Sind nun γ ein glatter Weg und $\Gamma = \Gamma_\gamma$, so ist die Bogenlänge $s(t) = s(a, t)$ gegeben durch $s(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau$ und (streng) monoton wachsend auf $[a, b]$, wobei $s'(t) = |\gamma'(t)| > 0 \forall t \in [a, b]$ gilt. Es sei $\varphi : [0, L] \rightarrow [a, b]$ die differenzierbare Umkehrfunktion von $s : [a, b] \rightarrow [0, L]$, $L = L(\gamma) = L(\Gamma)$. Dann ist (vgl. Satz 2.2) $\delta(s) = \gamma(\varphi(s))$, $s \in [0, L]$, ebenfalls ein glatter Jordanweg mit $\Gamma = \Gamma_\delta$. Man nennt $\delta(s)$ die **Parametrisierung der Jordankurve Γ nach der Bogenlänge**. Dabei gilt

$$\delta'(s) = \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s) \quad \text{und} \quad \varphi'(s) = \frac{1}{s'(\varphi(s))} = \frac{1}{|\gamma'(\varphi(s))|},$$

also $|\delta'(s)| = 1$, $s \in [0, L]$.

Ausgehend von der Formel (1.1) kann man zeigen, dass das Integral

$$\frac{1}{2} \int_a^b [\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2(t)] dt$$

den **orientierten** Flächeninhalt angibt, den der Strahl vom Koordinatenursprung zum Punkt $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ entlang des stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ überstreicht.

2.2 Wegintegrale

Wir erinnern an den Begriff des Riemann-Stieltjes-Integrals (vgl. [1, Abschnitt 7.5] oder [7, Abschnitt 5.6]): Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, eine monoton nicht fallende Funktion $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{Z}[a, b]$ definieren wir die Darboux'schen Unter- und Obersummen

$$S_u(f; Z, \mu) := \sum_{k=1}^n m_k(f; Z)[\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})], \quad S_o(f; Z, \mu) := \sum_{k=1}^n M_k(f; Z)[\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})],$$

wobei

$$m_k(f; Z) = \inf \{f(t) : t_{k-1} \leq t \leq t_k\}, \quad M_k(f; Z) = \sup \{f(t) : t_{k-1} \leq t \leq t_k\}.$$

Das Darboux'sche untere bzw. obere Integral ist dann gegeben durch

$$J_u(f; \mu) = \sup \{S_u(f; Z, \mu) : Z \in \mathcal{Z}[a, b]\} \quad \text{bzw.} \quad J_o(f; \mu) = \inf \{S_o(f; Z, \mu) : Z \in \mathcal{Z}[a, b]\}.$$

Sind beide Integrale gleich, so nennt man f bzgl. μ **Riemann-Stieltjes-integrierbar** und schreibt

$$\int_a^b f d\mu = \int_a^b f(t) d\mu(t) := J_u(f; \mu) = J_o(f; \mu).$$

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert $\int_a^b f d\mu$, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{Z}[a, b]$ mit

$$M_k(f; Z) - m_k(f; Z) < \frac{\varepsilon}{\mu(b) - \mu(a) + 1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

woraus $S_o(f; Z, \mu) - S_u(f; Z, \mu) < \varepsilon$ folgt.

Ist $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion beschränkter Variation, so ist die Funktion

$$\mu_1(t) = V_a^t(\mu) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})| : \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{Z}[a, t] \right\}$$

monoton nicht fallend auf $[a, b]$. Für die Funktion $\mu_2(t) = \mu_1(t) - \mu(t)$ und $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ gilt dann

$$\mu_2(t_2) - \mu_2(t_1) = V_{t_1}^{t_2}(\mu) - [\mu(t_2) - \mu(t_1)] \geq V_{t_1}^{t_2}(\mu) - |\mu(t_2) - \mu(t_1)| \geq 0.$$

Also ist $\mu(t) = \mu_1(t) - \mu_2(t)$ die Differenz zweier monoton nicht fallender Funktionen. Somit lässt sich die Definition des Riemann-Stieltjes-Integrals leicht auf Belegungsfunktionen μ beschränkter Variation ausdehnen, z.B. durch $\mu = \mu_1 - \mu_2$ und

$$\int_a^b \varphi d\mu := \int_a^b \varphi d\mu_1 - \int_a^b \varphi d\mu_2.$$

Dabei ist das so definierte Integral unabhängig von der Darstellung $\mu = \mu_1 - \mu_2 = \tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2$ der Belegungsfunktion als Differenz zweier monoton nicht fallender Funktionen.

Wir nennen $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stückweise stetig**, wenn eine Zerlegung $\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{Z}[a, b]$ existiert, so dass die Funktionen

$$g_k(t) = \begin{cases} g(t) & : t_{k-1} < t < t_k, \\ g(t_k - 0) & : t = t_k, \\ g(t_{k-1} + 0) & : t = t_{k-1}, \end{cases}$$

auf $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, n$, stetig sind, $g(a) = g(a + 0)$ und $g(b) = g(b - 0)$ gilt und $g(t_k)$ mit einem der einseitigen Grenzwerte von g in t_k übereinstimmt, $k = 1, \dots, n$. Sind $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar, so gilt (vgl. [1, Satz 7.12] oder [7, Satz 5.42])

$$\int_a^b f(t) d\mu(t) = \int_a^b f(t) \mu'(t) dt.$$

Sind nun $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein rektifizierbarer Weg, $\Gamma = \Gamma_\gamma$ und $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist $s(t) = s(a, t)$ auf $[a, b]$ monoton nicht fallend, und somit existiert das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_a^b \varphi(\gamma(t)) ds(t),$$

welches wir mit

$$\int_\gamma \varphi(x) ds \quad \text{oder kurz} \quad \int_\gamma \varphi ds$$

bezeichnen und **Wegintegral 1. Art** der Funktion φ entlang des Weges γ nennen. Ist γ stückweise stetig differenzierbar, so gilt also

$$\int_\gamma \varphi ds = \int_a^b \varphi(\gamma(t)) s'(t) dt = \int_a^b \varphi(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Seien nun $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ wieder ein rektifizierbarer Weg und $f = (f_1, \dots, f_m) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion. Dann sind die Funktionen $\gamma_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, sämtlich von beschränkter Variation und somit die Integrale

$$\int_a^b f_j d\gamma_j$$

wohldefiniert. Das **Wegintegral 2. Art** des Vektorfeldes f entlang des Weges γ ist definiert als

$$\int_\gamma f(x) dx = \sum_{j=1}^m \int_a^b f_j d\gamma_j.$$

Im Fall eines stückweise stetig differenzierbaren Weges γ gilt also

$$\int_{\gamma} f(x) dx = \sum_{j=1}^m \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Beispiel 2.10 Ist $\Gamma = \Gamma_{\gamma} \subset \mathbb{R}^3$ eine mit Masse belegte Jordankurve mit der stetigen Dichtefunktion $\rho(x)$, $x \in \Gamma$, und dem rektifizierbaren Jordanweg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, so ist die Gesamtmasse der Kurve Γ gleich

$$\int_{\gamma} \rho ds.$$

Beispiel 2.11 Wird ein Massepunkt entlang des rektifizierbaren Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch die Kraft $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x)) : \Gamma_{\gamma} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bewegt, so ist die dabei geleistete Arbeit gleich

$$\int_{\gamma} F(x) dx = \sum_{j=1}^3 \int_a^b F_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t).$$

Bemerkung 2.12 Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Weg, so bezeichnen wir mit $\gamma^{-} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \gamma(a+b-t)$ den entgegengesetzten Weg. Ist γ rektifizierbar, so gilt dann für stetiges $\varphi : \Gamma_{\gamma} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\gamma^{-}} \varphi(x) ds = \int_{\gamma} \varphi(x) ds$$

und für stetiges $f : \Gamma_{\gamma} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\int_{\gamma^{-}} f(x) dx = - \int_{\gamma} f(x) dx.$$

Aus der Definition der Wegintegrale folgt außerdem, dass

$$\int_{\gamma^1 \oplus \gamma^2} \varphi ds = \int_{\gamma^1} \varphi ds + \int_{\gamma^2} \varphi ds$$

und

$$\int_{\gamma^1 \oplus \gamma^2} f(x) dx = \int_{\gamma^1} f(x) dx + \int_{\gamma^2} f(x) dx$$

gilt.

Beispiel 2.13 Sind $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\Theta\}$ ein stetig differenzierbarer Weg und $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{\Theta\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto -\frac{x}{|x|^3}$, so gilt $F(x) = \nabla f(x)$ mit $f(x) = \frac{1}{|x|}$. Es folgt

$$\int_{\gamma} F(x) dx = \int_a^b f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Der Wert des Integrals hängt also nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges γ ab.

Beispiel 2.14 Für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$, $R > 0$, und $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\Theta\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \left(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2}\right)$ erhalten wir

$$\int_{\gamma} f(x) dx = R^{-2} \int_0^{2\pi} [(-R \sin t)(-R \sin t) + R \cos t R \cos t] dt = 2\pi.$$

2.3 Wegunabhängigkeit

Unter einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ verstehen wir eine offene und zusammenhängende Menge. Zu folgendem Satz vergleiche man Beispiel 2.13.

Satz 2.15 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein Gebiet, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld und $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} \nabla \varphi(x) dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Wir nennen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein **Vektorfeld mit wegunabhängigem Integral** über dem Gebiet Ω , wenn für beliebige, fest gewählte Punkte $A, B \in \Omega$ und einen beliebigen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma(a) = A$ und $\gamma(b) = B$ das Integral $\int_{\gamma} f(x) dx$ den gleichen Wert annimmt, also lediglich eine Funktion von A und B , aber nicht von γ ist. Unter Beachtung von Bemerkung 2.12 ist leicht einzusehen, dass das Integral $\int_{\gamma} f(x) dx$ genau dann vom Weg unabhängig ist, wenn $\int_{\gamma} f(x) dx = 0$ für jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ gilt.

Satz 2.16 *Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein stetiges Vektorfeld mit wegunabhängigem Integral über dem Gebiet Ω , so existiert ein Skalarfeld $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla \varphi(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$.*

Die letzten beiden Sätze besagen also, dass ein stetiges Vektorfeld $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann ein Vektorfeld mit wegunabhängigem Integral über dem Gebiet Ω ist, wenn es ein **Gradientenfeld** ist. Sind $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f(x) = \nabla \varphi(x)$, $x \in \Omega$, so folgt (vgl. Satz 6.18, Analysis I/II)

$$\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}, \quad x \in \Omega, \quad j, k = 1, \dots, m.$$

Die Matrix $f'(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist in diesem Fall also symmetrisch.

Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ heißt **sternförmig**, wenn ein $A \in \Omega$ existiert, so dass die Strecke

$$[A, x] := \{A + t(x - A) : 0 \leq t \leq 1\}$$

für jedes $x \in \Omega$ ganz in Ω liegt.

Satz 2.17 *Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer sternförmigen offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn*

$$\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall j, k = 1, \dots, m, \quad (2.1)$$

gilt.

Zum Beweis dieses Satzes verwenden wir die folgende Aussage.

Satz 2.18 *Die Funktion $f : [a, b] \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ sei nebst ihrer partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x} : [a, b] \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist*

$$F : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$$

differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt, \quad x \in (c, d).$$

Beweis von Satz 2.17. Es bleibt nur noch die Hinlänglichkeit der **Integrabilitätsbedingung** (2.1) zu zeigen. Dazu seien $A = [A_j]_{j=1}^m \in \Omega$ ein **Sternmittelpunkt** des Gebietes Ω , $x \in \Omega$ beliebig und $\gamma_x(t) = [\gamma_{x,i}(t)]_{i=1}^m = A + t(x - A)$, $0 \leq t \leq 1$, d.h., $\gamma_{x,i}(t) = x_i + t(x_i - A_i)$. Wir setzen

$$\varphi(x) := \int_{\gamma_x} f(y) dy = \int_0^1 \langle f(\gamma_x(t)), \gamma'_x(t) \rangle dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^m f_j(\gamma_x(t))(x_j - A_j) dt.$$

Wir schreiben f_j als Funktion von $y \in \mathbb{R}^m$, also $f_j(y)$, und erhalten aus der (verallgemeinerten) Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} [f_j(\gamma_x(t))(x_j - A_j)] &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j(\gamma_x(t))}{\partial y_i} \frac{\partial \gamma_{x,i}(t)}{\partial x_k} (x_j - A_j) + f_j(\gamma_x(t)) \delta_{jk} \\ &= \frac{\partial f_j(\gamma_x(t))}{\partial y_k} t(x_j - A_j) + f_j(\gamma_x(t)) \delta_{jk} \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \frac{\partial f_k(\gamma_x(t))}{\partial y_j} t(x_j - A_j) + f_j(\gamma_x(t)) \delta_{jk}. \end{aligned}$$

Aus Satz 2.18 folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{j=1}^m f_j(\gamma_x(t))(x_j - A_j) \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial f_k(\gamma_x(t))}{\partial y_j} t(x_j - A_j) + f_k(\gamma_x(t)) \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t f_k(A + t(x - A))] dt = [t f_k(A + t(x - A))]_0^1 = f_k(x), \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist. \square

Unter einer **Deformation** eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ verstehen wir eine stetige Abbildung $\delta : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(t, \sigma) \mapsto \delta(t, \sigma)$, für die $\delta(t, 0) = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$, gilt und für die $\delta_\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \delta(t, \sigma)$ für jedes $\sigma \in [0, 1]$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg ist. Ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ heißt in $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ auf einen Punkt zusammenziehbar, wenn eine Deformation $\delta : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ von γ existiert, so dass $\delta(a, \sigma) = \delta(b, \sigma)$ für alle $\sigma \in [0, 1]$ gilt und $\delta(t, 1)$ konstant ist.

Beispiel 2.19 Die Abbildung $\delta : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(t, \sigma) \mapsto (a(1 - \sigma) \cos t, b(1 - \sigma) \sin t)$ ist eine Deformation, die die Ellipse mit den Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$ auf den Koordinatensprung zusammenzieht. Auch

$$\delta : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t, \sigma) \mapsto \left(\frac{2a}{5} \left(2 - \sigma + \frac{1}{2 - \sigma} \right) \cos t, \frac{2b}{3} \left(2 - \sigma - \frac{1}{2 - \sigma} \right) \sin t \right)$$

ist eine Deformation dieser Ellipse, wobei hier $\delta_1(t) = (\frac{4a \cos t}{5}, 0)$ gilt, d.h., Γ_{δ_1} ist gleich dem Intervall $[-\frac{4a}{5}, \frac{4a}{5}]$ und das offene Intervall $(-\frac{4a}{5}, \frac{4a}{5})$ wird dabei zweimal durchlaufen.

Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ nennen wir **einfach zusammenhängend**, wenn jeder geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ in Ω auf einen Punkt zusammenziehbar ist. Satz 2.17 lässt sich nun wie folgt verallgemeinern.

Satz 2.20 *Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn die **Integrabilitätsbedingung** (2.1) erfüllt ist.*

Beweis. Es seien $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ein beliebiger geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg und $\delta : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ eine Deformation, die diesen Weg in Ω auf einen Punkt zusammenzieht. Ferner seien $Z_1 = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{Z}[a, b]$ und $Z_2 = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r\} \in \mathcal{Z}[0, 1]$ Zerlegungen derart, dass für jedes Indexpaar $(j, k) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, r\}$ ein $\varepsilon_{jk} > 0$ und ein Punkt $x_{jk} \in \Omega$ existieren, so dass $\Gamma_{jk} \subset U_{\varepsilon_{jk}}(x_{jk}) \subset \Omega$ gilt, wobei Γ_{jk} das Bild des Weges

$$\gamma^{jk} = \gamma_{jk} \oplus \delta_{jk} \oplus \gamma_{j,k+1}^- \oplus \delta_{j-1,k}^-$$

ist. Hierbei sind

$$\gamma_{jk}(t) = \delta(t, \sigma_k), \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad \delta_{jk}(t) = \delta(t_j, \sigma), \quad \sigma_{k-1} \leq \sigma \leq \sigma_k.$$

Nach Satz 2.17 gilt

$$\int_{\gamma^{jk}} f(x) dx = 0 \quad \forall (j, k) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, r\}.$$

Damit folgt aus Bemerkung 2.12

$$0 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r \int_{\gamma^{jk}} f(x) dx = \int_{\gamma} f(x) dx.$$

□

Beispiel 2.21 *Für das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 x_2^4 + 2x_1^5, 2x_1^2 x_2^3 - x_2^6)$ ist die Integrabilitätsbedingung (2.1) erfüllt. Wir erhalten $f(x) = \nabla \varphi(x) \forall x \in \mathbb{R}^2$ mit*

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^4}{2} + \frac{x_1^6}{3} - \frac{x_2^7}{7} + d$$

und einer beliebigen Konstanten $d \in \mathbb{R}$.

Es sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ ein Normalbereich mit stetigen Funktionen $\varphi_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkter Variation. Der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ von Ω setzt sich aus den Kurven Γ_{γ^1} , $\Gamma_{\tilde{\gamma}^1}$, $\Gamma_{(\gamma^2)^-}$ und $\Gamma_{(\tilde{\gamma}^2)^-}$ zusammen, wobei $\gamma^k(t) = (t, \varphi_k(t))$, $a \leq t \leq b$, $\tilde{\gamma}^1(t) = (b, t)$, $\varphi_1(b) \leq t \leq \varphi_2(b)$, und $\tilde{\gamma}^2(t) = (a, t)$, $\varphi_1(a) \leq t \leq \varphi_2(a)$. Es seien nun $P, \frac{\partial P}{\partial y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} d(x, y) &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))] dx \\ &= \int_{\gamma^2} P(x, y) dx - \int_{\gamma^1} P(x, y) dx = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Analog erhält man für einen Normalbereich $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ mit stetigen Funktionen $\psi_j : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkter Variation und mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und für stetige Funktionen $Q, \frac{\partial Q}{\partial x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Formel

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} d(x, y) = \int_{\Gamma} Q(x, y) dy.$$

Der folgende **Gauß'sche Integralsatz der Ebene** ergibt sich als Spezialfall des entsprechenden Satzes in Kapitel 3.

Satz 2.22 *Der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ des einfach zusammenhängenden Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei eine stückweise glatte, geschlossene Jordankurve. Ferner seien $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.*

Dann gilt

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] d(x, y) = \int_{\Gamma} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy].$$

2.4 Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie für $a > 0$ den Umfang und die eingeschlossene Fläche

- (a) der Astroide $\{(a \cos^3 t, a \sin^3 t) : 0 \leq t \leq 2\pi\}$,
- (b) der Kardioide $\{r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ mit $r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$.

2. Berechnen Sie folgende Wegintegrale:

- (a) $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) ds$, $\gamma(t) = (t, t)$, $a \leq t \leq b$,
- (b) $\int_{\gamma} y ds$, Γ_{γ} : Parabelbogen $y^2 = 2px$ von $(0, 0)$ bis $(1, \sqrt{2p})$ ($p > 0$),
- (c) $\int_{\gamma} xy ds$, $\Gamma_{\gamma} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

3. Skizzieren Sie die ebenen Vektorfelder:

- (a) $f(x, y) = (1 + x, 0)$,
- (b) $f(x, y) = (x, y)$,
- (c) $f(x, y) = (-y, x)$,
- (d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y)$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

4. Berechnen Sie folgende Wegintegrale zweiter Art:

- (a) $\int_{\gamma} (x + y) dx + (x - y) dy$, $\Gamma_{\gamma} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ positiv orientiert,
- (b) $\int_{\gamma} (-y dx + x dy)$, Γ_{γ} - Streckenzug von $(0, 0)$ über $(1, 0)$ nach $(1, 1)$.

5. Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$(x, y, z) \mapsto (2xyz + 3 \sin y, x^2 z + 3x \cos y - 5e^{2z}, x^2 y - 10ye^{2z}).$$

Überprüfen Sie, ob es sich um ein Gradientenfeld handelt. Bestimmen Sie gegebenenfalls das dazugehörige Potential.

6. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} (x^2 + y) dx + (x - y^2) dy,$$

wobei γ der positiv orientierte Rand des Quadrates $[1, 2] \times [1, 2]$ ist.

7. In welchen Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$(x, y) \mapsto \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

ein Gradientenfeld.

Kapitel 3

Oberflächenintegrale und Integralsätze

3.1 Definition der Oberflächenintegrale

Wir bewegen uns jetzt im dreidimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 . Jedem Punkt

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ordnen wir den Vektor $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $e_j = [\delta_{jk}]_{k=1}^3$ zu. D.h., wir identifizieren x und \vec{x} in diesem Sinne. Neben dem **Skalarprodukt**

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^3 x_k y_k = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y})$$

mit $|\vec{x}| = |x| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ verwenden wir auch das **Kreuzprodukt**

$$\vec{x} \times \vec{y} = \text{„det“} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_3) \vec{e}_3$$

zweier Vektoren. Offenbar gilt

$$(K1) \quad \vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x}), \quad \vec{x} \times \vec{x} = \vec{\Theta},$$

$$(K2) \quad (\lambda \vec{x}) \times \vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \times (\lambda \vec{y}), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(K3) \quad \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z},$$

$$(K4) \quad (\vec{x}, \vec{y} \times \vec{z}) = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Aus (K4) folgt insbesondere, dass der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ auf \vec{x} und auf \vec{y} senkrecht steht.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren \vec{x} und \vec{y} kann auch koordinatenfrei definiert werden: Der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ ist genau der Vektor, dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt des durch \vec{x} und \vec{y} aufgespannten Parallelogramms ist, der senkrecht auf der durch \vec{x} und \vec{y} aufgespannten Ebene steht und der mit \vec{x} und \vec{y} in der Reihenfolge \vec{x} , \vec{y} , $\vec{x} \times \vec{y}$ ein Rechtssystem bildet.

Für $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$(P1) \quad (\vec{f} \times \vec{g})(t) := \vec{f}(t) \times \vec{g}(t).$$

Es folgt, falls f und g differenzierbar sind,

$$(P2) \quad (\vec{f} \times \vec{g})' = \vec{f}' \times \vec{g} + \vec{f} \times \vec{g}'.$$

Sind $G \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine gegebene Abbildung mit

$$\vec{f}(u_1, u_2) = f_1(u_1, u_2)\vec{e}_1 + f_2(u_1, u_2)\vec{e}_2 + f_3(u_1, u_2)\vec{e}_3,$$

so definieren wir

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_k}{\partial u_j} \vec{e}_k, \quad j = 1, 2,$$

und

$$\frac{\partial(f_k, f_j)}{\partial(u_1, u_2)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \frac{\partial f_k}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_j}{\partial u_1} & \frac{\partial f_j}{\partial u_2} \end{bmatrix}.$$

Es folgt

$$(P3) \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial u_2} = \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(u_1, u_2)} \vec{e}_1 + \frac{\partial(f_3, f_1)}{\partial(u_1, u_2)} \vec{e}_2 + \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} \vec{e}_3.$$

Definition 3.1 Sind $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Abbildung auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ und $K \subset G$ eine kompakte, Jordan-messbare Menge, $K \neq \emptyset$, so nennt man die Abbildung $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine **Fläche** mit dem Parameterbereich K und $F := f(K)$ ein **Flächenstück** mit der Parameterdarstellung $x = f(u)$ bzw. $(x_1, x_2, x_3) = f(u_1, u_2)$ oder auch

$$\vec{x} = \vec{f}(u) = f_1(u)\vec{e}_1 + f_2(u)\vec{e}_2 + f_3(u)\vec{e}_3.$$

Beispiel 3.2 Sind $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und

$$\vec{f}(u) = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \varphi(u)\vec{e}_3,$$

so ist $f(K)$ der Graph der Funktion $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u_j}(u) = \vec{e}_j + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_j} \vec{e}_3$$

und somit

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial u_2}(u) = -\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1} \vec{e}_1 - \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_2} \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Beispiel 3.3 Mit $K = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ erhalten wir für ein festes $r > 0$ und

$$\vec{f}(u) = r \cos u_1 \cos u_2 \vec{e}_1 + r \sin u_1 \cos u_2 \vec{e}_2 + r \sin u_2 \vec{e}_3$$

als Flächenstück $f(K)$ die Kugeloberfläche mit dem Radius $r > 0$ und dem Mittelpunkt Θ . Dabei gilt

$$\frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_2} = r \cos u_2 \vec{f}(u).$$

Sind $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $x^0 = f(u^0) \in F = f(K)$ ein fester Punkt auf dem Flächenstück F , $u^0 \in K$, so verstehen wir unter der **Tangentialebene** von f im Punkt x^0 die Ebene

$$\left\{ \lambda_1 \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_1} + \lambda_2 \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_2} : \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

und unter der **Tangentenebene** von f im Punkt x^0 die Ebene

$$\left\{ x^0 + \lambda_1 \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_1} + \lambda_2 \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_2} : \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

falls die zwei Vektoren $\frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_j}$, $j = 1, 2$, linear unabhängig sind. (Solche Punkte $x^0 \in F$ nennen wir **reguläre Punkte** der Fläche f .) Ist nämlich $\gamma : [a, b] \rightarrow K$ ein glatter Weg mit $\gamma(t_0) = u^0$, $t_0 \in (a, b)$, so ist $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow F$ ein differenzierbarer Weg durch den Punkt x^0 . Dabei gilt

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = \gamma'_1(t_0) \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_1} + \gamma'_2(t_0) \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_2}.$$

Der Vektor $\overrightarrow{(f \circ \gamma)'(t_0)}$ liegt also in der Tangentialebene von f im Punkt x^0 . Der Vektor

$$\vec{n}(u^0) = \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_2}$$

steht senkrecht auf der Tangentenebene von f im Punkt x^0 , weshalb wir diesen Vektor einen **Normalenvektor** der Fläche f im Punkt $x^0 = f(u^0)$ nennen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, den Flächeninhalt $|F|$ des Flächenstücks $F = f(K)$ zu berechnen. Der Flächeninhalt von $f([u_1^0, u_1^0 + \Delta u_1] \times [u_2^0, u_2^0 + \Delta u_2])$ ist für kleine $\Delta u_j > 0$ ungefähr gleich

$$\left| \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_2} \right| \Delta u_1 \Delta u_2.$$

Das führt zu der Formel

$$|F| = \iint_K \left| \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_2} \right| d(u_1, u_2) = \iint_K |\vec{n}(u)| du.$$

Beispiel 3.4 Der Flächeninhalt der Oberfläche einer Kugel vom Radius r ist gleich (vgl. Beispiel 3.3)

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos u_2 |\vec{f}(u)| du_2 du_1 = 4\pi r^2.$$

Definition 3.5 Sind $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $\varphi : f(K) \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld und $v : f(K) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, so verstehen wir unter dem **Oberflächenintegral erster Art** von φ über $F = f(K)$ das Integral

$$\iint_F \varphi dF := \iint_K \varphi(f(u_1, u_2)) \left| \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_2} \right| d(u_1, u_2) = \iint_K \varphi(f(u)) |\vec{n}(u)| du$$

und unter dem **Oberflächenintegral zweiter Art** von v über F das Integral

$$\iint_F \vec{v} d\vec{F} := \iint_K (\vec{v}(f(u)), \vec{n}(u)) du = \iint_K \langle v(f(u)), n(u) \rangle du.$$

Wir nennen zwei Parametrisierungen $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Flächenstücks $F = f(K)$ **äquivalent**, wenn ein **Diffeomorphismus** (d.h. eine bijektive und in beiden Richtungen stetig differenzierbare Abbildung) $h : G_0 \rightarrow G$ einer offenen Menge $G_0 \subset \mathbb{R}^2$ mit $M \subset G_0$ in eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ mit $K \subset G$ existiert, so dass $\det h'(w) > 0$ für alle $w \in G_0$, $h(M) = K$ und $g(w) = f(h(w))$ für alle $w \in M$ gilt. Es ist dann offenbar $g(M) = f(K) = F$ und außerdem

$$\frac{\partial \vec{g}(w)}{\partial w_1} \times \frac{\partial \vec{g}(w)}{\partial w_2} = \left(\frac{\partial \vec{f}(h(w))}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(h(w))}{\partial u_2} \right) \det h'(w),$$

woraus z.B.

$$\begin{aligned} \iint_K (\vec{v}(f(u)), \vec{n}(u)) du &= \iint_M (\vec{v}(f(h(w))), \vec{n}(h(w))) |\det h'(w)| dw \\ &= \iint_M (\vec{v}(g(w)), \vec{n}(w)) dw \end{aligned}$$

folgt. Die Definition 3.5 ist also im Sinne der Verwendung äquivalenter Parametrisierungen unabhängig von der Parametrisierung des Flächenstücks F . Lässt man in obigen Betrachtungen auch $\det h'(w) < 0$ für alle $w \in G_0$ zu, so ändert sich in diesem Fall das Vorzeichen des Oberflächenintegrals zweiter Art. Jede Äquivalenzklasse von äquivalenten Parametrisierungen definiert also eine Orientierung des Flächenstücks. So ist z.B. $f(w_1, -w_2)$ ein Repräsentant der zu $f(u_1, u_2)$ entgegengesetzten Orientierung.

Wir werden im Weiteren eine Fläche $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ und das Flächenstück $F = f(K)$ **eigentlich** nennen, wenn K gleich der Abschließung eines beschränkten Gebietes $\Omega \neq \emptyset$ des \mathbb{R}^2 ist, die Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv ist und $\text{Rang } f'(u) = 2$ für alle $u \in \Omega$ gilt.

Beispiel 3.6 Mit

$$f(u) = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 + u_2 \\ u_1^2 - u_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad h(w) = \begin{bmatrix} \frac{w_1 + w_2}{2} \\ \frac{w_2 - w_1}{2} \end{bmatrix}$$

erhalten wir

$$h'(w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \det h'(w) = \frac{1}{2} > 0,$$

und die Parameterdarstellung

$$g(w) = f(h(w)) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_1 w_2 \end{bmatrix}$$

einer Sattelfläche.

Unter einem **zusammengesetzten Flächenstück** verstehen wir die Vereinigung endlich vieler Flächenstücke, die nur Randpunkte gemeinsam haben. Das Oberflächenintegral über ein zusammengesetztes Flächenstück ist dann gleich der Summe der Integrale über die einzelnen Flächenstücke.

3.2 Integralsätze

Es seien nun $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld (z.B. das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung).

- (a) Die Differenz zwischen dem aus dem Quader $\Omega = Q$ herausfließenden Volumen pro Zeiteinheit und dem in den Quader hineinfließenden Volumen pro Zeiteinheit ist gleich

$$\iint_F \vec{v}(x) d\vec{F}, \quad (3.1)$$

wobei die Oberfläche $F = \partial Q$ des Quaders Q (ein zusammengesetztes Flächenstück) so orientiert ist, dass die Flächennormale nach außen (also in $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ hinein) zeigt. Man nennt das Integral (3.1) den **Fluss** von \vec{v} durch die Oberfläche F .

- (b) Bezeichnen wir mit $|Q|$ das Volumen von Q , so ist offenbar

$$\text{mittlere Ergiebigkeit bzgl. } Q = \frac{\text{Überschuss}}{\text{Volumen von } Q} = \frac{1}{|Q|} \iint_F \vec{v} d\vec{F}.$$

- (c) Die **Divergenz** (Ergiebigkeit) des Vektorfeldes \vec{v} im Punkt x^0 ist gleich dem Grenzwert der mittleren Ergiebigkeit, wenn man Q auf den Punkt x^0 zusammenzieht:

$$\operatorname{div} \vec{v}(x^0) := \lim_{d(Q) \rightarrow 0, x^0 \in Q, F = \partial Q} \frac{1}{|Q|} \iint_F \vec{v} d\vec{F},$$

wobei $d(Q) := \max\{|x - y| : x, y \in Q\}$ den Durchmesser von Q bezeichnet. Gilt im Punkt x^0 die Ungleichung $\operatorname{div} \vec{v}(x^0) > 0$, so nennt man x^0 eine **Quelle** des Vektorfeldes \vec{v} , ist $\operatorname{div} \vec{v}(x^0) < 0$, so **Senke**.

- (d) Wir erhalten $\iint_F \vec{v} d\vec{F} = \iiint_Q \left[\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3(x)}{\partial x_3} \right] dx$.

- (e) Der Grenzübergang in (c) liefert somit unter Verwendung von (c)

$$\operatorname{div} \vec{v}(x^0) = \frac{\partial v_1(x^0)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(x^0)}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3(x^0)}{\partial x_3}.$$

Man nennt das Vektorfeld $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ **quellenfrei**, wenn $\operatorname{div} \vec{v}(x) = 0 \forall x \in \Omega$ gilt.

Unter (d) steht die “elementare” Form des Gauß’schen Integralsatzes im \mathbb{R}^3 . Für dessen allgemeine Formulierung benötigen wir folgende Definition.

Definition 3.7 Eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ heißt **Bereich** mit stückweise glattem Rand, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(B1) B ist die Abschließung einer nichtleeren offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

(B2) Der Rand ∂B von B ist die Vereinigung endlich vieler eigentlicher Flächenstücke $f_k(\overline{\Omega}_k)$, $k = 1, \dots, n_0$ ($\Omega_k \subset \mathbb{R}^2$ nichtleer und offen), die nur Randpunkte gemeinsam haben, wobei $\text{Rang } f'_k(u) = 2 \forall u \in \overline{\Omega}_k$ gilt und der Rand von $\overline{\Omega}_k$ stückweise glatt ist.

(B3) Die Normalenvektoren auf ∂B weisen nach außen.

Satz 3.8 (Gauß’scher Integralsatz) Es seien $B \subset \mathbb{R}^3$ eine Bereich mit stückweise glattem Rand $F = \partial B$ und $v : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\iint_F \vec{v} d\vec{F} = \iiint_B \text{div } \vec{v}(x) dx.$$

Interpretation: Die durch die Oberfläche von B fließende Flüssigkeitsmenge ist gleich der Menge, die die Quellen in B produzieren.

Folgerung 3.9 Es seien $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld auf dem Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ mit stückweise glattem Rand $F = \partial B$ und $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger, aber fest gewählter Vektor. Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{v}(x) = \varphi(x) \vec{a}$, $x \in B$. Aus dem Gauß’schen Integralsatz 3.8 folgt dann

$$\iint_F \vec{v} d\vec{F} = \left(\iint_F \varphi(x) d\vec{F}, \vec{a} \right) = \iiint_B \text{div } \vec{v}(x) dx = \left(\iiint_B \nabla \varphi(x) dx, \vec{a} \right).$$

Da diese Beziehung für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt erhalten wir den **Gauß’schen Integralsatz für Skalarfelder**

$$\iint_F \varphi(x) d\vec{F} = \iiint_B \nabla \varphi(x) dx,$$

wobei die Integrale komponentenweise zu bilden sind.

Beispiel 3.10 Ein Körper B schwimme in einer Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht ρ . Mit B^* bezeichnen wir den Teil von B , der sich unter der Flüssigkeitsoberfläche befindet. Die Gesamthöhe des Flüssigkeitsstandes sei $h > 0$. Dann ist die Druckverteilung durch

$$p(x) = \begin{cases} p_0 & : x_3 \geq h, \\ p_0 + \rho(h - x_3) & : 0 \leq x_3 < h, \end{cases}$$

gegeben, wobei p_0 der Luftdruck über der Flüssigkeitsoberfläche ist. Der Auftrieb \vec{A} ist definiert als die Kraft, die durch den Druck erzeugt wird. Dabei ist zu beachten, dass der Druck der nach außen gerichteten Flächennormalen entgegenwirkt. Mit $F = \partial B$, $F^* = \partial B^*$ und $F_* = \partial(B \setminus B^*)$ ergibt sich aus Folgerung 3.9

$$\begin{aligned} \vec{A} &= - \iint_F p(x) d\vec{F} = - \iint_{F^*} p(x) d\vec{F}^* - \iint_{F_*} p(x) d\vec{F}_* \\ &= - \iiint_{B^*} \nabla p(x) dx - \iiint_{B \setminus B^*} \nabla p(x) dx = - \iiint_{B^*} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix} dx = \rho |B^*| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Das ist genau das Archimedes'sche Auftriebsgesetz: Die Auftriebskraft ist dem Betrag nach gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

Folgerung 3.11 Es sei $v : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ durch die stückweise glatte und geschlossene Jordankurve $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ berandet werde. Wir definieren

$$B = \overline{D} \times [0, 1] = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \overline{D}, 0 \leq x_3 \leq 1\}$$

und

$$v^0 : B \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \begin{bmatrix} v_1(x_1, x_2) \\ v_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit $F^0 = \partial B$ und $F = \Gamma \times [0, 1]$ erhalten wir aus Satz 3.8

$$\iint_D \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v}^0(x) d(x_1, x_2, x_3) = \iint_{F^0} \vec{v}^0 d\vec{F}^0 = \iint_F \vec{v}^0 d\vec{F},$$

wobei F die Parameterdarstellung

$$f(t, z) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ z \end{bmatrix}, \quad a \leq t \leq b, 0 \leq z \leq 1,$$

mit der nach außen gerichteten Flächennormalen

$$\vec{n}(t, z) = \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

gestattet. Also gilt $d\vec{F} = \vec{n}(t, z) d(t, z)$ und

$$\iint_F \vec{v}^0 d\vec{F} = \int_0^1 \int_a^b (\vec{v}^0(\gamma_1(t), \gamma_2(t), z), \vec{n}(t, z)) dt dz = \int_a^b [v_1(\gamma(t))\gamma'_2(t) - v_2(\gamma(t))\gamma'_1(t)] dt,$$

so dass

$$\iint_D \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) = \int_\Gamma (v_1 dx_2 - v_2 dx_1).$$

Das ist der Gauß'sche Integralsatz in der Ebene (vgl. Satz 2.22).

Unter der **Zirkulation** eines Vektorfeldes $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ längs einer geschlossenen rektifizierbaren Jordankurve $\Gamma = \Gamma_\gamma \subset \Omega$ verstehen wir das Wegintegral zweiter Art

$$\int_\gamma v(x) dx.$$

Definition 3.12 Ein Flächenstück $F = \{f(u) : u \in \overline{D}\} \subset \mathbb{R}^3$ nennt man **einfach**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. D ist offen, nichtleer und einfach zusammenhängend mit stückweise glattem Rand.
2. Der Rand von D ist positiv orientiert, d.h. D liegt links von ∂D .

3. Die Abbildung $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist injektiv und zweimal stetig differenzierbar, und es gilt $\text{Rang } f'(u) = 2$ für alle $u \in \overline{D}$.

(f) Es seien $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $F \subset \Omega$ ein einfaches Flächenstück mit dem Rand ∂F , $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen. Die mittlere Wirbelstärke von v bzgl. F ist dann gleich

$$\frac{1}{|F|} \int_{\partial F} v(x) dx$$

und die **Wirbelstärke** im Punkt $x^0 \in \Omega$ bzgl. der Richtung \vec{n} gleich

$$W_{\vec{n}}(x^0) = \lim_{d(F) \rightarrow 0, x^0 \in F} \frac{1}{|F|} \int_{\partial F} v(x) dx,$$

wobei der Grenzwert über ebene Flächenstücke F mit der Normalenrichtung \vec{n} zu nehmen ist. Es sei z.B.

$$\partial F = \{ \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), x_3^0) : a \leq t \leq b \},$$

also $\partial D = \{(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) : a \leq t \leq b\}$. Dann folgt unter Verwendung von Folgerung 3.11

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} v(x) dx &= \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b [v_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)] dt \\ &= \int_{\partial D} [v_1(x) dx_1 + v_2(x) dx_2] = \iint_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2), \end{aligned}$$

also

$$W_{\vec{n}}(x^0) = \frac{\partial v_2(x^0)}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1(x^0)}{\partial x_2} \quad \text{für} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Allgemein gilt $W_{\vec{n}}(x^0) = \langle \text{rot } \vec{v}(x^0), \vec{n} \rangle$ mit

$$\text{rot } \vec{v}(x^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3(x^0)}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2(x^0)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1(x^0)}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3(x^0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2(x^0)}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1(x^0)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \right]_{k=1}^3 \times \vec{v}(x^0) = \nabla \times \vec{v}(x^0).$$

(g) Es seien $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $F = \{f(u) : u \in \overline{D}\} \subset \Omega$ ein einfaches Flächenstück und $\partial D = \{\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) : a \leq t \leq b\}$ stückweise glatt,

so dass $\partial F = \{f(\gamma(t)) : a \leq t \leq b\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial F} v(x) dx &= \int_a^b \langle v(f(\gamma(t))), f'(\gamma(t))\gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b v(f(\gamma(t)))^T \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_1} & \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{bmatrix} dt \\
&= \int_a^b \left[v(f(\gamma(t)))^T \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_1} \gamma'_1(t) + v(f(\gamma(t)))^T \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_2} \gamma'_2(t) \right] dt \\
&= \int_{\partial D} \left[v(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} du_1 + v(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} du_2 \right] \\
&\stackrel{\text{Folg. 3.11}}{=} \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(v(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} \right) - \frac{\partial}{\partial u_2} \left(v(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \right) \right] du \\
&= \iint_D \left[\left(v'(f(u)) \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \right)^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} - \left(v'(f(u)) \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} \right)^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \right] du \\
&= \iint_D \frac{\partial f(u)}{\partial u_2}^T \left[v'(f(u)) - v'(f(u))^T \right] \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} du.
\end{aligned}$$

Für einen konstanten Vektor $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\left[v'(x) - v'(x)^T \right] a = \left[\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial v_j(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j} \right) a_k \right]_{j=1}^3 = \text{rot } \vec{v}(x) \times \vec{a}.$$

Also ist

$$\int_{\partial F} v(x) dx = \iint_D \left(\text{rot } \vec{v}(f(u)), \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_2} \right) du = \iint_F \text{rot } \vec{v} d\vec{F}.$$

Satz 3.13 (Stokes'scher Integralsatz) Sind $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $F \subset \Omega$ ein einfaches Flächenstück, so gilt

$$\int_{\partial F} v(x) dx = \iint_F \text{rot } \vec{v} d\vec{F}.$$

Interpretation: Die Zirkulation entlang einer Kurve ist gleich dem Integral über alle Wirbelstärken auf einem Flächenstück, welches von dieser Kurve berandet wird, also gleich dem Wirbelfluss durch dieses Flächenstück.

Folgerung 3.14 Es seien $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $B \subset \Omega$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand $F = \partial B$, der sich als Vereinigung endlich vieler einfacher Flächenstücke darstellen lässt, die nur Randpunkte gemeinsam haben. Dann gilt

$$\iint_F \text{rot } \vec{v} d\vec{F} = 0,$$

d.h. der Wirbelfluss durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich Null.

Folgerung 3.15 Wir betrachten den ebenen Fall. Seien also $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, $\overline{D} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ und D ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit stückweise glattem Rand ∂D . Dann folgt

$$\int_{\partial D} (v_1 dx_1 + v_2 dx_2) = \int_{\partial D} v(x) dx = \iint_D \operatorname{rot} \vec{v} d\vec{D} = \iint_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2).$$

In der Ebene sind also Stokes'scher und Gaußscher Integralsatz identisch.

3.3 Folgerungen aus den Integralsätzen

- Mit der Bezeichnung $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right]^T$ (**Nabla - Operator**) haben wir für $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla \varphi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right]^T = \operatorname{grad} \varphi$$

(**Gradient** von φ) und für $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\nabla \cdot v = \langle \nabla, v \rangle = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \vec{v}$$

(**Divergenz** von \vec{v}) sowie

$$\nabla \times v = \operatorname{rot} \vec{v}$$

(**Rotation** von \vec{v}).

- Für $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $v, w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\nabla(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\nabla\varphi + \mu\nabla\psi,$$

$$\nabla(\lambda v + \mu w) = \lambda(\nabla v) + \mu(\nabla w),$$

$$\nabla \times (\lambda v + \mu w) = \lambda(\nabla \times v) + \mu(\nabla \times w).$$

- Für $a \in \mathbb{R}^3$ schreiben wir

$$a \cdot \nabla = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

- Ferner ist für $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} =: \Delta \varphi$$

(Δ - **Laplace-Operator**).

- Varianten des **Gauß'schen Integralsatzes** ($F = \partial B$):

1. Satz 3.8: $\iint_F \vec{v} d\vec{F} = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v}(x) dx$

2. Folg. 3.9: $\iint_F \varphi(x) d\vec{F} = \iiint_B \nabla \varphi(x) dx$

3. $\iint_F \vec{v} \times d\vec{F} = - \iiint_B \operatorname{rot} \vec{v} dx$

- Varianten des **Stokes'schen Integralsatzes**:

1. Satz 3.13: $\int_{\partial F} v(x) dx = \iint_F \operatorname{rot} \vec{v} d\vec{F}$

2. $\int_{\partial F} \varphi(x) dx = - \iint_F \nabla \varphi \times d\vec{F}$

3. $\int_{\partial F} \vec{v} \times dx = - \iint_F (d\vec{F} \times \nabla) \times \vec{v}$

- Formeln der **partiellen Integration**: Es seien $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $B \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand $F = \partial B$. Dann gelten die **erste und zweite Green'sche Formel**

$$\iiint_B \varphi \Delta \psi dx = \iint_F \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_e} dF - \iiint_B \langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle dx, \quad (3.2)$$

$$\iint_F \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_e} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_e} \right) dF = \iiint_B (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dx. \quad (3.3)$$

Dabei bezeichnet \vec{n}_e die **normierte** äußere Normale. Aus der ersten Green'schen Formel folgt (für $\varphi \equiv 1$)

$$\iint_F \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_e} dF = \iiint_B \Delta \psi dx. \quad (3.4)$$

3.4 Wirbel- und quellfreie Felder

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar.

- (a) Aus $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = (\nabla \times \nabla, \vec{v}) = 0$ folgt:

Jedes Wirbelfeld ist quellfrei.

- (b) Aus $\operatorname{rot} (\nabla \varphi) = \nabla \times (\nabla \varphi) = \Theta$ folgt:

Jedes Potentialfeld (Gradientenfeld) ist wirbelfrei.

Das ist uns schon aus den Überlegungen in Abschnitt 2.3 bekannt. Mehr noch: Nach Satz 2.20 ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ genau dann ein Gradientenfeld, wenn es wirbelfrei ist.

- (c) Sind also $\operatorname{rot} \vec{v} = \Theta$ und $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ in Ω , so existieren ein Potential $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla \varphi$. Es folgt $0 = \operatorname{div} \vec{v} = \Delta \varphi$ auf Ω . Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **harmonisch**, wenn $\Delta \varphi(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

- (d) Für $y \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir die Funktion $s_y : \mathbb{R}^2 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -\ln|x-y|$. Es folgt $\nabla s_y(x) = -\frac{x-y}{|x-y|^2}$. Im Fall $y \in \mathbb{R}^3$ setzen wir $s_y : \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x-y|}$ und erhalten $\nabla s_y(x) = -\frac{x-y}{|x-y|^3}$, also

$$\nabla s_y(x) = -\frac{x-y}{|x-y|^d}, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{y\}, \quad d = 2, 3.$$

Es folgt

$$\Delta s_y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{y\}.$$

Hinweis: Sind $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ eine von einem rektifizierbaren Jordanweg erzeugte Kurve oder ein Flächenstück, $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) s_y(x) d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$$

(Integration bzgl. y , Kurven- bzw. Flächenintegral erster Art), so ist $\Phi : \mathbb{R}^d \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch.

Im Weiteren seien $B \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand und $\Omega = \text{int}(B)$ sowie $F = \partial B$ der Rand von B (und Ω).

- (e) **Dirichlet-Problem:** Gegeben ist eine stetige Funktion $g : F \rightarrow \mathbb{R}$, gesucht eine in Ω harmonische und auf B stetige Funktion $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = g(x) \forall x \in F$.

Wie viele Lösungen kann dieses Problem haben? Sind $\varphi_1, \varphi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ zwei auf B zweimal stetig differenzierbare (d.h. in einer B umfassenden offenen Menge zweimal stetig differenzierbare) Lösungen, so löst $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ das **homogene** Problem

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi = 0 \quad \text{auf } F.$$

Aus der ersten Green'schen Formel (3.2) folgt dann

$$\iiint_B \langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle dx = 0,$$

also $\nabla \varphi = 0$ auf B . Damit ist φ auf B konstant und somit, wegen $\varphi = 0$ auf F , identisch Null. Es kann also nur eine auf B zweimal stetig differenzierbare Lösung geben.

- (f) **Neumann-Problem:** Gegeben ist eine stetige Funktion $g : F \rightarrow \mathbb{R}$, gesucht eine in Ω harmonische und auf B stetig differenzierbare Funktion $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$, die $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = g$ auf F (genauer: in allen Punkten von F , in denen die äußere Normale \vec{n} wohldefiniert ist) erfüllt. Hier folgt aus der ersten Green'schen Formel (3.2), dass sich zwei auf B zweimal stetig differenzierbare Lösungen dieses Problems nur durch eine additive Konstante unterscheiden können.

- (g) **Gemischtes Randwertproblem:** Gegeben sind die stetigen Funktionen $g, h : F \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h \geq 0$ und $h \not\equiv 0$ auf F , gesucht ist eine in Ω harmonische und auf B stetig differenzierbare Funktion $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$, die der Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} + h\varphi = g$ auf F genügt. Für die Differenz $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ zweier zweimal auf B stetig differenzierbarer Lösungen folgt aus der ersten Green'schen Formel (3.2)

$$\iiint_B |\nabla \varphi|^2 dx = \iint_F \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} dF = - \iint_F h \varphi^2 dF \leq 0.$$

Hieraus ergibt sich wieder $\nabla \varphi \equiv 0$ und somit $\varphi \equiv c_0 = \text{const}$ auf B . Also ist $h c_0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = 0$, d.h. $c_0 = 0$. Es gibt somit höchstens eine auf B zweimal stetig differenzierbare Lösung.

- (h) **Poisson-Problem:** Gegeben sind die stetigen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : F \rightarrow \mathbb{R}$, gesucht ist eine auf Ω zweimal stetig differenzierbare und auf B stetige Funktion $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$, die

$$\Delta\varphi = f \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi = g \quad \text{auf } F$$

genügt. Dieses Problem kann in zwei Teilprobleme zerlegt werden: Man sucht $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ mit

$$\Delta\varphi_1 = f \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{auf } F$$

und

$$\Delta\varphi_2 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi_2 = g \quad \text{auf } F.$$

- (i) Sind $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung des Problems

$$\Delta\varphi = f \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi = 0 \quad \text{auf } F$$

und $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $\psi = 0$ auf F , so folgt aus der ersten Green'schen Formel (3.2) (man vertausche die Rollen von φ und ψ)

$$-\iiint_B \langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle dx = \iiint_B \psi f dx.$$

Diese Tatsache kann für einen schwächeren Lösungsbegriff verwendet werden, indem man $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi = 0$ auf F eine schwache Lösung nennt, wenn die letzte Gleichung für alle Funktionen $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ aus einem geeigneten Funktionenraum gilt. Auch für homogene Neumann-Randbedingungen, d.h. für das Problem

$$\Delta\varphi = f \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} = 0 \quad \text{auf } F,$$

kann man dies aufschreiben, wobei hier keine Randbedingungen an ψ zu stellen sind.

- (j) Ein Vektorfeld $\vec{w} = \text{rot } \vec{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ nennt man also ein **Wirbelfeld** (vgl. Punkt (a)) und \vec{v} ein dazugehöriges **Vektorpotential**. Aus (a) folgt, dass die Bedingung $\text{div } \vec{w} = 0$ in Ω notwendig dafür ist, dass \vec{w} ein Wirbelfeld ist. Seien nun diese Bedingung erfüllt, $x^0 \in \Omega$ und Ω sternförmig bzgl. x^0 sowie

$$\vec{v}(x) = \int_0^1 [\vec{w}(x^0 + t(x - x^0)) \times (x - x^0)] dt, \quad x \in \Omega.$$

Unter Verwendung der Formel

$$\text{rot} [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{a} \text{ div } \vec{b} - \vec{b} \text{ div } \vec{a} + \vec{a}'\vec{b} - \vec{b}'\vec{a}$$

kann man zeigen, dass dann $\text{rot } \vec{v} = \vec{w}$ in Ω gilt.

- (k) Sind $\vec{w} = \text{rot } \vec{v}$ ein Wirbelfeld und $\nabla\varphi$ ein Gradientenfeld, so folgt aus (b)

$$\vec{w} = \text{rot} (\vec{v} + \nabla\varphi),$$

d.h., auch $\vec{v} + \nabla\varphi$ ist ein Vektorpotential für \vec{w} . Umgekehrt folgt aus $\vec{w} = \text{rot } \vec{v} = \text{rot } \vec{u}$, also aus $\text{rot} (\vec{v} - \vec{u}) = \Theta$, nach Satz 2.20, falls Ω einfach zusammenhängend ist, $\vec{v} - \vec{u} = \nabla\varphi$.

- (l) Wir suchen zu einem quellfreien Wirbelfeld $\vec{w} = \text{rot } \vec{v}$ ein quellfreies Vektorpotential, also nach (k) ein Skalarfeld φ , so dass $\text{div} (\vec{v} + \nabla\varphi) = 0$ gilt. Man erhält also die Gleichung

$$\Delta\varphi = -\text{div } \vec{v}.$$

- (m) Es seien $\vec{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein gegebenes Vektorfeld und die Gleichung $\Delta\varphi = \operatorname{div} \vec{v}$ auf dem sternförmigen Gebiet Ω lösbar. Es folgt $\operatorname{div}(\vec{v} - \nabla\varphi) = 0$. Nach (j) existiert also ein Vektorfeld $\vec{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v} - \nabla\varphi = \operatorname{rot} \vec{w}$. Also ist $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w} + \nabla\varphi$ als Summe eines quelfreien und eines wirbelfreien Vektorfeldes darstellbar.

Wir wenden jetzt die zweite Greensche Formel (3.3) auf die Funktion $\varphi(x) = s_y(x) = \frac{1}{|x-y|}$ ($d=3$), $y \in \operatorname{int}(B)$ und $B_\varepsilon = B \setminus U_\varepsilon(y)$, $F_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$ an, um eine Darstellungsformel für harmonische Funktionen zu gewinnen.

- Zuvor einige Betrachtungen zu Integralen mit Singularitäten: Es seien $B \subset \mathbb{R}^m$ Jordan-messbar und $f : B \setminus \{x^0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Für jede Jordan-messbare Umgebung U von x^0 (d.h., für jede Jordan-messbare Menge $U \subset \mathbb{R}^3$, für die x^0 innerer Punkt ist) existiere das Integral $\int_{B \setminus U} f(x) dx$. Wir sagen, dass das **uneigentliche Integral**

$$\int_B f(x) dx \quad (3.5)$$

existiert, falls für eine beliebige Folge $(U_n)_{n=1}^\infty$ von Umgebungen von x^0 , die sich für $n \rightarrow \infty$ auf x^0 zusammenziehen (d.h., es existieren $\varepsilon_n > 0$ mit $U_n \subset U_{\varepsilon_n}(x^0)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$), der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B \setminus U_n} f(x) dx$$

existiert. Dieser Grenzwert ist dann unabhängig von der Wahl der Folge $(U_n)_{n=1}^\infty$ und definiert den Wert des Integrals (3.5).

Beispiel 3.16 Es seien $R > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $m = 2$ oder $m = 3$. Das Integral $\int_{K_R(\Theta)} |x|^{-\lambda} dx$ mit $K_R(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x^0| \leq R\}$ existiert genau dann als uneigentliches Integral, wenn $\lambda < m$ gilt.

Folgerung 3.17 Es seien $B \subset \mathbb{R}^m$ Jordan-messbar und $f : B \setminus \{x^0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Für ein $R > 0$ gelte $K_R(x^0) \subset B$ und

$$|f(x)| \leq \frac{c}{|x - x^0|^\lambda}, \quad x \in K_R(x^0) \setminus \{x^0\},$$

mit Konstanten $c > 0$ und $\lambda < m \in \{2, 3\}$. Ferner sei f auf $\overline{B \setminus U}$ für jede Jordan-messbare Umgebung U von x^0 integrierbar. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_B f(x) dx$.

- Man erhält für eine auf dem Bereich B mit stückweise glattem Rand F zweimal stetig differenzierbare Funktion $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ die Formel

$$\psi(y) = \frac{1}{4\pi} \iint_F \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial\psi(x)}{\partial\vec{n}} dF_x + \frac{1}{4\pi} \iint_F \psi(x) \frac{x-y}{|x-y|^3} \cdot \vec{n}(x) dF_x - \frac{1}{4\pi} \iiint_B \frac{\Delta\psi(x)}{|x-y|} dx,$$

$y \in \operatorname{int}(B) =: \Omega$, wobei das letzte Integral im uneigentlichen Sinne existiert. Ist ψ **harmonisch** in Ω , so ergibt sich die **Darstellungsformel**

$$\psi(y) = \frac{1}{4\pi} \iint_F \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial\psi(x)}{\partial\vec{n}} dF_x + \frac{1}{4\pi} \iint_F \psi(x) \frac{x-y}{|x-y|^3} \cdot \vec{n}(x) dF_x, \quad y \in \Omega. \quad (3.6)$$

- Sei $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge Ω harmonisch. Wendet man die Darstellungsformel (3.6) auf $B = K_r(y) \subset \Omega$ und $F = F_r = \partial K_r(y)$ an, so erhält man die **Mittelwerteigenschaft** harmonischer Funktionen

$$\psi(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{F_r} \psi dF_r.$$

Aus der Mittelwerteigenschaft erhält man das Maximumprinzip.

Satz 3.18 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen) *Ist $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ harmonisch und nicht konstant, so kann ψ in Ω kein Maximum besitzen.*

3.5 Felder in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

Definition 3.19 *Unter einer orthogonalen Koordinatentransformation verstehen wir eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$T : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad u \mapsto x = T(u), \quad D \subset \mathbb{R}^3,$$

mit $\det T'(u) > 0 \forall u \in D$ und

$$\left\langle \frac{\partial T(u)}{\partial u_k}, \frac{\partial T(u)}{\partial u_j} \right\rangle = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, j \neq k, u \in D.$$

Für jedes $u^0 \in \text{int}(D)$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass die Wege $\gamma^k : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma^1(t) = T(u_1^0 + t, u_2^0, u_3^0)$, $\gamma^2(t) = T(u_1^0, u_2^0 + t, u_3^0)$ und $\gamma^3(t) = T(u_1^0, u_2^0, u_3^0 + t)$ wohldefiniert sind. Die zugehörigen, maximal fortgesetzten Kurven Γ^k nennen wir **Koordinatenlinien** durch den Punkt $x^0 = T(u^0)$. Wegen $(\gamma^k)'(0) = \frac{\partial T(u^0)}{\partial u_k}$ schneiden sich diese Kurven in x^0 paarweise rechtwinklig. Die Vektoren

$$\tilde{e}_k(u) = \frac{1}{g_k(u)} \frac{\partial T(u)}{\partial u_k} \quad \text{mit} \quad g_k(u) = \left| \frac{\partial T(u)}{\partial u_k} \right|$$

bilden wegen

$$\langle \tilde{e}_k(u), \tilde{e}_j(u) \rangle = \delta_{jk} \quad \text{und} \quad \det [\tilde{e}_1(u) | \tilde{e}_2(u) | \tilde{e}_3(u)] = \frac{1}{g_1(u)g_2(u)g_3(u)} \det T'(u) = 1$$

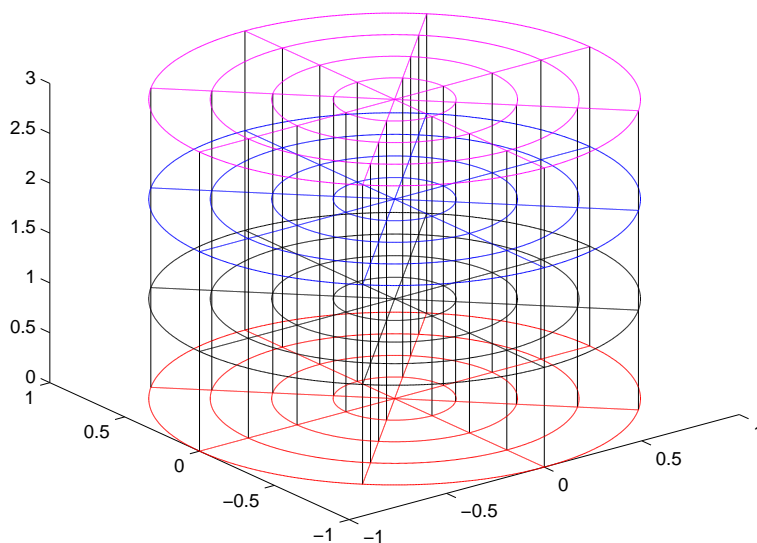
ein orthogonales Rechtssystem, das sogenannte **Rechtsdreibein** entlang der Koordinatenlinien.

Beispiel 3.20 (Zylinderkoordinaten) *Die Transformation $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit*

$$T(u) = \begin{bmatrix} u_1 \cos u_2 \\ u_1 \sin u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$$

ist eine orthogonale Koordinatentransformation, wobei $T'(u) = u_1$, $g_1(u) = 1$, $g_2(u) = u_1$, $g_3(u) = 1$ und

$$\tilde{e}_1(u) = \begin{bmatrix} \cos u_2 \\ \sin u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_2(u) = \begin{bmatrix} -\sin u_2 \\ \cos u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_3(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Zylinderkoordinaten: Koordinatenlinien

Beispiel 3.21 (Kugelkoordinaten) Die Transformation $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

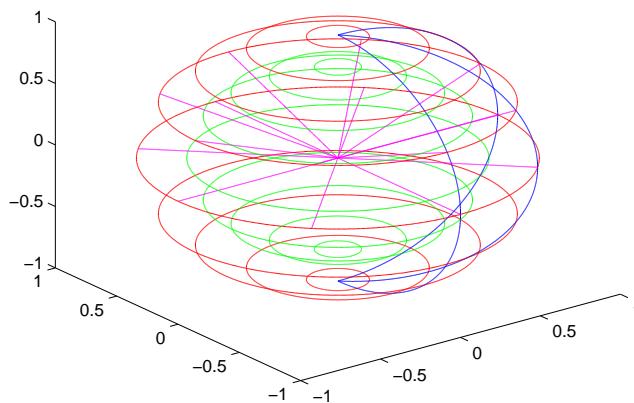
$$T(u) = \begin{bmatrix} u_1 \cos u_2 \cos u_3 \\ u_1 \sin u_2 \cos u_3 \\ u_3 \sin u_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ist eine orthogonale Koordinatentransformation, wobei $T'(u) = u_1^2 \cos u_3$ und

$$g_1(u) = 1, \quad g_2(u) = u_1 \cos u_3, \quad g_3(u) = u_1$$

sowie

$$\tilde{e}_1(u) = \begin{bmatrix} \cos u_2 \cos u_3 \\ \sin u_2 \cos u_3 \\ \sin u_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_2(u) = \begin{bmatrix} -\sin u_2 \\ \cos u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_3(u) = \begin{bmatrix} -\cos u_2 \sin u_3 \\ \sin u_2 \sin u_3 \\ \cos u_3 \end{bmatrix}.$$



Kugelkoordinaten: Koordinatenlinien

Beispiel 3.22 (Toruskordinaten) Für $a > 0$ ist die Transformation $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

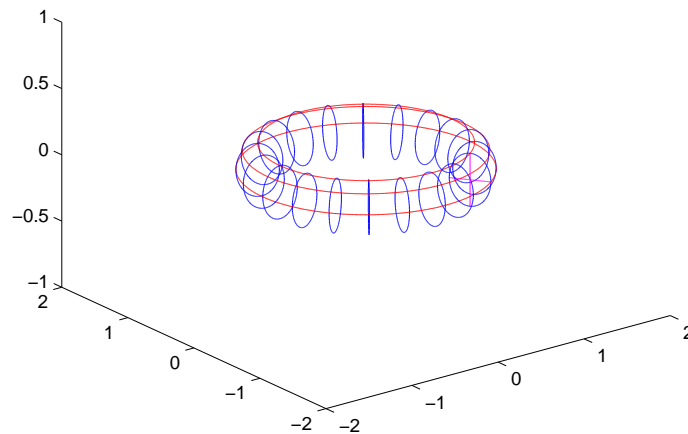
$$T(u) = \begin{bmatrix} (a + u_1 \cos u_3) \cos u_2 \\ (a + u_1 \cos u_3) \sin u_2 \\ u_1 \sin u_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = (0, a) \times [0, 2\pi]^2$$

eine orthogonale Koordinatentransformation, wobei $T'(u) = u_1(a + u_1 \cos u_3)$,

$$g_1(u) = 1, \quad g_2(u) = a + u_1 \cos u_3, \quad g_3(u) = u_1$$

und

$$\tilde{e}_1(u) = \begin{bmatrix} \cos u_2 \cos u_3 \\ \sin u_2 \cos u_3 \\ \sin u_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_2(u) = \begin{bmatrix} -\sin u_2 \\ \cos u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_3(u) = \begin{bmatrix} -\cos u_2 \sin u_3 \\ \sin u_2 \sin u_3 \\ \cos u_3 \end{bmatrix}.$$



Toruskordinaten: Koordinatenlinien

Sind $v : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein gegebenes Vektorfeld und $T : D \rightarrow G$ eine orthogonale Koordinatentransformation sowie $\tilde{v}(u) = v(T(u))$, so folgt

$$\tilde{v}(u) = \sum_{j=1}^3 \tilde{v}_j(u) \tilde{e}_j(u),$$

wobei $\tilde{v}_j(u) = \langle \tilde{v}(u), \tilde{e}_j(u) \rangle$ die Koordinaten von v entlang der Koordinatenlinien bezeichnen. Wir erhalten

$$\frac{\partial \tilde{v}(u)}{\partial u_k} = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial \tilde{v}_j(u)}{\partial u_k} \tilde{e}_j(u) + \tilde{v}_j(u) \frac{\partial \tilde{e}_j(u)}{\partial u_k} \right], \quad k = 1, 2, 3.$$

Beispiel 3.23 Auf $v(x) = (x_3^2, 0, 0)$ wenden wir $T(u)$ aus Beispiel 3.20 an. Es folgt $\tilde{v}(u) = (u_3^2, 0, 0)$ und $\tilde{v}_1(u) = u_3^2 \cos u_2$, $\tilde{v}_2(u) = -u_3^2 \sin u_2$ sowie $\tilde{v}_3(u) = 0$.

Man **beachte** für das Weitere, dass die Differentialoperatoren grad , div , rot und Δ sich stets auf die x -Koordinaten beziehen.

Es seien nun $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ ein gegebenes Skalarfeld, $T : D \rightarrow G$ eine orthogonale Koordinatentransformation und $\tilde{\psi}(u) = \psi(T(u))$. Es folgt

$$\text{grad } \tilde{\psi}(u) = \sum_{j=1}^3 \langle \text{grad } \psi(T(u)), \tilde{e}_j(u) \rangle \tilde{e}_j(u)$$

mit

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } \psi(T(u)), \tilde{e}_j(u) \rangle &= \frac{1}{g_j(u)} \left\langle \text{grad } \psi(T(u)), \frac{\partial T(u)}{\partial u_j} \right\rangle \\ &= \frac{1}{g_j(u)} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi(T(u))}{\partial x_k} \frac{\partial T_k(u)}{\partial u_j} = \frac{1}{g_j(u)} \frac{\partial \tilde{\psi}(u)}{\partial u_j}, \end{aligned}$$

also

$$\text{grad } \tilde{\psi}(u) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{g_j(u)} \frac{\partial \tilde{\psi}(u)}{\partial u_j} \tilde{e}_j(u). \quad (3.7)$$

Beispiel 3.24 (Gradient in Zylinderkoordinaten) Für die Zylinderkoordinaten aus Beispiel 3.20 ergibt sich aus (3.7) die Formel

$$\text{grad } \tilde{\psi}(u) = \frac{\partial \tilde{\psi}(u)}{\partial u_1} \tilde{e}_1(u) + \frac{1}{u_1} \frac{\partial \tilde{\psi}(u)}{\partial u_2} \tilde{e}_2(u) + \frac{\partial \tilde{\psi}(u)}{\partial u_3} \tilde{e}_3(u)$$

bzw. mit $u = (r, \varphi, z)$ kurz

$$\text{grad } \tilde{\psi} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \tilde{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varphi} \tilde{e}_\varphi + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \tilde{e}_z.$$

Für $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ folgt aus

$$\frac{\partial[\psi(x)v_k(x)]}{\partial x_k} = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_k} v_k(x) + \psi(x) \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_k}$$

die Formel

$$\text{div}(\psi \vec{v}) = (\text{grad } \psi, \vec{v}) + \psi \text{div } \vec{v}. \quad (3.8)$$

Unter der Voraussetzung₂ dass $T : D \rightarrow G$ bijektiv ist, wenden wir die Formel (3.7) auf $\psi(x) = [T^{-1}(x)]_k$, d.h. $\tilde{\psi}(u) = \psi(T(u)) = u_k$, an und erhalten

$$\text{grad } u_k = \frac{1}{g_k(u)} \tilde{e}_k(u) \quad (3.9)$$

und somit

$$\tilde{e}_1(u) = \tilde{e}_2(u) \times \tilde{e}_3(u) = g_2(u)g_3(u)[\text{grad } u_2 \times \text{grad } u_3].$$

Es folgt aus (3.8) und $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b}, \text{rot } \vec{a}) - (\vec{a}, \text{rot } \vec{b})$

$$\begin{aligned} \text{div}(\tilde{v}_1 \tilde{e}_1) &= \text{div}[g_2 g_3 \tilde{v}_1 (\text{grad } u_2 \times \text{grad } u_3)] \\ &= g_2 g_3 \tilde{v}_1 \text{div}(\text{grad } u_2 \times \text{grad } u_3) + \langle \text{grad}(g_2 g_3 \tilde{v}_1), \text{grad } u_2 \times \text{grad } u_3 \rangle \\ &= \frac{1}{g_2 g_3} \langle \text{grad}(g_2 g_3 \tilde{v}_1), \tilde{e}_1 \rangle \stackrel{(3.7)}{=} \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial(g_2 g_3 \tilde{v}_1)}{\partial u_1} \end{aligned}$$

und analog

$$\operatorname{div}(\tilde{v}_2 \tilde{e}_2) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial(g_1 g_3 \tilde{v}_2)}{\partial u_2}, \quad \operatorname{div}(\tilde{v}_3 \tilde{e}_3) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial(g_1 g_2 \tilde{v}_3)}{\partial u_3}.$$

Wir schlussfolgern aus $\operatorname{div} \tilde{v} = \operatorname{div} \sum_{j=1}^3 \tilde{v}_j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^3 \operatorname{div}(\tilde{v}_j \tilde{e}_j)$ die Formel

$$\operatorname{div} \tilde{v} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial(g_2 g_3 \tilde{v}_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(g_1 g_3 \tilde{v}_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(g_1 g_2 \tilde{v}_3)}{\partial u_3} \right]. \quad (3.10)$$

Beispiel 3.25 (Divergenz in Zylinderkoordinaten) Formel (3.10) liefert für die Koordinatentransformation aus Beispiel 3.20

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{v} &= \frac{1}{u_1} \left[\frac{\partial(u_1 \tilde{v}_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial u_2} + \frac{\partial(u_1 \tilde{v}_3)}{\partial u_3} \right] \\ &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial(u_1 \tilde{v}_1)}{\partial u_1} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial u_2} + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial u_3} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \tilde{v}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Formeln (3.9), $\operatorname{rot}(\psi \vec{w}) = \psi \operatorname{rot} \vec{w} + (\operatorname{grad} \psi) \times \vec{w}$ und (3.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \tilde{v} &= \operatorname{rot} \sum_{j=1}^3 \tilde{v}_j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^3 \operatorname{rot}(\tilde{v}_j \tilde{e}_j) = \sum_{j=1}^3 \operatorname{rot}(\tilde{v}_j g_j \operatorname{grad} u_j) \\ &= \sum_{j=1}^3 [\tilde{v}_j g_j \operatorname{rot} \operatorname{grad} u_j + (\operatorname{grad}(\tilde{v}_j g_j)) \times (\operatorname{grad} u_j)] \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{g_k} \frac{\partial(\tilde{v}_j g_j)}{\partial u_k} \tilde{e}_k \right) \times \left(\frac{1}{g_j} \tilde{e}_j \right) \\ &= \frac{1}{g_1 g_2} \frac{\partial(\tilde{v}_2 g_2)}{\partial u_1} \tilde{e}_3 - \frac{1}{g_1 g_3} \frac{\partial(\tilde{v}_3 g_3)}{\partial u_1} \tilde{e}_2 \\ &\quad - \frac{1}{g_2 g_1} \frac{\partial(\tilde{v}_1 g_1)}{\partial u_2} \tilde{e}_3 + \frac{1}{g_2 g_3} \frac{\partial(\tilde{v}_3 g_3)}{\partial u_2} \tilde{e}_1 \\ &\quad + \frac{1}{g_3 g_1} \frac{\partial(\tilde{v}_1 g_1)}{\partial u_3} \tilde{e}_2 - \frac{1}{g_3 g_2} \frac{\partial(\tilde{v}_2 g_2)}{\partial u_3} \tilde{e}_1, \end{aligned}$$

so dass

$$\operatorname{rot} \tilde{v} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \det \begin{bmatrix} g_1 \tilde{e}_1 & g_2 \tilde{e}_2 & g_3 \tilde{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_1 \tilde{v}_1 & g_2 \tilde{v}_2 & g_3 \tilde{v}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Wiederum unter Berücksichtigung von (3.7) ergibt sich

$$\Delta \tilde{\psi} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{div} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{g_j} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_j} \tilde{e}_j =: \operatorname{div} \vec{w}$$

mit $\tilde{w}_j = \frac{1}{g_j} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_j}$, $j = 1, 2, 3$. Aus (3.10) folgt somit

$$\Delta \tilde{\psi} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{g_1 g_2 g_3}{g_j^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_j} \right). \quad (3.12)$$

Beispiel 3.26 (Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten) Mit der Koordinatentransformation aus Beispiel 3.20 nimmt Formel (3.12) die Form

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\psi} &= \frac{1}{u_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(u_1 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{u_1} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(u_1 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

an.

Beispiel 3.27 (Laplace-Operator in Kugelkoordinaten) Für die Koordinatentransformation aus Beispiel 3.21 liefert die Formel (3.12)

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\psi} &= \frac{1}{u_1^2 \cos u_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(u_1^2 \cos u_3 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{\cos u_3} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\cos u_3 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \vartheta} \right). \end{aligned}$$

3.6 Zur Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten ein kleines Volumenelement ΔB und eine kleine Zeitspanne $\Delta t > 0$. Mit $u(x, t)$ bezeichnen wir die Temperatur am Ort $x \in \mathbb{R}^3$ zum Zeitpunkt t . Die Änderung Δu der Temperatur in ΔB während des Zeitintervalls $[t_0, t_0 + \Delta t]$ ist ungefähr gleich $\frac{\partial u(x^0, t_0)}{\partial t} \Delta t$ mit einem $x^0 \in \Delta B$. Da die spezifische Wärmekapazität c angibt, welche Wärmemenge Q einem Kilogramm des betreffenden Materials zugeführt werden muss, um seine Temperatur um ein Kelvin zu erhöhen, gilt in unserem Fall

$$\Delta Q(\Delta B) \approx c \rho \frac{\partial u(x^0, t_0)}{\partial t} \Delta t |\Delta B|,$$

wobei ρ die Dichte des (homogenen) Materials sei. Zerlegen wir also einen Bereich B mit stückweise glattem Rand in Teilbereiche und verfeinern die Zerlegung, so erhalten wir in der Grenze

$$\Delta Q(B) = c \rho \iiint_B \frac{\partial u(x, t_0)}{\partial t} dx \Delta t.$$

Setzen wir voraus, dass B keine inneren Wärmequellen und -senken hat, so muss diese Wärmemenge $\Delta Q(B)$ dem Körper B über die Oberfläche $F = \partial B$ zugeführt bzw. entzogen werden. Also gilt

$$\Delta Q(B) = \iint_F \lambda \operatorname{grad} u(\cdot, t_0) d\vec{F} \Delta t$$

(Wärmefluss durch die Oberfläche F), wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Materials angibt. Mit dem Gauß'schen Integralsatz folgt

$$\Delta Q(B) = \iiint_B \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) \, dx \, \Delta t = \lambda \iiint_B \Delta u(x, t_0) \, dx \, \Delta t,$$

wobei wir wiederum homogenes Material voraussetzen (λ hängt nicht von x ab). Somit ist

$$\iiint_B \left[\frac{\partial u(x, t_0)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x, t_0) \right] dx = 0. \quad (3.13)$$

wobei $a^2 = \frac{\lambda}{c \rho}$ die Temperaturleitfähigkeit des betrachteten Materials ist. Da die Gleichung (3.13) auch für jeden Teilbereich $B_0 \subset B$ gilt, folgt die Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0. \quad (3.14)$$

Wärmeleitung in einem endlichen Stab. Als Beispiel betrachten wir die (eindimensionale) Wärmeleitung in einem Stab der Länge ℓ , d.h., das Problem (3.13) für $(x, t) \in (0, \ell) \times (0, \infty)$ mit entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \quad (3.15)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.16)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (3.17)$$

Wir suchen eine stetige Funktion $u : [0, \ell] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die die Differentialgleichung (3.15), die Randbedingungen (3.16) und die Anfangsbedingung (3.17) erfüllt. Ein Separationsansatz $u(x, t) = v(x)w(t)$ für die Lösung führt auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$v''(x) + \mu v(x) = 0 \quad \text{und} \quad w''(t) + \mu a^2 w(t) = 0$$

mit den Randbedingungen $v(0) = v(\ell) = 0$ und einem unbekanntem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$. Nur für $\mu = \mu_n^2$, $n = 1, 2, \dots$, mit $\mu_n = \frac{\pi n}{\ell}$ existieren nichttriviale Lösungen $v_n(x) = \sin(\mu_n x)$ und $w_n(t) = e^{-a^2 \mu_n^2 t}$. Die Lösung des Problems (3.15), (3.16), (3.17) suchen wir nun in der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-a^2 \mu_n^2 t} \sin(\mu_n x). \quad (3.18)$$

Die Anfangsbedingung (3.17) liefert

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin(\mu_n x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3.19)$$

so dass, unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ integrierbar ist,

$$\gamma_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

- Kann man in (3.18) gliedweise differenzieren, was garantiert, dass $u(x, t)$ die Differentialgleichung (3.15) erfüllt?

Ist $f : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Riemann-integrierbare Funktion, so konvergieren die gliedweise differenzierten Reihen

$$-a^2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_n \mu_n^2 e^{-a^2 \mu_n^2 t} \sin(\mu_n x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \mu_n e^{-a^2 \mu_n^2 t} \cos(\mu_n x), \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \mu_n^2 e^{-a^2 \mu_n^2 t} \sin(\mu_n x)$$

gleichmäßig auf $[0, \ell] \times [t_0, \infty)$ für jedes $t_0 > 0$. Das impliziert, dass $u(x, t)$ aus (3.18) die Differentialgleichung (3.15) erfüllt.

- Gilt $\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x)$ für $u(x, t)$ aus (3.18)?

Wir setzen voraus, dass $f : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, eine beschränkte Riemann-integrierbare zweite Ableitung besitzt und $f(0) = f(\ell) = 0$ erfüllt. Dann gilt

$$\gamma_n = \frac{2\ell}{\pi^2 n} \int_0^\ell f'(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) dx = -\frac{2\ell^2}{\pi^3 n^2} \int_0^\ell f''(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) dx,$$

also $|\gamma_n| \leq c_0 n^{-2}$, $n \in \mathbb{N}$, mit einer Konstanten $c_0 \in (0, \infty)$. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so existieren ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c_0 \sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $\delta > 0$ mit $c_0 \sum_{n=1}^{n_0} (1 - e^{-a^2 \mu_n^2 t}) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $t \in (0, \delta)$. Es folgt für $(x, t) \in [0, \ell] \times (0, \delta)$

$$|u(x, t) - f(x)| \leq c_0 \sum_{n=1}^{n_0} (1 - e^{-a^2 \mu_n^2 t}) + c_0 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

3.7 Zum Beweis des Gauß'schen Integralsatzes

Wir verwenden folgende Formeln bzw. Aussagen:

$$(a) \quad \left(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \right) = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det [a \mid b \mid c]$$

$$(b) \quad \det [a \mid b \mid c] = \det (A^{-1} [Aa \mid Ab \mid Ac]) = (\det A^{-1}) (\det [Aa \mid Ab \mid Ac]) \\ = \det [(\det A^{-1}) Aa \mid Ab \mid Ac] = \det \left[\frac{1}{\det A} Aa \mid Ab \mid Ac \right]$$

$$(c) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} [\Delta_{kj}]_{j,k=1}^n,$$

wobei $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\Delta_{jk} = (-1)^{j+k} \det A_{jk}$, und A_{jk} entsteht aus A durch Streichen der j -ten Zeile und k -ten Spalte

$$(d) \quad \text{Für } A(t) = [a_{jk}(t)]_{j,k=1}^3 \text{ gilt}$$

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \det [a'_1(t) \mid a_2(t) \mid a_3(t)] \\ + \det [a_1(t) \mid a'_2(t) \mid a_3(t)] \\ + \det [a_1(t) \mid a_2(t) \mid a'_3(t)].$$

- (e) Wir schreiben $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in der Form $A = [a_1 \mid \cdots \mid a_n]$ mit $a_k \in \mathbb{C}^n$. Ist $\varphi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Funktional mit den Eigenschaften

- (e1) $\varphi([a_1 | \cdots | a_{k-1} | a_k + \lambda b_k | a_{k+1} | \cdots | a_n])$
 $= \varphi([a_1 | \cdots | a_n]) + \lambda \varphi([a_1 | \cdots | a_{k-1} | b_k | a_{k+1} | \cdots | a_n])$
für $b_k \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
- (e2) $\varphi([\cdots | a_{k+1} | a_k | \cdots]) = -\varphi([a_1 | \cdots | a_n])$,
- (e3) $\varphi(I) = 1$,

so gilt $\varphi(A) = \det A$ für alle $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- (f) Es seien $A = [a_1 | \cdots | a_n]$, $B = [b_{jk}]_{j,k=1}^n = [b_1 | \cdots | b_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und vorerst $\beta := \sum_{j=1}^n b_{jj} \neq 0$. Wir definieren

$$\varphi(A) = \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n \det [a_1 | \cdots | a_{k-1} | Ba_k | a_{k+1} | \cdots | a_n].$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \varphi([a_1 | \cdots | a_{m-1} | a_m + \lambda c_m | a_{m+1} | \cdots | a_n]) \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{k=1, k \neq m}^n (\det [a_1 | \cdots | a_{k-1} | Ba_k | a_{k+1} | \cdots | a_n]) \\ & \quad + \lambda \det [a_1 | \cdots | c_m | \cdots | Ba_m | \cdots | a_n]) \\ & \quad + \frac{1}{\beta} (\det [a_1 | \cdots | a_{m-1} | Ba_m | a_{m+1} | \cdots | a_n]) \\ & \quad + \lambda \det [a_1 | \cdots | a_{m-1} | Bc_m | a_{m+1} | \cdots | a_n]) \\ &= \varphi(A) + \lambda \varphi([a_1 | \cdots | a_{m-1} | c_m | a_{m+1} | \cdots | a_n]), \end{aligned}$$

so dass (e1) erfüllt ist. Ebenso gilt (e2) und wegen

$$\varphi(I) = \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n \det [e_1 | \cdots | e_{k-1} | b_k | e_{k+1} | \cdots | e_n] = \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n b_{kk} = 1$$

auch (e3), und wir erhalten aus (e)

$$\sum_{k=1}^n \det [a_1 | \cdots | a_{k-1} | Ba_k | a_{k+1} | \cdots | a_n] = (\det A) \sum_{j=1}^n b_{jj}.$$

Durch Grenzübergang zeigt man, dass diese Formel auch im Fall $\sum_{j=1}^n b_{jj} = 0$ gilt.

- Es seien $f: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $F = f(K) \subset \Omega_1$, $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$ offen, $S: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ ein Diffeomorphismus (d.h., bijektiv, und S, S^{-1} sind stetig differenzierbar), $v: F \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld und $G := S(F)$, d.h., $G = g(K)$ mit $g = S \circ f$. Es folgt

$$\begin{aligned} \iint_F \vec{v} \, d\vec{F} &= \iint_K \left(\vec{v}(f(u)), \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_2} \right) du \\ &\stackrel{(a)}{=} \iint_K \det \left[v(f(u)) \left| \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \right| \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} \right] du. \end{aligned}$$

- Nun gilt $g'(u) = S'(f(u))f'(u)$, d.h. $\frac{\partial g(u)}{\partial u_k} = S'(f(u))\frac{\partial f(u)}{\partial u_k}$, und somit

$$\begin{aligned} \iint_F \vec{v} \, d\vec{F} &= \iint_K \det \left([S'(f(u))]^{-1} \left[S'(f(u))v(f(u)) \left| \frac{\partial g(u)}{\partial u_1} \right| \frac{\partial g(u)}{\partial u_2} \right] \right) du \\ &\stackrel{(b)}{=} \iint_K \det \left[\frac{1}{\det S'(f(u))} S'(f(u))v(f(u)) \left| \frac{\partial g(u)}{\partial u_1} \right| \frac{\partial g(u)}{\partial u_2} \right] du \\ &= \iint_K \left(\vec{w}(g(u)), \frac{\partial \vec{g}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{g}(u)}{\partial u_2} \right) du \\ &= \iint_G \vec{w} \, d\vec{G} \end{aligned}$$

mit

$$w(g(u)) = \frac{1}{\det S'((S^{-1} \circ g)(u))} S'((S^{-1} \circ g)(u)) v((S^{-1} \circ g)(u)),$$

also

$$w(x) = \frac{1}{\det S'(S^{-1}(x))} S'(S^{-1}(x)) v(S^{-1}(x)).$$

- Verwenden wir die Bezeichnung $T := S^{-1}$, so gilt $S(T(x)) = x$ und somit $S'(T(x))T'(x) = I$. Damit erhalten wir

$$w(x) = (\det T'(x)) [T'(x)]^{-1} v(T(x)),$$

und folgender Satz ist bewiesen.

Satz 1 *Es seien $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $F = f(K)$ das zugehörige Flächenstück, $S : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ und $G := S(F)$ wie oben sowie $v : F \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann gilt*

$$\iint_F \vec{v} \, d\vec{F} = \iint_G \vec{w} \, d\vec{G},$$

wobei

$$w(x) = \frac{1}{\det S'(S^{-1}(x))} S'(S^{-1}(x))v(S^{-1}(x)), \quad x \in G,$$

bzw. (mit $T = S^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$)

$$w(x) = [\det T'(x)] [T'(x)]^{-1} v(T(x)), \quad x \in G.$$

- Aus (c) folgt

$$[\det T'(x)] [T'(x)]^{-1} = [\Delta_{kj}(x)]_{j,k=1}^3,$$

wobei $\Delta_{jk}(x) = (-1)^{j+k} \det [T'(x)]_{jk}$. Damit ist

$$w_j(x) = \sum_{k=1}^3 \Delta_{kj}(x) v_k(T(x)).$$

- Andererseits ist z.B.

$$\begin{aligned} & \det \left[v(T(x)) \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \right] \\ &= \det \begin{bmatrix} v_1(T(x)) & \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_3} \\ v_2(T(x)) & \frac{\partial T_2(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial T_2(x)}{\partial x_3} \\ v_3(T(x)) & \frac{\partial T_3(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial T_3(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ &= v_1(T(x))\Delta_{11}(x) + v_2(T(x))\Delta_{21}(x) + v_3(T(x))\Delta_{31}(x), \end{aligned}$$

so dass

$$w(x) = \begin{bmatrix} \det \left[v(T(x)) \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \right] \\ \det \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x_1} \mid v(T(x)) \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \right] \\ \det \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x_1} \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} \mid v(T(x)) \right] \end{bmatrix}.$$

- Aus (d) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1(x)}{\partial x_1} &= \det \left[\frac{\partial v(T(x))}{\partial x_1} \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \right] \\ &+ \det \left[v(T(x)) \mid \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \right] \\ &+ \det \left[v(T(x)) \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} \mid \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2(x)}{\partial x_2} &= \det \left[\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \mid v(T(x)) \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \right] \\ &+ \det \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x_1} \mid \frac{\partial v(T(x))}{\partial x_2} \mid \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \right] \\ &+ \det \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x_1} \mid v(T(x)) \mid \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_3(x)}{\partial x_3} &= \det \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} \\ \hline & v(T(x)) \end{array} \right] \\ &+ \det \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial T(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \hline & v(T(x)) \end{array} \right] \\ &+ \det \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial T(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial v(T(x))}{\partial x_3} \\ \hline & & \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, dass $T(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{w}(x) &= \det \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial v(T(x))}{\partial x_1} & \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \\ \hline & & \end{array} \right] \\ &+ \det \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial T(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial v(T(x))}{\partial x_2} & \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \\ \hline & & \end{array} \right] \\ &+ \det \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial T(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial v(T(x))}{\partial x_3} \\ \hline & & \end{array} \right] \\ &= \det \left[\begin{array}{c|c|c} v'(T(x)) \frac{\partial T(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \\ \hline & & \end{array} \right] \\ &+ \det \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial T(x)}{\partial x_1} & v'(T(x)) \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \\ \hline & & \end{array} \right] \\ &+ \det \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial T(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} & v'(T(x)) \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \\ \hline & & \end{array} \right] \\ &\stackrel{(f)}{=} [\det T'(x)] \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k(T(x))}{\partial x_k} = [\det T'(x)] \operatorname{div} \vec{v}(T(x)). \end{aligned}$$

Satz 2 Sind $v : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$, $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ ein C^2 -Diffeomorphismus und $w : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$w(x) = [\det T'(x)] [T'(x)]^{-1} v(T(x)),$$

so gilt

$$\operatorname{div} \vec{w}(x) = [\det T'(x)] \operatorname{div} \vec{v}(T(x)), \quad x \in \Omega_1.$$

Bezeichnungen:

- $\mathcal{B} = \{B \subset \mathbb{R}^3 : B \text{ -- Bereich mit stückweise glattem Rand}\}$
- $\mathcal{B}_G = \{B \in \mathcal{B} : \text{Auf } B \text{ gilt der Gauß'sche Integralsatz.}\}$ - Menge der Gauß'schen Bereiche

Satz 3 Ist $B_1 \in \mathcal{B}_G$ und ist $T : B_1 \rightarrow B_2$ ein C^2 -Diffeomorphismus mit $\det T'(x) > 0$ $\forall x \in B_1$, so ist $B_2 \in \mathcal{B}_G$.

Beweis. Seien $F_k = \partial B_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_{F_2} \vec{v} \, d\vec{F}_2 &\stackrel{\text{Satz 1}}{=} \iint_{F_1} \vec{w} \, d\vec{F}_1 = \iiint_{B_1} \operatorname{div} \vec{w}(x) \, dx \\ &\stackrel{\text{Satz 2}}{=} \iiint_{B_1} \operatorname{div} \vec{v}(T(x)) \det T'(x) \, dx = \iiint_{B_2} \operatorname{div} \vec{v}(y) \, dy. \end{aligned}$$

Zeigen die Normalenvektoren auf F_1 ins Äußere von B_1 , so gilt dies auch für die Normalenvektoren auf F_2 bezüglich B_2 , denn:

Für $F_j = f_j(K)$, d.h. $f_2 = T \circ f_1$, $y \in \operatorname{int}(B_2)$, $y^0 \in F_2$ gilt $y = T(x)$, $y^0 = T(x^0)$ mit $x \in \operatorname{int}(B_1)$, $x^0 = f_1(u^0) \in F_1$, und es folgt (für x nahe bei x^0)

$$\begin{aligned} \left\langle y - y^0, \frac{\partial f_2(u^0)}{\partial u_1} \times \frac{\partial f_2(u^0)}{\partial u_2} \right\rangle &= \left\langle T(x) - T(x^0), T'(x^0) \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_1} \times T'(x^0) \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_2} \right\rangle \\ &\approx \det \left[\begin{array}{c} T'(x^0)(x - x^0) \\ T'(x^0) \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_1} \\ T'(x^0) \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_2} \end{array} \right] \\ &\stackrel{(b)}{=} (\det T'(x^0)) \left\langle x - x^0, \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_1} \times \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_2} \right\rangle < 0. \end{aligned}$$

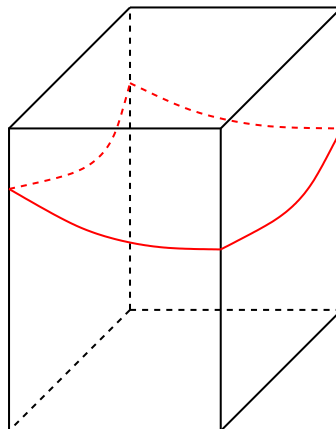
□

Weitere Schritte im Beweis des Gauß'schen Integralsatzes

- (1) Es seien $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ ein Quader und $g : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow (0, 1]$ eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung. Wir definieren $T : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

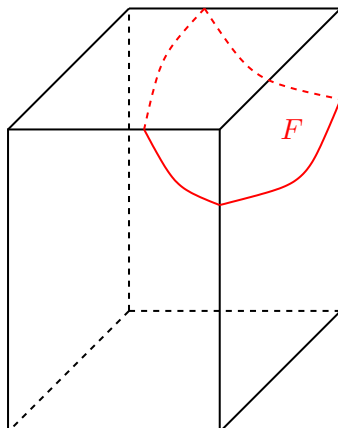
$$T(x) = (x_1, x_2, a_3 + (x_3 - a_3)g(x_1, x_2)).$$

Nach Satz 3 gilt $T(Q) \in \mathcal{B}_G$.



- (2) Durch Approximation kann man $T(Q) \in \mathcal{B}_G$ auch für einmal stetig differenzierbare Abbildungen $g : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow (0, 1]$ (vgl. (1)) zeigen.

- (3) Zerlegt ein Flächenstück F , welches Graph einer Funktion $g(x_1, x_2)$ ist, einen achsenparallelen Quader in zwei Teilbereiche B_1 und B_2 , so gehört jeder dieser Teilbereiche zu \mathcal{B}_G .



Begründung: Man zerlege Q in achsenparallele Teilquader Q_k und entferne die Teilquader Q_k mit $\partial Q_k \cap F \neq \emptyset$. Für die übrigen Quader Q_k , die mit B_1 einen nichtleeren Durchschnitt mit positivem Jordanmaß haben, gilt $B_1 \cap Q_k \subset B_1$ oder $B_1 \cap Q_k$ ist von der in (1) betrachteten Form. Durch Verfeinerung der Zerlegung kann man unter Verwendung der folgenden Aussage zeigen, dass B_1 zu \mathcal{B}_G gehört.

- (4) Sind $B \in \mathcal{B}$ und (B_n) eine Folge Gauß'scher Bereiche mit $B_n \subset B$, $|B \setminus B_n| \rightarrow 0$ und $|\partial(B \setminus B_n)| \rightarrow 0$, so ist auch B ein Gauß'scher Bereich.
- (5) Sei $B \in \mathcal{B}$. Wir legen B in einen achsenparallelen Quader Q und zerlegen Q in achsenparallele Teilquader Q_k , aus denen wir die entfernen, die Kanten von B enthalten. Die Zerlegung können wir so fein wählen, dass die restlichen Quader ganz zu B oder ganz zu $Q \setminus B$ gehören oder durch ∂B in zwei Teile wie in (3) zerlegt werden. Es bleibt dann wieder (4) anzuwenden.

3.8 Übungsaufgaben

1. Überprüfen Sie, ob folgende Koordinatentransformationen orthogonal sind, und geben Sie in diesem Fall das Rechtsdreibein entlang der Koordinatenlinien an:

- a) (parabolische Zylinderkoordinaten)

$$x_1 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}, \quad x_2 = u_1 u_2, \quad x_3 = u_3,$$

mit $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, s) : s \in \mathbb{R}\}$

- b) (rotationsparabolische Koordinaten)

$$x_1 = u_1 u_2 \cos u_3, \quad x_2 = u_1 u_2 \sin u_3, \quad x_3 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2},$$

mit $(u_1, u_2, u_3) \in (0, \infty)^2 \times [0, 2\pi]$.

2. Stellen Sie das Vektorfeld $v(x) = (x_2, -x_3, 1)$ im orthogonalen Dreibein bezüglich der Zylinderkoordinaten und der parabolischen Zylinderkoordinaten dar.

3. Schreiben Sie den Gradienten folgender Skalarfelder in Kugelkoordinaten:

$$\text{a) } \psi(x) = |x| \quad \text{b) } \tilde{\psi}(r, \vartheta, \varphi) = r \cdot \sin \varphi.$$

4. Schreiben Sie den Laplace-Operator folgender Skalarfelder in Zylinderkoordinaten:

$$\text{a) } \psi(x) = \langle a, x \rangle, \quad a \neq 0 \quad \text{b) } \tilde{\psi}(r, \varphi, z) = \frac{\sin \varphi}{r}, \quad r > 0.$$

5. Schreiben Sie die Divergenz folgenden Vektorfeldes in Zylinderkoordinaten:

$$v(x) = \left(2x_1 - \frac{x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, 2x_2 + \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, x_3 \right).$$

6. Die Vektorfelder $A, B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und das Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Zeigen Sie folgende Formeln

$$\text{(a) } \nabla \cdot (\phi A) = A \cdot \nabla \phi + \phi (\nabla \cdot A),$$

$$\text{(b) } \nabla \times (A \times B) = A (\nabla \cdot B) - B (\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla) A - (A \cdot \nabla) B.$$

7. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet, welches durch die Funktionen $y = x^2$ und $y = 4$ begrenzt wird. Verwenden Sie den Gauß'schen Integralsatz der Ebene zur Berechnung

$$\text{(a) des Integrals } \int_{\partial G} (e^x - y) dx + (\sin y + x) dy$$

(b) des Flächeninhaltes von G .

8. Berechne Sie den Inhalt des Teils der Fläche $2z = x^2$, der von den Ebenen $y = x/2$, $y = 2x$ und $x = 2\sqrt{2}$ begrenzt wird.

9. Berechnen Sie für das Vektorfeld $v(x) = (x_1 e^{x_2}, x_1 e^{x_3}, x_3 e^{x_1})$ den Fluss durch die Fläche $F = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2^2 + x_3^2 = a^2\}$, $a > 0$, wobei der Normalenvektor nach außen zeige.

10. Berechnen Sie für das Vektorfeld $v(x) = (x_1, x_2, x_2 x_3^2)$ den Fluß durch die Oberfläche eines achsenparallelen Würfels mit Mittelpunkt im Ursprung und Kantenlänge 2 unter Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes. Die Normale zeige dabei nach außen.

11. Berechnen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes das Integral

$$\int_{\Gamma} [x(z - y)dx + y(x - z)dy + z(y - x)dz],$$

wobei Γ das Dreieck mit den Eckpunkten $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$ (durchlaufen von A über B nach C zurück nach A , $a > 0$) ist.

Index

- ε -Umgebung, 9
- \vec{n}_e , 43
- äquivalente Parametrisierung, 36

- Bereich mit stückweise glattem Rand, 38
- Bogenlänge, 24

- Darboux'sche Unter- und Obersumme, 7
- Darboux'sches Integral, unteres und oberes, 8
- Darstellungsformel, 46
- Deformation, 28
- Diffeomorphismus, 36
- Dirichlet-Problem, 44
- Divergenz, 37, 42
- Dreibein, 47
- Durchmesser einer Zerlegung, 13

- eigentliche Fläche, 36
- eigentliches Flächenstück, 36
- einfach zusammenhängendes Gebiet, 28
- einfaches Flächenstück, 39

- Fläche, 34
- Flächenstück, 34
- Fluss durch eine Oberfläche, 37
- Formeln der partiellen Integration, 43
- Funktion beschränkter Variation, 21
- Funktionaldeterminante, 11

- Gauß'scher Integralsatz, 38, 39, 42
- Gauß'scher Integralsatz der Ebene, 30
- Gauß'scher Integralsatz für Skalarfelder, 38
- Gebiet, 27
- gemischtes RWP, 44
- glatter Weg, 23
- Gradient, 42
- Gradientenfeld, 27, 43
- Green'sche Formeln, 43

- harmonische Funktion, 43
- homogenes Problem, 44

- Indikatorfunktion, 8
- Integrabilitätsbedingung, 28, 29

- Jordan-Maß, 9
- Jordan-messbare Menge, 9
- Jordankurve, 22
- Jordanweg, 22

- Koordinatenlinien, 47
- Kreuzprodukt, 33
- Kurve, 21

- Länge einer Kurve, 22
- Länge eines Weges, 21
- Laplace-Operator, 42

- Maximumprinzip, 47
- Menge vom Maß Null, 9
- Mittelwerteigenschaft, 47
- Mittelwertsatz, 10

- Nabla-Operator, 42
- Neil'sche Parabel, 23
- Neumann-Problem, 44
- Normalbereich, 9
- Normalenvektor, 35
- Nullmenge, 9

- oberes Darboux'sches Integral, 8
- Oberflächenintegral erster Art, 36
- Oberflächenintegral zweiter Art, 36
- Orientierung einer Fläche, 36
- orthogonale Koordinatentransformation, 47

- Poisson-Problem, 45
- Potentialfeld, 43

- Quelle eines Vektorfeldes, 37

- Rechtsdreibein, 47
- regulärer Punkt einer Fläche, 35
- rektifizierbarer Weg, 21
- Riemann-integrierbare Funktion, 8
- riemann-Stieltjes-Integral, 24
- Riemannsche Integralsummen, verallg., 13
- Rotation, 42

- Senke eines Vektorfeldes, 37

Skalarfeld, 27
Skalarprodukt, 33
stückweise stetige Funktion, 25
sternförmige Menge, 27
Sternmittelpunkt, 28
Stokes'scher Integralsatz, 41, 43
Summe von Wegen, 22

Tangentenebene, 35
Tangentialebene, 35

Umgebung, offene, 9
uneigentliches Integral, 46
unteres Darboux'sches Integral, 8

Vektorfeld, 27
Vektorpotential, 45

Weg, 21
Wegintegral 1. Art, 25
Wegintegral 2. Art, 25
Weglängenfunktion, 22
Wirbelfeld, 43, 45
Wirbelstärke, 40

Zerlegungssatz, 14
Zirkulation entlang einer Kurve, 39
zusammengesetztes Flächenstück, 37