Skript zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

WS 2015/16

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] K. Burg, H. Haf, F. Wille, Höhere Mathematik für Ingenieure, Band III, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen, B. G. Teubner Stuttgart, 1985, 1990, 1993, 2002.

[2] V. Capasso, Mathematical Structures of Epidemic Systems, Lecture Notes in Biomathematics, Springer-Verlag, 1993.

[3] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1983.

[4] K. Jänisch, Analysis für Physiker und Ingenieure – Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen, Springer-Verlag, 1983, 1990, 1995, 2001.

[5] L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1991.

[6] L. S. Pontrjagin, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Beispiele

1. **Einfachstes Populationsmodell**

   $P(t)$ - Größe der Population zum Zeitpunkt t

   $$P(t + \Delta t) - P(t) \approx k\, P(t)\, \Delta t\,, \quad k > 0 - \text{Vermehrungsrate.}$$

   Für $\Delta t \longrightarrow 0$ ergibt sich das **Anfangswertproblem (AWP)**

   $$P'(t) = k\, P(t)\,, \quad P(0) = P_0\,.$$

   Die einzige Lösung dieses AWPs ist $P(t) = P_0 e^{k\,t}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. **Populationsmodell mit begrenzten Resourcen**

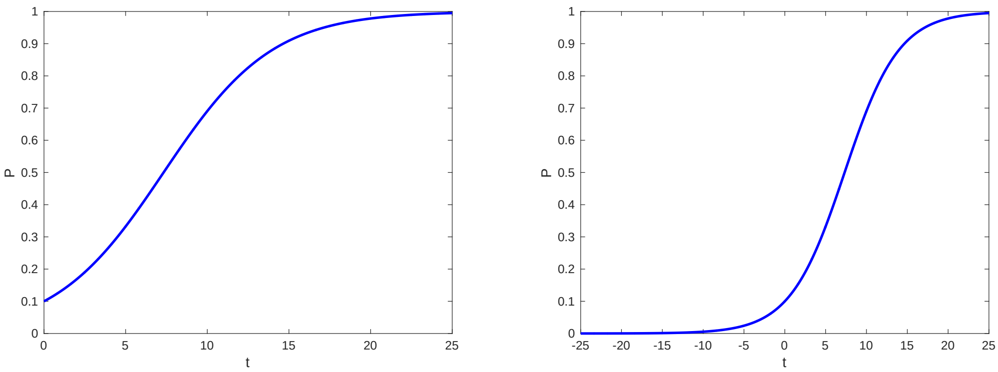
   $P(t)$ - Quotient aus Größe der Population zum Zeitpunkt t und optimaler Populationsgröße

   $$P'(t) = k[1 - P(t)]P(t)\,,\ P(0) = P_0 \geq 0\,, \quad k > 0$$

   Lösung:

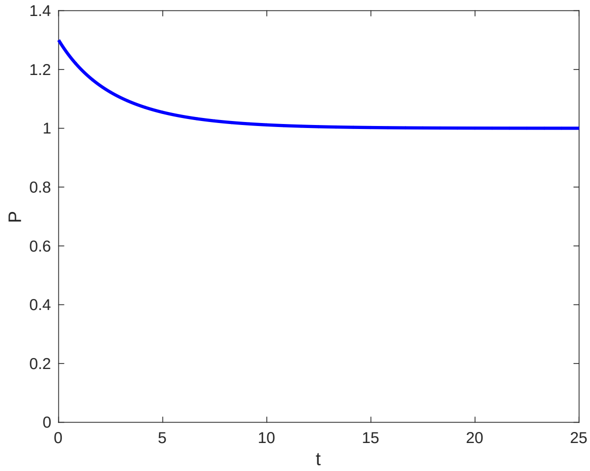
   $$P(t) = \frac{P_0}{P_0 + (1 - P_0)e^{-k\,t}}$$

   Die folgenden Abbildungen zeigen die Lösung dieses Modells für ein $P_0 < 1$.

   Populationsmodell mit begrenzten Resourcen: $k = 0.3\,,\ P_0 = 0.1$

   Die folgende Abbildung zeigt die Lösung dieses Modells für ein $P_0 > 1$.



Populationsmodell mit begrenzten Resourcen: $k = 0.3\,,\ P_0 = 1.3$

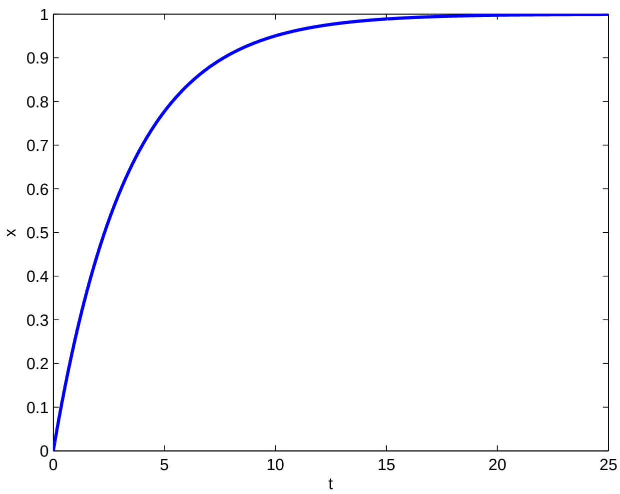
3. **Modell der konstanten Infusion**

   $x(t)$ - vorhandene Menge der Substanz, die mit konstanter Rate r in ein System eingebracht und mit einer Rate proportional zur vorhandenen Menge vom System abgebaut wird

   $$\dot{x}(t) = -k\,x(t) + r\,, \quad k > 0\,,\ r > 0$$

   Lösung des AWP's $x(0) = x_0$:

   $$x(t) = \left(x_0 - \frac{r}{k}\right) e^{-k\,t} + \frac{r}{k} = x_0\,e^{-k\,t} + \frac{r}{k}\left(1 - e^{-k\,t}\right)$$



Modell der konstanten Infusion: $k = 0.3,\ r = 0.3\,,\ x_0 = 0.0$

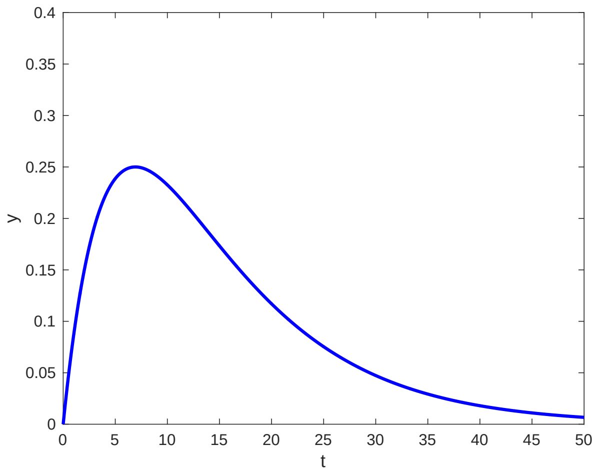
4. **Abbau einer organischen Substanz in zwei Stufen**

   Die Substanz x wird mit einer Rate proportional zur vorhandenen Menge im Organismus in eine Transportform y umgewandelt und dann mit einer ebensolchen Rate (z.B. durch die Zellmembran) ausgeschieden.

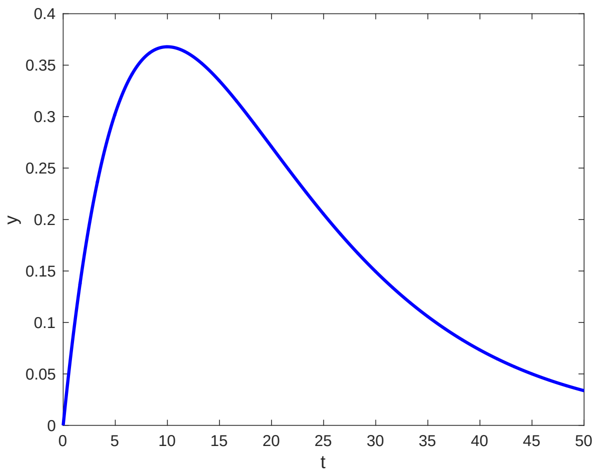
   $$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\alpha\,x(t)\\ \dot{y}(t) &= \alpha\,x(t) - \beta\,y(t)\,, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0\end{aligned}$$

Lösung des AWP's $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$:

$$x(t) = x_0\, e^{-\alpha\, t}\,, \quad y(t) = \begin{cases} \left(y_0 - \dfrac{\alpha\, x_0}{\beta - \alpha}\right) e^{-\beta\, t} + \dfrac{\alpha\, x_0}{\beta - \alpha}\, e^{-\alpha\, t} & : \ \alpha \neq \beta \\ (\alpha\, x_0 t + y_0) e^{-\beta\, t} & : \ \alpha = \beta \end{cases}$$



Abbau einer organischen Substanz in zwei Stufen: $\alpha = 0.1,\ \beta = 0.2\,,\ \ x_0 = 1.0,\ y_0 = 0.0$



Abbau einer organischen Substanz in zwei Stufen: $\alpha = \beta = 0.1\,,\ \ x_0 = 1.0,\ y_0 = 0.0$

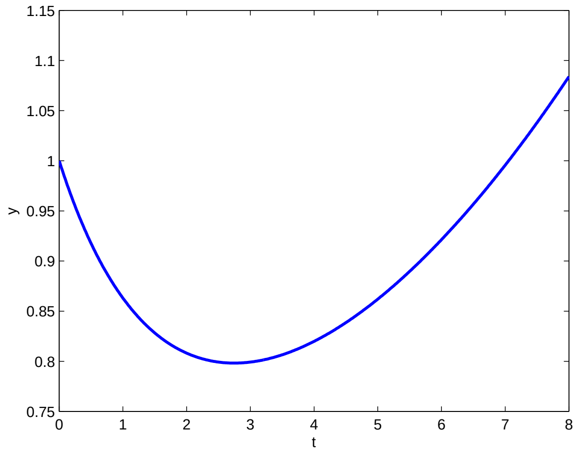
5. **Wirkung eines Insektizids**

Ein Insektizid impliziert eine Sterberate einer Insektenpopulation y proportional zur vorhandenen Menge x des Insektizids, welches selbst mit der Rate $\gamma\, x$ zerfalle. Ohne Wirkung dieses Insektizids möge sich die Insektenpopulation exponentiell vermehren.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\gamma\, x(t)\,, \quad \gamma > 0 \\ \dot{y}(t) &= \alpha\, y(t) - \beta\, x(t) y(t)\,, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \end{aligned}$$

Lösung des AWP's $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$:

$$x(t) = x_0\, e^{-\gamma\, t}\,, \quad y(t) = y_0\, e^{A(t)} \quad \text{mit} \quad A(t) = \alpha\, t + \frac{\beta\, x_0}{\gamma} \left(e^{-\gamma\, t} - 1\right)$$



Wirkung eines Insektizids: $\alpha = 0.1,\ \beta = 0.3,\ \gamma = 0.4\,,\ \ x_0 = y_0 = 1$

6. **Einfaches Räuber-Beute-Modell**

   $x(t)$ - Beute-Population, $y(t)$ - Räuber-Population

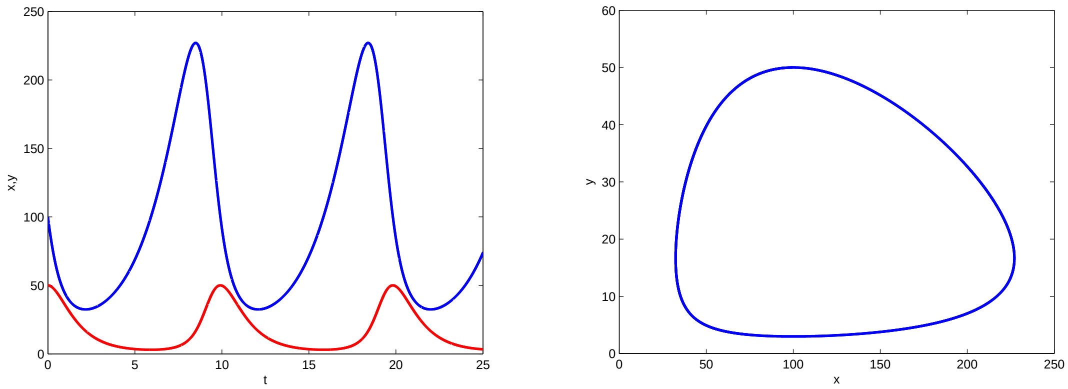
   Annahmen:

   - $x(t)$ entwickelt sich exponentiell bei Abwesenheit von y.
   - $y(t)$ stirbt exponentiell aus bei Abwesenheit von x.
   - Die Zahl der von y gefressenen x ist proportional der möglichen Anzahl von Begegnungen $x\,y$.

   Es ergibt sich folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha\, x(t) - \beta\, x(t)y(t)\,,\\ \dot{y}(t) &= -\gamma\, y(t) + \delta\, x(t)y(t)\,.\end{aligned}$$

   Dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ positive Parameter.



Einfaches Räuber-Beute-Modell: zeitabhängige und Phasenraumdarstellung
$\alpha = 0.5,\ \beta = 0.03,\ \gamma = 1.0,\ \delta = 0.01\,,\ \ x_0 = 100,\ y_0 = 50$

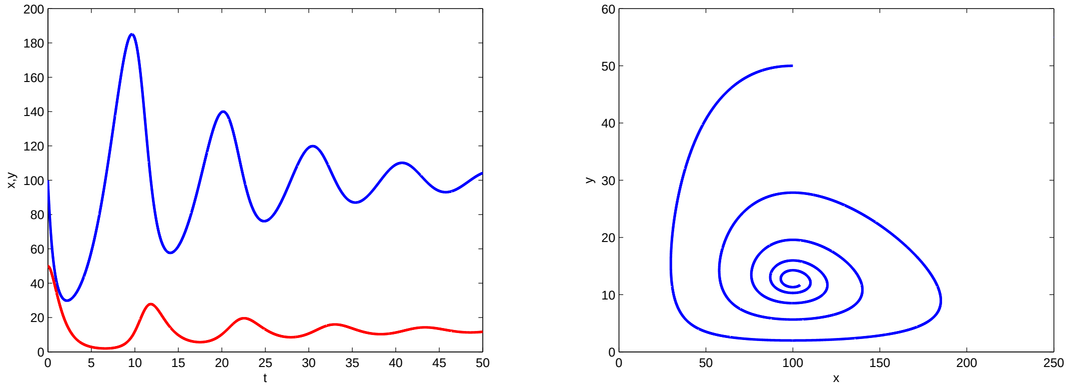
7. **Räuber-Beute-Modell mit begrenzter Weidekapazität**

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha\left[1 - \frac{x(t)}{W}\right] x(t) - \beta\, x(t)y(t)\,,\\ \dot{y}(t) &= -\gamma\, y(t) + \delta\, x(t)y(t) - \mu[y(t)]^2\,.\end{aligned}$$

Dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, W > 0$, $\mu \geq 0$. Im weiteren schreiben wir ein solches Differentialgleichungssystem kurz in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left[\alpha\left(1 - \frac{x}{W}\right) - \beta\, y\right] x\,, \\ \dot{y} &= [-\gamma + \delta\, x - \mu\, y]\, y\,. \end{aligned}$$

Ferner vereinbaren wir, dass, falls nichts anderes gesagt wird, auftretende Parameter (wie $\alpha, \beta, \ldots$) stets positiv sind.



Räuber-Beute-Modell mit begrenzter Weide: zeitabhängige und Phasenraumdarstellung
$\alpha = 0.5,\ \beta = 0.03,\ \gamma = 1.0,\ \delta = 0.01,\ \mu = 0,\ W = 400\,,\ x_0 = 100,\ y_0 = 50$

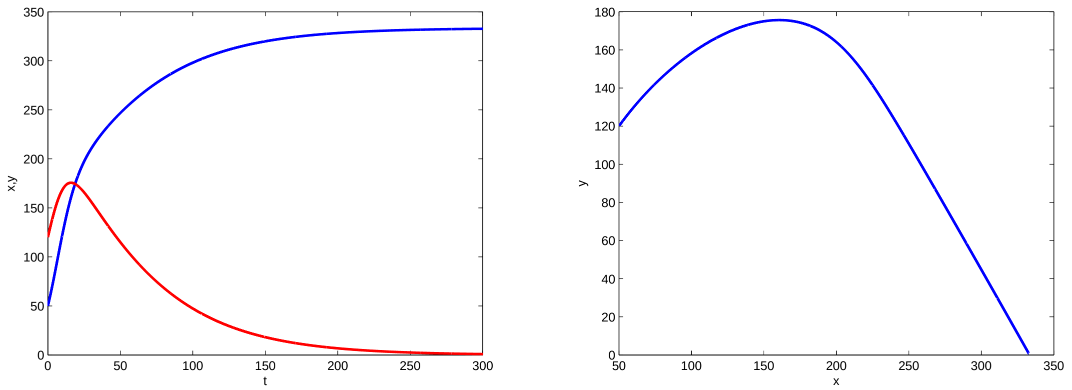
8. **Ein Konkurrenzmodell**
   - $x(t), y(t)$ - zwei Populationen mit gleicher Nahrungsquelle
   - $N(t) = \gamma_1 x(t) + \delta_1 y(t)$ - benötigte Nahrungsmenge pro Zeiteinheit
   - Ansatz:

$$\dot{x}(t) = \alpha\left(1 - \frac{N(t)}{A}\right) x(t)\,, \qquad \dot{y}(t) = \beta\left(1 - \frac{N(t)}{B}\right) y(t)\,.$$

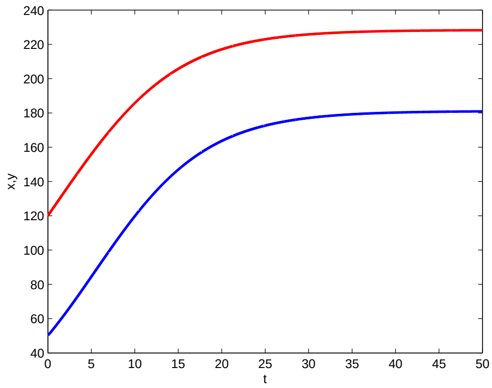
Es folgt

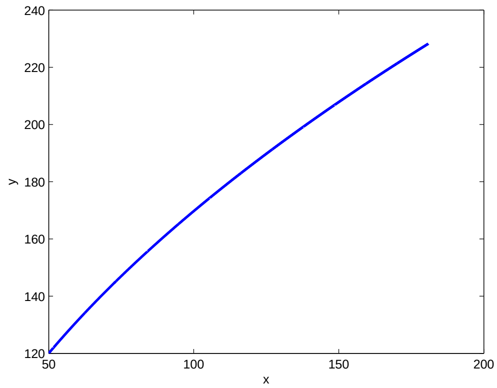
$$\begin{aligned} \dot{x} &= [\alpha - \gamma(\gamma_1 x + \delta_1 y)]\, x\,, \\ \dot{y} &= [\beta - \delta(\gamma_1 x + \delta_1 y)]\, y\,, \end{aligned}$$

wobei $\gamma = \frac{\alpha}{A}$ und $\delta = \frac{\beta}{B}$.



Konkurrenzmodell: zeitabhängige und Phasenraumdarstellung
$\alpha = 0.2,\ \beta = 0.1,\ \gamma = 0.001,\ \delta = 0.0006,\ \gamma_1 = 0.6,\ \delta_1 = 0.4\,,\ x_0 = 50,\ y_0 = 120$





Konkurrenzmodell: zeitabhängige und Phasenraumdarstellung
$\alpha = 0.2,\ \beta = 0.1,\ \gamma = 0.001,\ \delta = 0.0005,\ \gamma_1 = 0.6,\ \delta_1 = 0.4\,,\ \ x_0 = 50,\ y_0 = 120$

9. **Epidemie-Modelle**

Eine Population unterteile sich in

- $x(t)$ - Suszeptible, d.h. Mitglieder, die gesund, aber ansteckbar sind,
- $y(t)$ - Infizierte,
- $z(t)$ - aus dem Ausbreitungsprozess der Krankheit ausgeschiedene Mitglieder (Immunisierte, Tote).

Annahmen:

- verschwindende Latenzzeit,
- Geburts- gleich Sterberate ($\Rightarrow$ konstante Populationsgröße),
- Suszeptible werden nur bei Kontakten mit Infizierten angesteckt.

(a) **Einfachstes Epidemiemodell**:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\, x\, y\,, \\ \dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y\,, \\ \dot{z} &= \beta\, y\,, \end{aligned}$$

wobei $\alpha > 0$ - Ansteckungsrate, $\beta > 0$ - Beseitigungsrate. Es folgt $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0$, d.h. $x + y + z = \text{const}$. Offenbar genügt es, die ersten beiden Gleichungen zu betrachten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\, x\, y\,, \\ \dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Wir betrachten das Anfangswertproblem $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$ zu diesem Differentialgleichungssystem. Division der zweiten Gleichung durch die erste ergibt

$$y'(x) = \frac{\beta}{\alpha\, x} - 1\,,$$

d.h. eine gewöhnliche Differentialgleichung vom Typ 1. Wir erhalten

$$y(x) = \frac{\beta}{\alpha} \ln x - x + C\,,$$

d.h.

$$y(x) = y_0 + x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\,\ln\frac{x}{x_0} - x\,.$$

Wir haben

$$y'(x) = \frac{\beta}{\alpha\,x} - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = x^* = \frac{\beta}{\alpha}$$

und

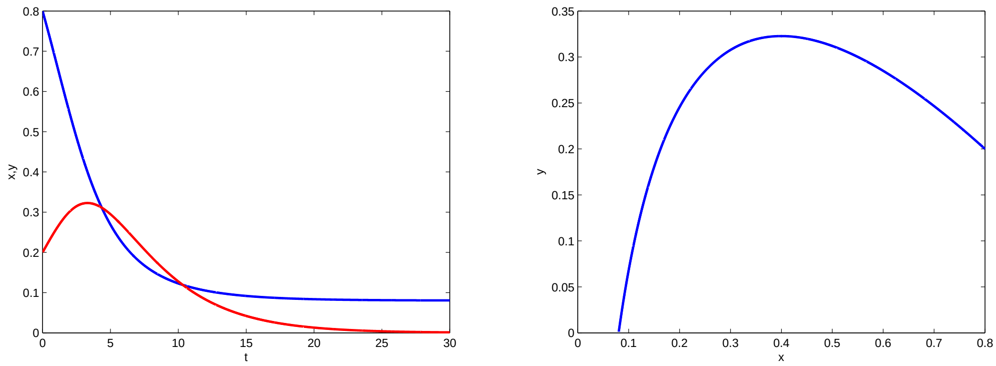
$$y''(x^*) = -\frac{\beta}{\alpha\,(x^*)^2} < 0\,.$$

Damit hat die Funktion $y(x)$ an der Stelle x^* ein lokales Maximum. Ferner gilt

$$\lim_{x\to+0} y(x) = -\infty = \lim_{x\to+\infty} y(x)\,.$$

Somit können wir folgende Schlussfolgerungen ziehen:

- Ist $x_0 \le \beta/\alpha$, so klingt die Epidemie sofort ab.
- Ist $x_0 > \beta/\alpha$, so breitet sich die Epidemie bis $x = x^* = \beta/\alpha$ aus und klingt dann ab.
- Ein Teil der Population $x_1 > 0$ wird nicht von der Krankheit befallen.



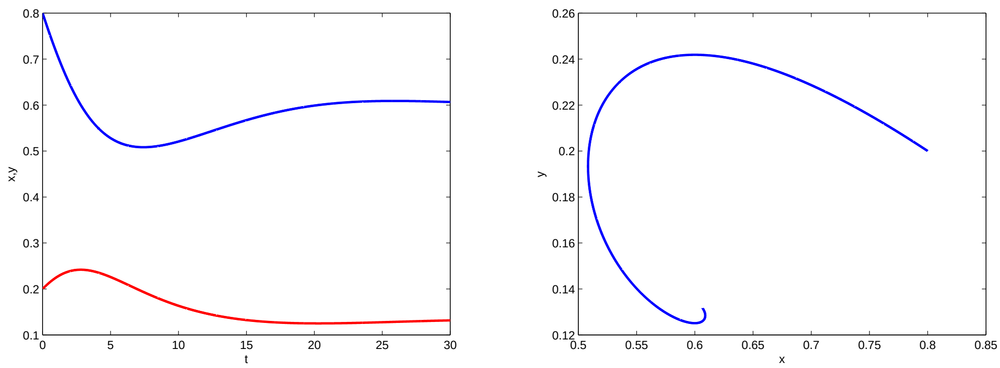
Einfachstes Epidemiemodell: zeitabhängige und Phasenraumdarstellung
$\alpha = 0.75,\ \beta = 0.3\,,\ \ x_0 = 0.8,\ y_0 = 0.2$

(b) **Epidemiemodell mit Dynamik**:
Wir gehen jetzt von einer Geburtenrate $\mu > 0$ aus, die gleich der Sterberate ist, und betrachten β als Gesundungsrate = Immunisierungsrate:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha\,x\,y + \mu(x+y+z) - \mu\,x\,,\\ \dot{y} &= \alpha\,x\,y - \beta\,y - \mu\,y\,,\\ \dot{z} &= \beta\,y - \mu\,z\,.\end{aligned}$$

Es folgt wieder $\dot{x}+\dot{y}+\dot{z} = 0$, d.h. $x+y+z = N = \text{const}$, und wir brauchen nur die ersten beiden Gleichungen zu betrachten:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha\,x\,y + \mu N - \mu\,x\,,\\ \dot{y} &= \alpha\,x\,y - \beta\,y - \mu\,y\,.\end{aligned} \tag{1.2}$$



Epidemiemodell mit Dynamik: zeitabhängige und Phasenraumdarstellung
$\alpha = 0.75,\ \beta = 0.3,\ \mu = 0.15,\ N = 1.0\,,\ \ x_0 = 0.8,\ y_0 = 0.2$

(c) **Ein einfaches AIDS-Modell**:
- Die Sterberate $\mu + \mu_1$ Erkrankter ist größer als die Gesunder.
- Die Geburten werden reduziert um $\mu\,\alpha_1\,y$, da ein Anteil α_1 der Kinder von Infizierten bei der Geburt stirbt.
- Weiterhin ist eine vertikale Übertragung der Krankheit zu berücksichtigen. Die Rate der vertikalen Übertragung sei gleich q.

Es folgt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\,x\,y + \mu(N - \alpha_1 y - q\,y) - \mu\,x\,, \\ \dot{y} &= \alpha\,x\,y - \beta\,y - (\mu + \mu_1)y + \mu\,q\,y\,. \end{aligned}$$

Anfangswertprobleme: Bei den bisher betrachteten Beispielen sucht man i.Allg. Lösungen, die zu einem gegebenen Anfangszustand $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, … gehören.

1.2 Die Lösung gewisser Differentialgleichungen

1. $x' = f(t)$
2. $x' = f(x)$ (Bsp. $x' = \cos^2 x$)
3. $x' = f(x)g(t)$ (Bsp. $x' + t\,x^2 = 0$, Spezialfall $x' = g(t)x$, vgl. Abschnitt 1.1, 5.)
4. $x' = g(t)x + f(t)$ (Bsp. $x' = 2\,t\,x + (2t-1)e^t$ mit Variation der Konstanten)
5. $x'' = f(x)$ (Bsp. $x'' = -x$)

1.3 Existenz und Eindeutigkeit

Zu einigen Beispielen im vorhergehenden Abschnitt haben wir Lösungen der entsprechenden AWP angegeben. Es stellt sich die Frage, ob diese Lösungen die einzigen sind.

- Für die einfachste Differentialgleichung

$$F'(t) = f(t)\,,$$

wobei die stetige Funktion $f(t)$ gegeben sei, können wir diese Frage sofort beantworten, da wir wissen, dass sich zwei Stammfunktionen zu einer Funktion nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

- Das Beispiel
$$\dot{x} = \sqrt{|x|}\,, \quad x(0) = 0$$
zeigt, dass die Eindeutigkeit der Lösung nicht immer gegeben ist, da sowohl $x(t) = 0$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ als auch
$$x(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & t \le 0\,, \\ \dfrac{t^2}{4} & : & t > 0\,, \end{array} \right\} \quad x(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} -\dfrac{t^2}{4} & : & t \le 0\,, \\ 0 & : & t > 0\,, \end{array} \right\} \quad x(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} -\dfrac{t^2}{4} & : & t \le 0\,, \\ \dfrac{t^2}{4} & : & t > 0\,, \end{array} \right\}$$
Lösungen dieses AWPs sind.

- Es kann auch sein, dass eine Lösung des AWPs nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. So hat das AWP
$$\dot{x} = 1 + x^2\,, \quad x(0) = 0$$
die Lösung $x(t) = \tan t$, die nur für $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ existiert (vgl. auch das Beispiel $x' + t\,x^2 = 0$, $x(0) = x_0 \neq 0$ aus Abschnitt 1.2, 3.).

Kapitel 2

Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

2.1 Die matrixwertige Exponentialfunktion

Wir betrachten das AWP $x(0) = x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ für das System

$$\dot{x}_1 = -2\,x_1\,, \quad \dot{x}_2 = 3\,x_2\,.$$

Dieses System kann auch in der Form

$$\dot{x} = A\,x \quad \text{mit} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\,,\ A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

geschrieben werden. Wir erhalten die Lösung

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1^0\,e^{-2t} \\ x_2^0\,e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}\,,$$

die man (vorerst formal) in der Form

$$x(t) = e^{tA} x^0$$

mit der Matrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

schreiben könnte. Das AWP $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2$ für

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 3\,x_2\,, \quad \dot{x}_2 = 2\,x_2$$

schreiben wir in der Form

$$\dot{x} = A\,x\,, \quad x(0) = x^0 \tag{2.1}$$

mit $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den Eigenvektoren $v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $v^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Für die Matrix $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gilt dann

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := P^{-1} A\,P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mittels der Koordinatentransformation $x = P\,y$ bzw. $y = P^{-1}x$ schreibt sich (2.1) als

$$\dot{y} = B\,y\,, \quad y(0) = y^0 := P^{-1}x^0\,, \tag{2.2}$$

also

$$\dot{y}_1 = -y_1\,, \quad \dot{y}_2 = 2\,y_2\,, \quad y_1(0) = y_1^0 := x_1^0 + x_2^0\,,\ y_2(0) = y_2^0 := x_2^0\,.$$

Mit der bereits oben eingeführten Schreibweise erhalten wir als Lösung von (2.2)

$$y(t) = e^{tB}y^0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix},$$

also

$$x(t) = P\,y(t) = P\,e^{tB}P^{-1}x^0 = \begin{bmatrix} (x_1^0 + x_2^0)e^{-t} - x_2^0\,e^{2t} \\ x_2^0 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Schreiben wir diese Lösung wieder in der Form $x(t) = e^{tA}x^0$, so müsste $e^{tA} = e^{tPBP^{-1}} = Pe^{tB}P^{-1}$ gelten. Im Weiteren werden wir sehen, dass eine solche Funktion e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tatsächlich definiert werden kann.

Eine jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann als lineare Abbildung auf dem normierten Raum $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ mit $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ aufgefasst werden. Die Norm dieser Abbildung ist definiert als

$$\|A\| = \sup\left\{\|A\,x\| : x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \le 1\right\}.$$

Im Sinne der Konvergenz im normierten Raum $(\mathbb{R}^{n\times n}, \|.\|)$ definieren wir nun für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}\,A^2 + \ldots + \frac{1}{m!}\,A^m + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,A^k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\,A^k\,.$$

Satz 2.1 *Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist e^A wohldefiniert. Dabei gilt*

(a) $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^AT \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ T \in \mathcal{G}\mathbb{R}^{n\times n}$,

(b) $e^{A+B} = e^Ae^B \quad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $A\,B = B\,A$.

Folgerung 2.2 *Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $t, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *Ist* $A = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$, *so* $e^{tA} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$.

(b) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{tB}$, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(c) *Für* $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *gilt* $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$.

(d) *Ist* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, *so* $e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) *Für* $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *gilt*

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}, \quad e^{tB} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{tC} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Satz 2.3 *Wir betrachten für eine gegebene Matrix* $A = \left[\ a_{jk}\ \right]_{j,k=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und einen gegebenen Vektor* $x^0 = \left[\ x_k^0\ \right]_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ *das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = A\,x\,, \quad x(0) = x^0 \tag{2.3}$$

bzw.

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k(t)\,,\ j = 1, \ldots, n\,, \quad x_k(0) = x_k^0\,,\ k = 1, \ldots, n\,.$$

Dann ist

$$\varphi(t) = \varphi_{x^0}(t) := e^{tA} x^0$$

die eindeutige Lösung von (2.3)*, d.h.*

$$\dot{\varphi}_{x^0}(t) = A\,\varphi_{x^0}(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \varphi_{x^0}(0) = x^0\,.$$

Folgerung 2.4 *Wir definieren* $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *durch* $\Phi(t, x) = e^{tA} x$. *Dann gilt*

(a) $\Phi(0, x) = x\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)\ \forall\, t, s \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

(c) $\varphi_{x^0}(t) = \Phi(t, x^0)$ *ist eindeutige Lösung des AWPs* (2.3)*.*

Man nennt $\mathbb{R}^n$ den **Phasenraum** und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ den **erweiterten Phasenraum** sowie

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

den durch das Problem (2.3) definierten **Fluss** bzw. das zum Problem (2.3) gehörige **dynamische System**. Die Abbildung $\varphi_{x^0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \Phi(t, x^0)$ beschreibt einen Weg im $\mathbb{R}^n$, der durch den Punkt x^0 geht, die sogenannte **Flusslinie** durch x^0 . Das Bild (die Kurve) selbst

$$\varphi_{x^0}(\mathbb{R}) = \left\{\Phi(t, x^0) : t \in \mathbb{R}\right\}$$

nennt man **Orbit** (oder auch **Lösungskurve, Bahnkurve, Trajektorie**). Unter dem **Phasenportrait** des Systems in (2.3) versteht man die Familie aller Orbits $\varphi_x(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Beispiel 2.5 *Wir betrachten nochmals die Systeme* (*vgl.* (2.1) *und* (2.2))

$$\dot{x} = A\,x \quad \text{und} \quad \dot{y} = B\,y$$

mit $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *und* $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1} A\, P$, *wobei* $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *und verschaffen uns eine Vorstellung von den Phasenportraits dieser beiden Systeme.*

2.2 Zweidimensionale lineare Systeme

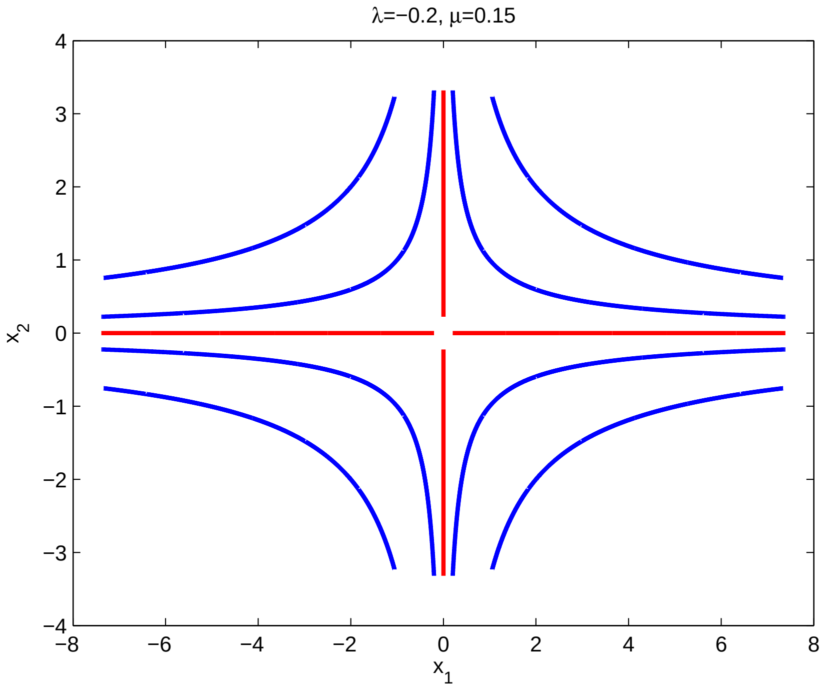
Wir betrachten für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\dot{x} = A\,x\,. \tag{2.4}$$

Setzen wir $\det A \neq 0$ voraus, so ist Θ der einzige stationäre Punkt zu (2.4). Wir wollen uns jetzt einen Überblick über mögliche Phasenportraits in der Umgebung dieses Punktes verschaffen. Es genügt, die verschiedenen möglichen (reellen) Jordanschen Normalformen von A zu betrachten (vgl. Abschnitt 2.3):

1. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi(t,x) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} x_1 \\ e^{\mu t} x_2 \end{bmatrix}$

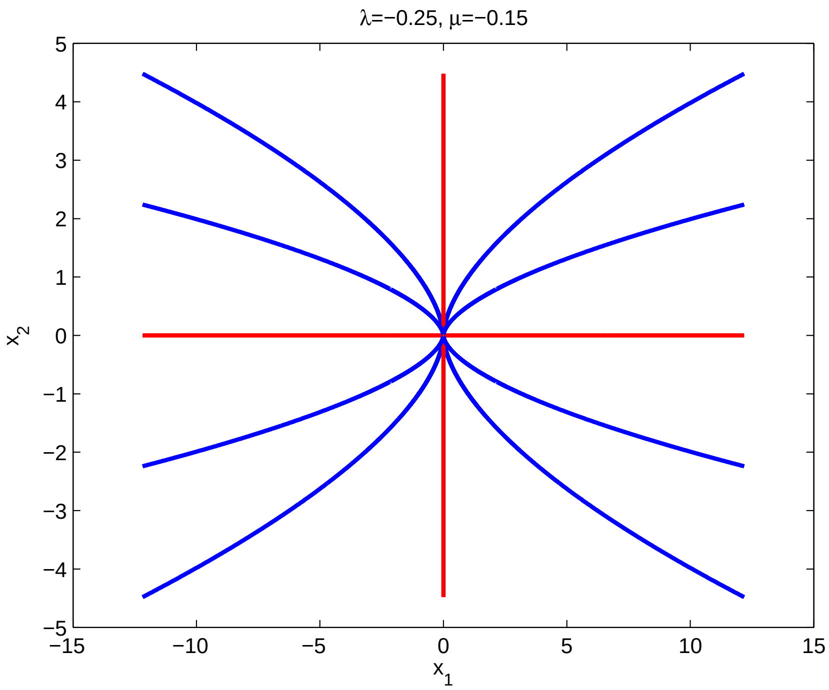
   (a) $\lambda < 0 < \mu \Rightarrow \Theta$ ist **Sattelpunkt**.



Sattelpunkt

   (b) $\lambda \leq \mu < 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = \Theta \Longrightarrow \Theta$ ist **stabiler Knoten**.

   (c) $0 < \lambda \leq \mu \Rightarrow \lim_{t\to-\infty} \Phi(t,x) = \Theta \Longrightarrow \Theta$ ist **instabiler Knoten**.

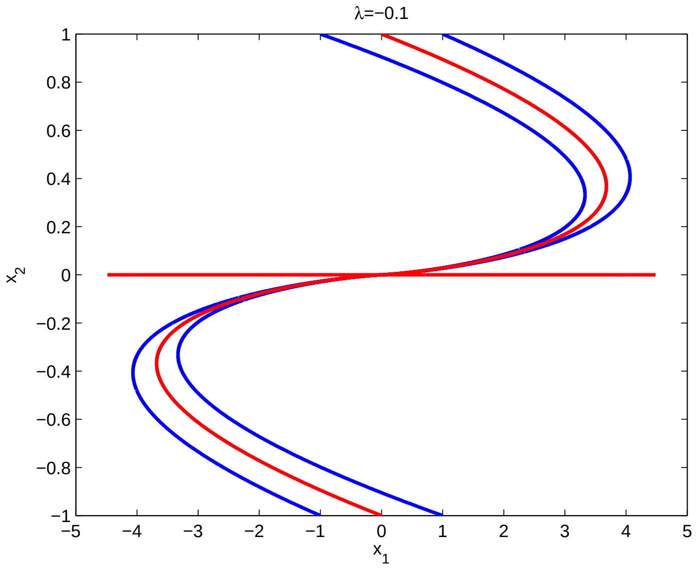


Knoten

2. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Longrightarrow \Phi(t,x) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} x_1 + t\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

   (a) $\lambda < 0 \Rightarrow \Theta$ ist **stabiler Knoten**.

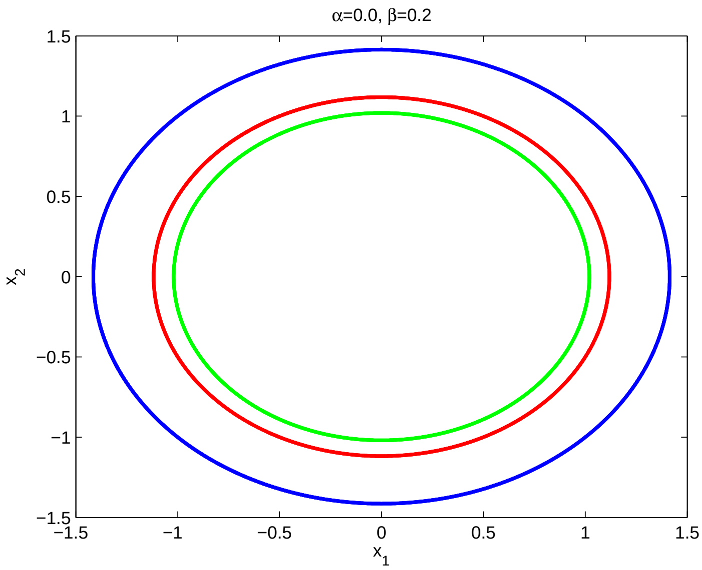
   (b) $\lambda > 0 \Rightarrow \Theta$ ist **instabiler Knoten**.



Knoten

3. $A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi(t,x) = e^{\alpha t}\begin{bmatrix} x_1 \cos\beta t - x_2 \sin\beta t \\ x_1 \sin\beta t + x_2 \cos\beta t \end{bmatrix} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\begin{bmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta) \\ e^{\alpha t}\sin(\beta t + \theta) \end{bmatrix},$

   wobei $\cos\theta = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $0 \le \theta < \pi$.

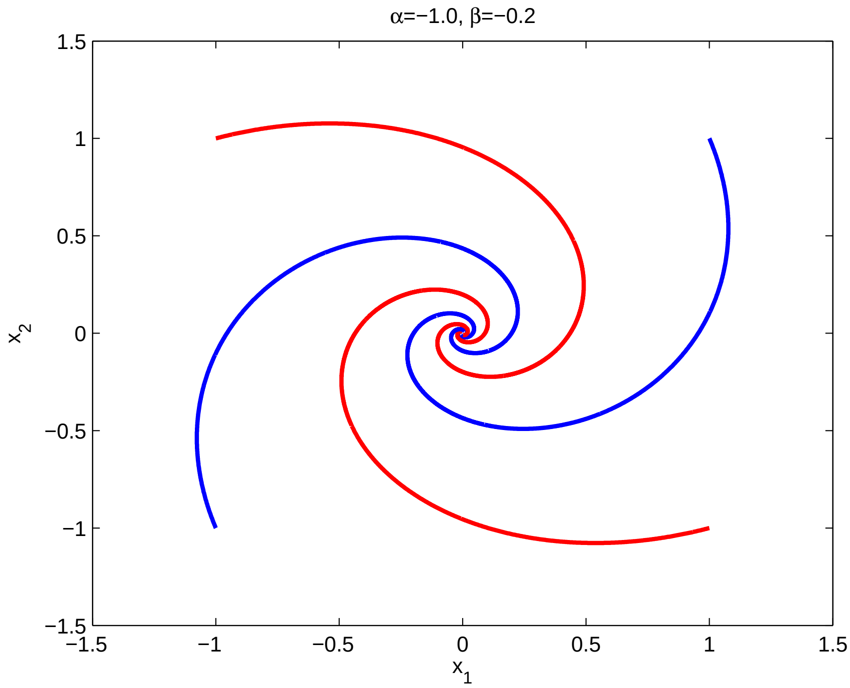


Zentrum

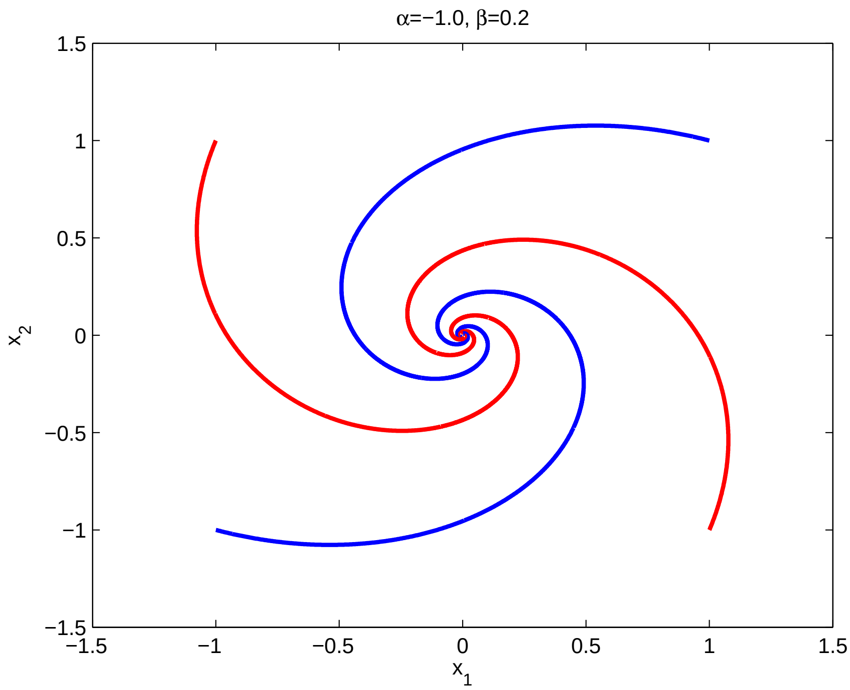
(a) $\alpha = 0 \Rightarrow$ Die Orbits sind Kreise, Θ heißt **Zentrum**.

(b) $\alpha < 0 \Rightarrow \Theta$ ist **stabiler Fokus**.

(c) $\alpha > 0 \Rightarrow \Theta$ ist **instabiler Fokus**.



Fokus



Fokus

Zusammenfassung: Seien $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\delta = \det A$ und $\tau = \operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22}$. Dann ist das charakteristische Polynom von A gegeben durch

$$p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \tau\,\lambda + \delta\,.$$

Somit sind $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}\right)$ die Eigenwerte von A, und es gilt:

(a) Ist $\delta < 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 > 0\,,\ \lambda_2 < 0$), so ist Θ ein Sattelpunkt.

(b) Sind $\delta > 0$ und $\tau^2 - 4\delta \ge 0$ ($\Rightarrow \lambda_{1,2}$ sind reell und haben gleiches Vorzeichen), so ist Θ ein Knoten, und zwar ein stabiler für $\tau < 0$, ein instabiler für $\tau > 0$.

(c) Sind $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$ und $\tau \neq 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 = \overline{\lambda_2}\,,\ \mathsf{Re}\,\lambda_{1,2} \neq 0\,,\ \mathsf{Im}\,\lambda_{1,2} \neq 0$), dann ist Θ ein stabiler ($\tau < 0$) bzw. instabiler ($\tau > 0$) Focus.

(d) Sind $\delta > 0$ und $\tau = 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \neq 0\,,\ \mathsf{Re}\,\lambda_{1,2} = 0$), so ist Θ ein Zentrum.

Ist $\delta = 0$, so nennt man Θ einen **entarteten Gleichgewichtspunkt**. In diesem Fall ist Θ **kein** isolierter Gleichgewichtspunkt.

2.3 Die Jordan'sche Normalform, ein Stabilitätskriterium

Wir erinnern an einige Fakten aus der Linearen Algebra, die Jordansche Normalform betreffend:

(a) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $\lambda_j = \alpha_j + \mathbf{i}\beta_j$, $\overline{\lambda_j} = \alpha_j - \mathbf{i}\beta_j$, $j = k+1, \ldots, k+m$, mit $k + 2m = n$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $\beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann existiert eine Basis $\left\{u^1, \ldots, u^k, v^{k+1}, u^{k+1}, \ldots, v^{k+m}, u^{k+m}\right\}$ des Raumes $\mathbb{R}^n$, wobei die Vektoren u^j, $j = 1, \ldots, k$, und $w^{k+j} = u^{k+j} + \mathbf{i}v^{k+j}$, $j = 1, \ldots, m$, verallgemeinerte Eigenvektoren der Matrix A sind, so dass für die (invertierbare) Matrix $P = \left[u^1 \cdots u^k\, v^{k+1}\, u^{k+1} \cdots v^{k+m}\, u^{k+m}\right]$ die Beziehung

$$P^{-1} A\, P = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{bmatrix}$$

mit den Jordan-Blöcken B_j der Gestalt

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

im Fall eines reellen Eigenwertes $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, \ldots, k$, oder der Gestalt

$$\begin{bmatrix} D & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & D \end{bmatrix}$$

mit $D = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ und $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ im Fall eines komplexen Eigenwertes $\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta = \alpha_j + \mathbf{i}\beta_j$, $j = 1, \ldots, m$, gilt.

(b) Sind u^j , $j=1,\dots,k$, und $w^{k+j}=u^{k+j}+\mathbf{i}v^{k+j}$, $j=1,\dots,m$, verallgemeinerte Eigenvektoren der Matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, so dass das System $\left\{u^1,\dots,u^k,v^{k+1},u^{k+1},\dots,v^{k+m},u^{k+m}\right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, so ist $A=S{+}N$, wobei mit $P=\left[u^1\ \cdots\ u^k\ v^{k+1}\ u^{k+1}\ \cdots\ v^{k+m}\ u^{k+m}\right]$

$$P^{-1}SP=\begin{bmatrix}\lambda_1 &&&&& 0\\ &\ddots&&&&\\ &&\lambda_k&&&\\ &&&D_1&&\\ &&&&\ddots&\\ 0&&&&&D_m\end{bmatrix},\quad D_j=\begin{bmatrix}\alpha_j&-\beta_j\\ \beta_j&\alpha_j\end{bmatrix},$$

gilt und die Matrix $N=A-S$ nilpotent von der Ordnung $r\le n$ und mit der Matrix S vertauschbar ist, d.h., es gilt $N^r=\Theta$ und $S\,N=N\,S$. Es ist dann

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t(S+N)}=e^{tS}e^{tN}=Pe^{tP^{-1}SP}P^{-1}\left(I+t\,N+\cdots+\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,N^{r-1}\right)\\ &= P\,\mathrm{diag}\left[e^{\lambda_1 t},\dots,e^{\lambda_k t},e^{tD_1},\dots,e^{tD_m}\right]P^{-1}\left(I+t\,N+\cdots+\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,N^{r-1}\right), \end{aligned}$$

wobei (vgl. Folgerung 2.2,(c))

$$e^{tD_j}=e^{\alpha_j t}\begin{bmatrix}\cos(\beta_j t)&-\sin(\beta_j t)\\ \sin(\beta_j t)&\cos(\beta_j t)\end{bmatrix}.$$

Zur Beweisidee: Hat A nur einen Eigenwert λ, , so genügen $S=\lambda I$ und $N=A{-}S=A{-}\lambda I$ der Aussage, weil der verallgemeinerte Eigenunterraum zu λ mit $\mathbb{C}^n$ zusammenfällt und somit $(A{-}\lambda I)^n=\Theta$ gilt. Sind nun $\lambda_1,\dots\lambda_k$ sämtliche paarweise verschiedneen Eigenwerte der Matrix A, so gilt für die verallgemeinerten Eigenunterräume $V_j=V_{\lambda_j}$ die Beziehung

$$\mathbb{C}^n=V_1\oplus\ldots\oplus V_1\,,$$

wobei jeder Raum V_j invariant bezüglich A ist. Also hat $A|_{V_j}$ nur einen Eigenwert, und unter Verwendung der vorhergehenden Überlegung gewinnt man die Aussage (in komplexer Schreibweise). Für den Fall, dass $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und Paare konjugiert komplexer Eigenwerte auftreten, verwende man die Formeln

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix}\alpha&-\beta\\ \beta&\alpha\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\mathbf{i}&-\mathbf{i}\\ 1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha+\mathbf{i}\beta&0\\ 0&\alpha-\mathbf{i}\beta\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-\mathbf{i}&1\\ \mathbf{i}&1\end{bmatrix}\\ &=: T^{-1}\begin{bmatrix}\alpha+\mathbf{i}\beta&0\\ 0&\alpha-\mathbf{i}\beta\end{bmatrix}T \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{tD} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\mathbf{i}&-\mathbf{i}\\ 1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{(\alpha+\mathbf{i}\beta)t}&0\\ 0&e^{(\alpha-\mathbf{i}\beta)t}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-\mathbf{i}&1\\ \mathbf{i}&1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}e^{\alpha t}\cos(\beta t)&-e^{\alpha t}\sin(\beta t)\\ e^{\alpha t}\sin(\beta t)&e^{\alpha t}\cos(\beta t)\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 2.6 *Für* $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *haben wir* $\lambda_{1,2} = \pm 2\mathbf{i}$. *Die Lösung des entsprechenden AWP's lautet*

$$\varphi_{x^0}(t) = e^{t\,A}x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \cos 2t - 2x_2^0 \sin 2t \\ \frac{1}{2}x_1^0 \sin 2t + x_2^0 \cos 2t \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix}.$$

Es folgt

$$[\varphi_1(t)]^2 + 4[\varphi_2(t)]^2 = (x_1^0)^2 + 4(x_2^0)^2 = \text{const}\,,$$

d.h., die Lösungskurven sind Ellipsen.

Beispiel 2.7 *Wir berechnen* $e^{tA}x^0$ *für* $x^0 \in \mathbb{R}^3$ *und*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix A *hat nur den Eigenwert* 2 *mit den Eigenvektoren* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ *und* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. *Wir suchen einen verallgemeinerten Eigenvektor als Lösung des Systems*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich die Lösbarkeitsbedingung $\alpha = -\beta$, *so dass* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *Lösung ist. Wir wählen also als Basis des* $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

und erhalten

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sowie

$$P^{-1}A\,P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

als Jordan'sche Normalform der Matrix A. *Es folgt mit*

$$S = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

für die Lösung des entsprechenden AWP's

$$e^{tA}x^0 = P\,e^{t\,P^{-1}A\,P}P^{-1}x^0 = e^{2t}P(I + t\,N)P^{-1}x^0 = \begin{bmatrix} (x_2^0 t + x_1^0)e^{2t} \\ x_2^0 e^{2t} \\ (x_3^0 - x_2^0 t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Folgerung 2.8 (einfaches Stabilitätskriterium) *Es gilt*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi_{x^0}(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \Phi(t,x^0) = \Theta \quad \forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n$$

genau dann, wenn die Realteile aller Eigenwerte von A negativ (positiv) sind.

Folgerung 2.9 *Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ n-fache Nullstelle von $p_A(\lambda)$, so können wir in der Aussage* (b) *die Vektoren*

$$u^j = e^j := \left[\ \delta_{jk}\ \right]_{k=1}^n , \quad j = 1,\ldots,n ,$$

wählen und erhalten

$$A = \lambda\, I + N$$

mit einer nilpotenten Matrix N.

Beispiel 2.10 *Wir wenden Folgerung 2.9 auf die Matrix A des Beispiels 2.7 an und erhalten mit $\lambda = 2$ und $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ wegen $N^2 = \Theta$*

$$e^{t\,A}x^0 = e^{2\,t}(I + t\,N)x^0 = e^{2\,t} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} = e^{2\,t} \begin{bmatrix} x_1^0 + t\,x_2^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 - t\,x_2^0 \end{bmatrix}$$

wie in Beipsiel 2.7.

Beispiel 2.11 *Wir bestimmen die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = A\,x$, $x(0) = x^0$ für die Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Die Matrix A hat die Eigenwerte $\mathbf{i}$ und $-\mathbf{i}$. Es sind

$$w^1 = u^1 + \mathbf{i}\,v^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad w^2 = u^2 + \mathbf{i}\,v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ein Eigenvektor und ein verallgemeinerter Eigenvektor zum Eigenwert $\mathbf{i}$. Mit

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

folgt

$$S = P \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N = A - S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

also

$$\begin{aligned} e^{tA}x^0 &= P \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} P^{-1}(I + t\,N)x^0 \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ -t\sin t & \sin t - t\cos t & \cos t & -\sin t \\ \sin t + t\cos t & -t\,\sin t & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.4 Inhomogene lineare Systeme

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = A\,x + f(t) \tag{2.5}$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = x^0\,. \tag{2.6}$$

Wir wissen, dass

$$\mathcal{L} = \left\{ \varphi_c(t) = e^{tA}c : c \in \mathbb{R}^n \right\}$$

die Menge aller Lösungen der Gleichung (2.5) im Fall $f \equiv 0$ ist (vgl. Folgerung 2.4). Diese ist ein linearer Teilraum des Raumes $\mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Nach Folgerung 2.4 ist die **Anfangswertabbildung**

$$a_0 : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^n\,, \quad \varphi \mapsto \varphi(0)$$

eine bijektive lineare Abbildung. Somit hat der Lösungsraum $\mathcal{L}$ des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = A\,x$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Dimension $\dim \mathcal{L} = n$. Für eine Lösung von (2.5) machen wir den Ansatz der **Variation der Konstanten**

$$\psi(t) = e^{tA}c(t)\,.$$

Es folgt

$$c(t) = c(0) + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds\,.$$

Wählen wir $c(0) = x^0$, so erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung des AWPs (2.5),(2.6), nämlich

$$\psi_{x^0}(t) = e^{tA}\left[x^0 + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds\right] = e^{tA}x^0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds\,.$$

Ist $\left\{\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)\right\}$ irgendeine Basis von $\mathcal{L}$, so lässt sich jede Lösung von $\dot{x} = A\,x$ in der Form $\Phi(t)c$ mit $\Phi(t) = \left[\ \varphi^1(t) \quad \cdots \quad \varphi^n(t)\ \right]$ und $c \in \mathbb{R}^n$ schreiben. Da das AWP $\dot{x} = A\,x$, $x(0) = x^0$ eindeutig lösbar ist, ergeben sich die Invertierbarkeit von $\Phi(0)$ und die Formel $\Phi(t) = \Phi(0)e^{tA}$. Die Lösung von (2.5),(2.6) kann damit in der Form

$$\psi_{x^0}(t) = \Phi(t)\left[\Phi(0)^{-1}x^0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1} f(s)\,ds\right]$$

geschrieben werden.

2.5 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Es seien $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Wir suchen eine Funktion $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = g(t) \tag{2.7}$$

genügt. Diese Gleichung können wir als Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_1 x_n - \ldots - a_n x_1 + g(t) \end{aligned}$$

schreiben, d.h., als

$$\dot{x} = A\,x + f(t) \tag{2.8}$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Ist $\psi(t)$ Lösung von (2.7), so ist $\varphi(t) = \left[\ \psi(t) \quad \psi'(t) \quad \cdots \quad \psi^{(n-1)}(t)\ \right]^T$ Lösung von (2.8), und ist $\varphi(t) = \left[\ \varphi_1(t) \quad \cdots \quad \varphi_n(t)\ \right]^T$ Lösung von (2.8), so ist $\psi(t) = \varphi_1(t)$ Lösung von (2.7).

2.5.1 Die Struktur der Lösung

Das charakteristische Polynom der Matrix A aus (2.9) ist gleich

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\,.$$

Man nennt A die **Begleitmatrix** des Polynoms $p(\lambda)$. Der Rang der Matrix $A - \lambda I$ für A aus (2.9) ist stets $\geq n - 1$. Somit hat jeder Eigenwert der Matrix A die geometrische Vielfachheit 1. Hieraus ergibt sich, dass folgende Funktionen eine Basis des Lösungsraumes (ein sogenanntes **Fundamentalsystem** von Lösungen) der homogenen ($g(t) \equiv 0$) Gleichung (2.7) bilden:

- Ist $\mu \in \mathbb{R}$ m-fache Nullstelle des Polynoms $p(\lambda)$, so nehme man die Funktionen

  $$t^k e^{\mu t}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1\,,$$

  zum Fundamentalsystem hinzu.

- Ist $\alpha + \mathbf{i}\beta$ mit $\beta > 0$ eine m-fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so nehme man die Funktionen
$$t^k e^{\alpha t} \cos(\beta t)\,,\ t^k e^{\alpha t} \sin(\beta t)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1\,,$$
zum Fundamentalsystem hinzu.

Die Differenz zweier Lösungen der Gleichung (2.7) ist eine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung. Sind also $\{\varphi_k(t) : k = 1, \ldots, n\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung zu (2.7) und $\psi_s(t)$ eine **spezielle Lösung** der (inhomogenen) Gleichung (2.7), so ist die Lösungsmenge der Differentialgleichung (2.7) gleich
$$\mathcal{L} = \{c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) + \psi_s(t) : c_j \in \mathbb{R}\}\ .$$
Man nennt $c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) + \psi_s(t)$ die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung (2.7). Wie man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden kann, diskutieren wir am folgenden Beispiel und im Abschnitt 2.5.2. Aus den obigen Überlegungen ergibt sich auch, dass das zu (2.7) gehörende AWP von der Gestalt
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = g(t)\,, \quad y^{(k)}(0) = y_k^0\,,\ k = 0, \ldots, n-1\,,$$
mit gegebenen $y_k^0 \in \mathbb{R}$ ist.

Beispiel 2.12 *Wir betrachten die Differentialgleichung eines Federschwingers*
$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + k\,x = F\cos(\omega t)$$
mit dem AWP $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. *Dabei bezeichnen* $m > 0$ *die Größe der schwingenden Masse,* $\rho \geq 0$ *einen Reibungskoeffizienten und* $k > 0$ *die Federkonstante aus dem Hooke'schen Gesetz. Die rechte Seite beschreibt eine periodische äußere Kraft* ($\omega > 0$)*, die an der schwingenden Masse angreift. Wir schreiben diese Differentialgleichung in der Form*
$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = F_0\cos(\omega t)$$
mit $\alpha = \frac{\rho}{2m}$, $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$ *sowie* $F_0 = \frac{F}{m}$ *und betrachten die Fälle*

- $\alpha \geq \beta$ *(starke Dämpfung),*
- $0 < \alpha < \beta$ *(schwache Dämpfung),*
- $\alpha = 0$ *(harmonischer Federschwinger).*

Eine spezielle Lösung der (inhomogenen) Differentialgleichung bestimmen wir dabei mittels eines speziellen **Lösungsansatzes** *oder mittels* **Variation der Konstanten**.

2.5.2 Die Laplace-Transformation

Im Folgenden lernen wir eine Methode zur Lösung eines Anfangswertproblems für eine lineare Differentialgleichung bzw. für Systeme solcher Gleichungen kennen.

1. Es seien $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\sigma = \sigma(f) \in \mathbb{R}$ eine Zahl, so dass das uneigentliche Riemann-Integral
$$(\mathcal{L}f)(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

für alle $s > \sigma$ existiert. Wir nennen dann $(\mathcal{L}f)(s)$, $s > \sigma$ **Laplace-Transformierte** der Funktion f. Für $(\mathcal{L}f)(s)$ schreiben wir auch $F(s)$ oder auch $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Offenbar gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Big(\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)\Big)(s) = \alpha(\mathcal{L}f)(s) + \beta(\mathcal{L}g)(s)\,, \quad s > \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}\ .$$

Man sagt, die Funktion $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist von **exponentieller Ordnung** $\sigma \in \mathbb{R}$, wenn eine Konstante c existiert, so dass $|f(t)| \le c\,e^{\sigma t}$, $t \ge 0$, gilt. Ist $f \in \mathbf{C}[0,\infty)$ von exponentieller Ordnung σ, so existiert $(\mathcal{L}f)(s)$ für $s > \sigma$. In diesem Fall existiert $(\mathcal{L}f)(s)$ $\forall\, s > \sigma$.

2. Wir berechnen die Laplace-Transformierte für einige Funktionen $f(t)$. Dazu seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\mathcal{L}\left\{e^{(\alpha+\mathbf{i}\beta)t}\right\} = \frac{1}{s-\alpha-\mathbf{i}\beta}\,, \quad s > \alpha\,.$$

Hieraus erhält man

(a) $\mathcal{L}\{\cosh(\alpha t)\} = \dfrac{s}{s^2-\alpha^2}\,, \quad s > |\alpha|\,,$

(b) $\mathcal{L}\{\sinh(\alpha t)\} = \dfrac{\alpha}{s^2-\alpha^2}\,, \quad s > |\alpha|\,,$

(c) $\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\cos(\beta t)\right\} = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\,, \quad s > \alpha$

(d) $\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right\} = \dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\,, \quad s > \alpha\,.$

3. **Differentiationssatz**: Ist $f \in \mathbf{C}^{(k)}[0,\infty)$ und gilt

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f^{(j)}(t) = 0 \quad \forall\, j = 0,\ldots,k-1\,,\ s > \sigma\,,$$

so ist

$$\mathcal{L}\left\{f^{(k)}(t)\right\} = s^k \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} f^{(j)}(0)\,.$$

4. **Ähnlichkeitssatz**: Sind $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $s > \sigma$, und $\alpha > 0$, so gilt

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)\,, \quad s > \alpha\,\sigma\,.$$

5. **Dämpfungssatz**: Sind $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $s > \sigma$, und $a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t} f(t)\right\} = F(s-\alpha)\,, \quad s > \sigma + \alpha\,.$$

6. **Eindeutigkeitssatz**: Sei $f \in \mathbf{C}^{(1)}[0,\infty)$ von exponentieller Ordnung σ. Dann gilt: Aus $(\mathcal{L}f)(s) = 0\ \forall\, s > \sigma$, folgt $f(t) = 0\ \forall\, t \ge 0$ (siehe z.B. [1, Satz 9.3]).

7. **Faltungssatz**: Sind $f, g \in \mathbf{C}[0,\infty)$ von exponentieller Ordnung σ und

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\,, \quad t \ge 0\,,$$

so ist

$$(\mathcal{L}(f*g))(s) = (\mathcal{L}f)(s)\cdot(\mathcal{L}g)(s)\,, \quad s > \sigma\,.$$

Beispiel 2.13 *Wir lösen das AWP (vgl. Beispiel 2.12)*

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = F_0\cos(\omega t)\,, \quad x(0) = x_0\,,\ \dot{x}(0) = v_0\,,$$

für den Fall der schwachen Dämpfung $\beta > \alpha > 0$ durch Anwendung der Laplace-Transformation.

Kapitel 3

Dynamische Systeme und autonome Differentialgleichungssysteme

3.1 Der Begriff des dynamischen Systems

Definition 3.1 *Unter einem* **dynamischen System** *bzw. einem (globalen)* **Fluss** *auf der nichtleeren offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine stetige Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, welche den folgenden zwei Axiomen genügt (vgl. Folgerung 2.4):*

(F1) $\Phi(0, x) = x$ *für alle* $x \in M$,

(F2) $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$ *für alle* $t, s \in \mathbb{R}$ *und alle* $x \in M$.

Die Menge M heißt **Phasenraum** *und $\mathbb{R}\times M$* **erweiterter Phasenraum**. *Unter der* **Flusslinie** *φ_x versteht man die Bewegung des Punktes $x \in M$ unter der Wirkung des Flusses Φ, d.h. die Abbildung $\varphi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$, $t \mapsto \Phi(t, x)$. Das Bild $\varphi_x(\mathbb{R}) = \{\varphi_x(t) : t \in \mathbb{R}\}$ heißt* **Bahn**, **Orbit** *oder* **Trajektorie** *des Punktes x.*

Kennt man also alle Flusslinien φ_x, $x \in M$, so kennt man auch den Fluss Φ, und umgekehrt. Die Flussaxiome sind äquivalent zu

(F1) $\varphi_x(0) = x$ für alle $x \in M$,

(F2) $\varphi_y(s) = \varphi_x(s + t)$ für $y = \varphi_x(t)$ und für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und alle $x \in M$.

Haben zwei Orbits einen Punkt gemeinsam, so sind sie identisch. Das kann man auch so formulieren: Die Relation $x \sim y \iff y \in \varphi_x(\mathbb{R})$ auf M ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind dabei die Trajektorien.

Definition 3.2 *Wir unterscheiden folgende Typen von Flusslinien:*

(a) *Ist die Flusslinie φ_x konstant (d.h. $\varphi_x(t) = x\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ wegen* (F1)*), so heißt x* **Fixpunkt**, **Gleichgewichtspunkt** *oder* **stationärer Punkt**.

(b) *Eine Flusslinie φ_x heißt* **periodisch** *bzw. der zugehörige Punkt $x \in M$ heißt* **periodischer Punkt** *des Flusses Φ, wenn ein kleinstes $p > 0$ existiert, so dass $\Phi(t + p, x) = \Phi(t, x)$ für ein $t \in \mathbb{R}$ gilt. (Aus dem zweiten Flussaxiom folgt, dass diese Beziehung dann für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.)*

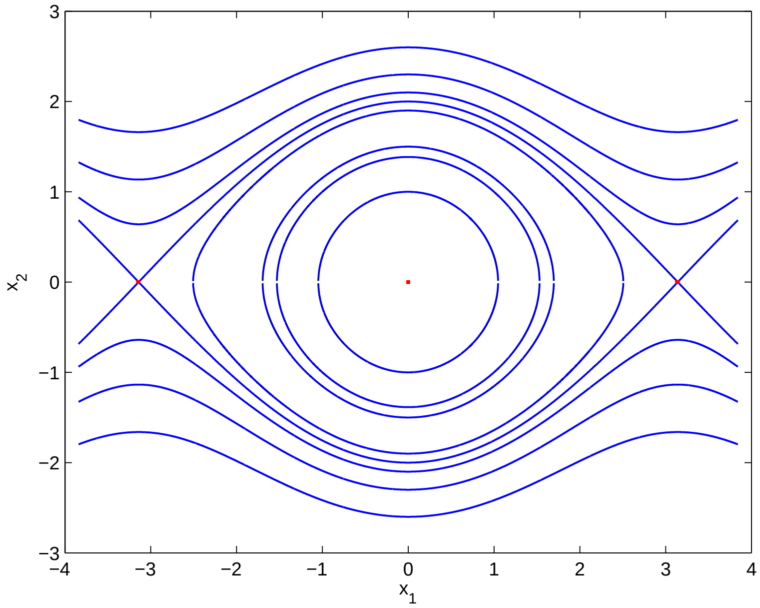
(c) *Die Flusslinie φ_x heißt* **injektiv**, *wenn die Abbildung $\varphi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ injektiv ist.*

Satz 3.3 *Außer konstanten, periodischen und injektiven Flusslinien gibt es keine anderen Typen von Flusslinien.*

Beispiel 3.4 *Die Differentialgleichung des ungedämften Pendels $\ddot{y} + \sin y = 0$ ist äquivalent zu dem System*

$$\dot{x}_1 = x_2 \,, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 \,. \tag{3.1}$$

Betrachtet man (numerisch berechnete) Lösungskurven dieses Systems, so findet man neben stationären Punkten sowohl periodische als auch injektive "Flusslinien". Wir haben in den weiteren Betrachtungen zu klären, ob diese Lösungskurven wirklich Flusslinien eines dynamischen Systems sind.



Lösungskurven des Systems (3.1)

Definition 3.5 *Unter dem* **Geschwindigkeitsfeld** *$v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eines bzgl. $t \in \mathbb{R}$ differenzierbaren Flusses $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ versteht man das Vektorfeld*

$$v(x) = \frac{\partial \Phi(0, x)}{\partial t} = \dot{\varphi}_x(0) \,.$$

Im Fall eines bzgl. $t \in \mathbb{R}$ differenzierbaren Flusses sind die Flusslinien $\varphi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = v(x) \,.$$

Wir gehen nun umgekehrt vor.

Definition 3.6 *Es sei $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Vektorfeld. Dann nennt man*

$$\dot{x} = v(x) \tag{3.2}$$

bzw. ausführlich geschrieben

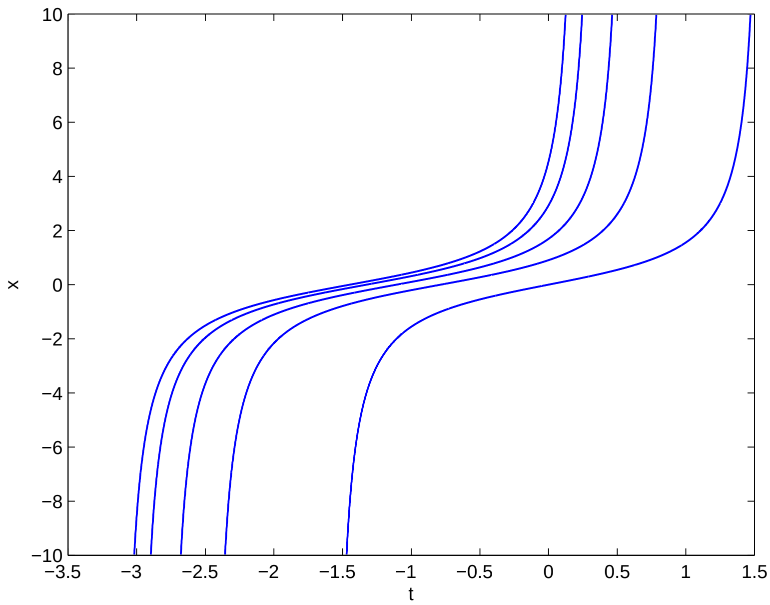
$$\dot{x}_j = v_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

ein **autonomes Differentialgleichungssystem**. *Unter einer* **Lösung** *von* (3.2) *versteht man einen differenzierbaren Weg* $\varphi : (a,b) \longrightarrow M$, *so dass* $\dot{\varphi}(t) = v(\varphi(t))$ *für alle* $t \in (a,b)$ *gilt. Das Bild von* φ, *d.h.* $\{\varphi(t) : a < t < b\}$, *heißt* **Lösungskurve** *oder* **Integralkurve** *von* (3.2). *Diese Kurve bzw. die Lösung* $\varphi : (a,b) \longrightarrow M$ *nennt man* **maximal**, *wenn das Definitionsinterval nicht auf ein Intervall* (α_0, β_0) *mit* $\alpha_0 < \alpha$ *oder* $\beta_0 > \beta$ *vergrößert werden kann, so dass auch* $\varphi : (\alpha_0, \beta_0) \longrightarrow M$ *Lösung von* (3.2) *ist.*

Beispiel 3.7 *Seien* $M = \mathbb{R}$, $v(x) = 1 + x^2$ *(vgl. Abschnitt 1.3). Die Lösung* $\varphi(t) = \tan t$ *ist auf* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *erklärt und lässt sich nicht darüber hinaus differenzierbar fortsetzen. Aber das AWP*

$$\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = x^0$$

hat die (eindeutige) maximale Lösung $\varphi_{x^0} : \left(-\frac{\pi}{2} - t_0, \frac{\pi}{2} - t_0\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \tan(t + t_0)$, *wobei* $t_0 = \arctan x^0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Lösungen zu Beispiel 3.7 für $x^0 = 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8$

3.2 Das Existenz- und Eindeutigkeitstheorem

3.2.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Wir erinnern an den Banachschen Fixpunktsatz.

1. Es seien (E, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : E \longrightarrow E$ eine kontrahierende Abbildung, d.h., es gibt eine Zahl $q \in (0,1)$, so dass

$$d(f(x), f(y)) \le q\, d(x,y) \quad \forall\, x, y \in E$$

gilt. Dann ist $f : E \longrightarrow E$ auch stetig, d.h., aus $x_n \longrightarrow x$ in E folgt $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ in E.

2. Sind $x_0 \in E$ beliebig gewählt und $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (Methode der sukzessiven Approximation) so ist $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge, so dass ein $x^* \in E$ existiert mit $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$.

3. Aus $x_{n+1} = f(x_n)$ und aus der Stetigkeit von f folgt $x^* = f(x^*)$, d.h., der Punkt x^* ist Fixpunkt der Abbildung f.

4. Die kontrahierende Abbildung $f : E \longrightarrow E$ hat nur einen Fixpunkt.

5. Es gilt die a-priori-Abschätzung
$$d(x_n, x^*) \le \frac{q^n d(x_1, x_0)}{1-q}.$$

3.2.2 Lokale Existenz- und Eindeutigkeitsaussage

Im Weiteren sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

Definition 3.8 *Wir nennen ein Vektorfeld $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$* **lokal Lipschitz-stetig***, wenn für jede abgeschlossene Kugel $K_r(x^0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| \le r\right\} \subset M$ eine Konstante $L = L(r, x^0)$ existiert, so dass*
$$|v(x) - v(y)| \le L|x - y| \quad \forall\, x, y \in K_r(x^0) \tag{3.3}$$
gilt.

Bemerkung 3.9 *Ist $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig.*

Wir betrachten das AWP
$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x^0 \in M. \tag{3.4}$$
Ist $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (3.4), so folgt durch Integration von 0 bis $t \in (a, b)$
$$\varphi(t) = x^0 + \int_0^t v(\varphi(s))\, ds, \quad t \in (a, b). \tag{3.5}$$
Jede stetige Lösung dieser Gleichung ist auch Lösung von (3.4). Durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes auf die Integralgleichung (3.5) erhalten wir folgende lokale Existenz- und Eindeutigkeitsaussage.

Satz 3.10 *Ist $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, so existiert zu jedem $x^0 \in M$ ein $a > 0$, so dass das AWP (3.4) auf dem Intervall $(-a, a)$ eine eindeutige Lösung besitzt.*

Beispiel 3.11 *Wenden wir die Methode der sukzessiven Approximation auf die zu dem AWP $\dot{x} = x$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ $(M = \mathbb{R})$ gehörende Integralgleichung*
$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(s)\, ds$$
mit $\varphi_0(t) = x_0$ an, so erhalten wir
$$\varphi_n(t) = x_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{n!}.$$

3.2.3 Die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten

Lemma 3.12 *Es seien $a > 0$ und $u : [0, a] \longrightarrow [0, \infty)$ stetig. Ferner mögen Konstanten $B \geq 0$ und $K \geq 0$ existieren, so dass*

$$u(t) \leq B + K \int_0^t u(s)\, ds \quad \forall\, t \in [0, a]$$

gilt. Dann ist

$$u(t) \leq B\, e^{Kt} \quad \forall\, t \in [0, a]\,.$$

Satz 3.13 *Ist $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, so existieren zu jedem $x^0 \in M$ ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass für eine Lösung $\varphi(t) = \varphi_{x^0}(t)$ des AWPs (3.4) und für jede Lösung $\psi(t) = \varphi_{y^0}(t)$ des AWPs*

$$\dot{x} = v(x)\,, \quad x(0) = y^0 \in U_\varepsilon(x^0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < \varepsilon \right\}$$

gilt

$$|\psi(t) - \varphi(t)| \leq |y^0 - x^0| e^{K|t|}\,, \quad t \in (-\delta, \delta)\,.$$

(Insbesondere haben alle diese Lösungen $\psi(t)$ ein gemeinsames Definitionsintervall $(-\delta, \delta)$.) Dabei ist die Konstante $K > 0$ von $y^0 \in U_\varepsilon(x^0)$ unabhängig.

Die Werte $\varphi_x(t)$, $t \in (-\delta, \delta)$, hängen also stetig von den Anfangswerten x ab.

3.2.4 Existenz- und Eindeutigkeitstheorem. Der Begriff des lokalen Flusses

Theorem 3.14 *Sind $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, so existiert zu jedem $x^0 \in M$ genau eine maximale Lösung $\varphi_{x^0} : (a_{x^0}, b_{x^0}) \longrightarrow M$ des AWPs $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x^0$.*

Wir definieren mit den Bezeichnungen des Theorems 3.14

$$\mathcal{A} := \{(t, x) : x \in M\,,\ t \in (a_x, b_x)\} \subset \mathbb{R} \times M$$

und

$$\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M\,, \quad (t, x) \mapsto \varphi_x(t)\,.$$

Dann gilt $0 \in (a_x, b_x)$ für alle $x \in M$ und

($\mathrm{F}_\ell 1$) $\Phi(0, x) = x \ \ \forall\, x \in M\,.$

Für $t_0 \in (a_x, b_x)$ und $t \in (a_y, b_y)$ mit $y = \Phi(t_0, x)$ gilt $\varphi_x(t_0) = y$ und mit $\varphi(t) := \varphi_x(t + t_0)$

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_x(t + t_0) = v(\varphi_x(t + t_0)) = v(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad \varphi(0) = y\,.$$

Aus Theorem 3.14 folgt

$$\Phi(t + t_0, x) = \varphi_x(t + t_0) = \varphi(t) = \varphi_y(t) = \Phi(t, \Phi(t_0, x))\,.$$

Also:

($\mathrm{F}_\ell 2$) $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x) \ \ \forall\, x \in M$ und $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$ mit $(t, x) \in \mathcal{A}$ und $(s, \Phi(t, x)) \in \mathcal{A}\,.$

Definition 3.15 *Eine stetige Abbildung $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M$ nennen wir* **lokalen Fluss**, *wenn*

$$\mathcal{A} = \{(t,x) : x \in M,\, a_x < t < b_x\} \subset \mathbb{R} \times M$$

mit $-\infty \le a_x < 0 < b_x \le +\infty \;\forall\, x \in M$ die Eigenschaft hat, dass für jedes $x^0 \in M$ ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$ existieren, so dass $(-\delta,\delta) \times U_\varepsilon(x^0) \subset \mathcal{A}$ gilt, und wenn die zwei Flussaxiome $(\mathrm{F}_\ell 1)$ und $(\mathrm{F}_\ell 2)$ erfüllt sind. Die Abbildungen $\varphi_x : (a_x, b_x) \longrightarrow M$, $t \mapsto \Phi(t,x)$ heißen wieder **Flusslinien** *und $\Gamma_x = \{\varphi_x(t) : a_x < t < b_x\}$* **Orbit, Trajektorie oder Bahnkurve** *des Punktes $x \in M$. Das Intervall (a_x, b_x) nennen wir* **Lebensintervall** *von $x \in M$. Ist $-\infty < a_x$ $(b_x < \infty)$, so sagt man, dass x endliches unteres (oberes) Alter hat.*

Satz 3.16 *Sind $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $\varphi_{x^0} : (a_{x^0}, b_{x^0}) \longrightarrow M$ die maximalen Lösungen von $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x^0$, so ist $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M$, $(t,x) \mapsto \varphi_x(t)$ ein lokaler Fluss, wobei $\mathcal{A} = \{(t,x) : x \in M,\, a_x < t < b_x\}$.*

Bemerkung 3.17 *Ein beliebiger lokaler Fluss $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M$ hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Jedes $x^0 \in M$ besitzt eine Umgebung $U_\varepsilon(x^0)$, so dass alle $x \in U_\varepsilon(x^0)$ ein gemeinsames Lebensintervall haben.*

(b) *Ist $M_0 \subset M$ kompakt, so haben alle $x \in M_0$ ein gemeinsames Lebensintervall.*

(c) *Hat $x \in M$ endliches unteres (oberes) Alter a_x (b_x) und ist $M_0 \subset M$ kompakt, so existiert ein $t^* \in (a_x, b_x)$ mit $\varphi_x(t) \notin M_0 \;\forall\, t \in (a_x, t^*)$ $(\forall\, t \in (t^*, b_x))$.*

3.2.5 Die Universalität autonomer Systeme

(a) Eine autonome Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{3.6}$$

mit $f : M \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ kann äquivalent als autonomes Differentialgleichungssystem geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= x_3\,, \\ &\;\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n\,, \\ \dot{x}_n &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dabei ist $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann Lösung von (3.6), wenn

$$(\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}) : (a,b) \longrightarrow M$$

Lösung von (3.7) ist.

Folgerung 3.18 *Sind $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig, so existiert zu jedem $x^0 \in M$ genau eine maximale Lösung $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ des AWPs*

$$x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)})\,, \quad x(0) = x_1^0\,,\; x'(0) = x_2^0\,,\; \ldots\,,\; x^{(n-1)}(0) = x_n^0\,.$$

(b) Ein nichtautonomes Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = v(t, x) \tag{3.8}$$

mit $v : M \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist äquivalent zu dem System

$$\dot{x}_0 = 1\,, \quad \dot{x} = v(x_0, x_1, \dots, x_n)\,. \tag{3.9}$$

Dabei ist $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann Lösung von (3.8), wenn $(t,\varphi) : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $t \mapsto (t, \varphi(t))$ Lösung von (3.9) ist.

Folgerung 3.19 *Sind $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge und $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, so gibt es zu jedem $(t_0, x^0) \in M$ genau eine maximale Lösung $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des AWPs*

$$\dot{x} = v(t,x)\,, \quad x(t_0) = x^0\,.$$

Mittels einer einfachen Modifikation des Beweises von Satz 3.10 kann man zeigen, dass Folgerung 3.19 gültig bleibt, falls $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich x lokal Lipschitz-stetig ist, d.h., für jede abgeschlossene Kugel $K_r(t_0, x^0) \subset M$ existiert ein $L \in \mathbb{R}$ mit $|v(t,x) - v(t,y)| \le L\,|x-y|$ für alle $(t,x), (t,y) \in K_r(t_0, x^0)$.

3.2.6 Global integrierbare Vektorfelder

Definition 3.20 *Ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **global integrierbar**, *wenn der entsprechende lokale Fluss auf $\mathbb{R} \times M$ definiert ist.*

Folgerung 3.21 *Es sei $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Existieren Konstanten $r_0 > 0$ und $\tau_0 > 0$, so dass*

$$|v(x)| \le \frac{|x|}{\tau_0} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus U_{r_0}(\Theta)$$

gilt, so ist v global integrierbar.

3.2.7 Lineare Systeme (variable Koeffizienten)

(a) Für stetige Funktionen $a_{jk} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten wir das lineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{3.10}$$

oder das zugehörige homogene System

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3.11}$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n\,, \tag{3.12}$$

wobei $A(t) = \left[\ a_{jk}(t)\ \right]_{j=1,k=1}^{n\quad n}$ und $t_0 \in (a,b)$.

Folgerung 3.22 *Unter den gemachten Voraussetzungen besitzt das AWP* (3.10),(3.12) *eine eindeutige Lösung $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*

(b) Es seien $\mathbf{C}^{(1)}((a,b),\mathbb{R}^n)$ der lineare Raum der auf (a,b) stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und

$$\mathcal{L} = \left\{ \varphi \in \mathbf{C}^{(1)}((a,b),\mathbb{R}^n) : \dot\varphi(t) = A(t)\varphi(t),\ t \in (a,b) \right\}$$

der Lösungsraum des homogenen Systems (3.11). Die Anfangswertabbildung

$$a_{t_0} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^n\,, \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)$$

ist nach Folgerung 3.22 linear und bijektiv, so dass $\dim \mathcal{L} = n$ gilt. Eine Basis $\left\{\Phi^1, \ldots \Phi^n\right\}$ von $\mathcal{L}$ nennt man **Fundamentalsystem** von Lösungen des Systems (3.11). Mit $\Phi(t)$ bezeichnen wir die Matrix $\left[\begin{array}{ccc} \Phi^1(t) & \cdots & \Phi^n(t) \end{array}\right]$. Wiederum nach Folgerung 3.22 besitzt das System $\Phi(t_0)c = x^0$ für jedes $t_0 \in (a,b)$ und jedes $x^0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $c \in \mathbb{R}^n$. Also gilt

$$\det \Phi(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in (a,b)\,.$$

Ist umgekehrt $\det \Phi(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in (a,b)$ und ein beliebiges System $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\} \subset \mathcal{L}$, so folgt mit $\varphi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x^0$

$$\dot\varphi(t) = \dot\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x^0 = A(t)\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x^0 = A(t)\varphi(t)$$

und $\varphi(t_0) = x^0$. Also ist $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\}$ Fundamentalsystem von Lösungen von (3.11).

Folgerung 3.23 *Ein System* $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\} \subset \mathcal{L}$ *von n Lösungen des homogenen Systems* (3.11) *ist genau dann ein Fundamentalsystem zu* (3.11)*, wenn ein* $t_0 \in (a,b)$ *mit* $\det \Phi(t_0) \neq 0$ *existiert.* (*Es gilt dann* $\det \Phi(t) \neq 0$ *für alle* $t \in (a,b)$.)

(c) Wir betrachten die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0 \tag{3.13}$$

mit stetigen Funktionen $a_j : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann Lösung von (3.13), wenn $(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}) : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lösung von (3.11) mit

$$A(t) = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{array}\right]$$

ist (vgl. auch Abschnitt 2.5). Nach Folgerung 3.23 ist ein System $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von Lösungen von (3.13) genau dann ein Fundamentalsystem zu (3.13), wenn die **Wronski-Determinante**

$$W(t) = \det \left[\begin{array}{ccc} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{array}\right]$$

für ein $t = t_0 \in (a,b)$ und damit für alle $t \in (a,b)$ **nicht** verschwindet.

(d) Sind $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen zu (3.11) und $\varphi^0(t)$ eine **spezielle Lösung** von (3.10), so ist $\Phi(t)c + \varphi^0(t)$, $c \in \mathbb{R}^n$ die **allgemeine Lösung** von (3.10). Aus (3.12) folgt dann
$$c = \Phi(t_0)^{-1}\left[x^0 - \varphi^0(t_0)\right] .$$
Mittels der Methode der **Variation der Konstanten** findet man für das AWP (3.10), (3.12) auch die Lösungsdarstellung (vgl. Abschnitt 2.4)
$$\varphi(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds + \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x^0 .$$

Kapitel 4

Stabilitätstheorie

4.1 Die Ljapunov'sche Methode

Im Weiteren seien $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $\Phi(t,x)$ der (lokale) Fluss des Systems $\dot{x} = v(x)$.

Definition 4.1 *Ein Punkt $x^* \in M$ mit $v(x^*) = \Theta$ heißt* **stabiler** *Gleichgewichtspunkt des Systems $\dot{x} = v(x)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$|\Phi(t,x) - x^*| < \varepsilon \quad \forall\, x \in U_\delta(x^*)\,,\ \forall\, t \geq 0\,.$$

Er heißt **asymptotisch stabil***, wenn er stabil ist und wenn ein $\eta > 0$ existiert, so dass*

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = x^* \quad \forall\, x \in U_\eta(x^*)\,.$$

Der Gleichgewichtspunkt x^* heißt **instabil***, wenn er nicht stabil ist.*

Definition 4.2 *Es sei $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Unter $\dot{L}(x)$ verstehen wir die Ableitung von L entlang der Lösungskurven von $\dot{x} = v(x)$, d.h.*

$$\dot{L}(x) = \frac{d}{dt} L\left(\Phi(t,x)\right)\Big|_{t=0} = L'\left(\Phi(0,x)\right)\dot{\Phi}(0,x) = L'(x)v(x)\,.$$

Satz 4.3 *Es seien $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sowie $v(x^*) = \Theta$ für ein $x^* \in M$. Ferner seien $L(x^*) = 0$ und $L(x) > 0$ für alle $x \in M \setminus \{x^*\}$.*

(a) *Gilt $\dot{L}(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in M$, so ist x^* stabil.*

(b) *Gilt $\dot{L}(x) < 0 \quad \forall\, x \in M \setminus \{x^*\}$, so ist x^* asymptotisch stabil.*

(c) *Gilt $\dot{L}(x) > 0 \quad \forall\, x \in M \setminus \{x^*\}$, so ist x^* instabil.*

Eine Funktion $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$, mit der man diesen Satz anwenden kann, heißt **Ljapunov-Funktion**. Es sei bemerkt, dass die Aussagen des Satzes 4.3 gültig bleiben, wenn die Voraussetzungen nur in einer offenen Umgebung $U(x^*) \subset M$ des Gleichgewichtspunktes x^* erfüllt sind.

Beispiel 4.4 *Für das System* $\dot{x}_1 = -x_2^3$, $\dot{x}_2 = x_1^3$ *ist* $L(x) = x_1^4 + x_2^4$ *eine Ljapunov-Funktion. Der Punkt* Θ *ist stabiler Gleichgewichtspunkt, aber nicht asymptotisch stabil.*

Beispiel 4.5 *Die Funktion* $L(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$ *ist Ljapunov-Funktion für das System*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3\,, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3 - x_2^3\,, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - x_3^3\,. \end{aligned}$$

Der Punkt Θ *ist asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt, obwohl alle Eigenwerte der Matrix* $A = v'(\Theta)$ *verschwindenden Realteil haben.*

Beispiel 4.6 *Für eine lokal Lipschitz-stetige Funktion* $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit* $y\,q(y) > 0$, $y \neq 0$ *betrachten wir die Differentialgleichung*

$$\ddot{y} + q(y) = 0\,.$$

Für das zugehörige System $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -q(x_1)$ *ist*

$$L(x) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} q(s)\,ds = \text{kinetische Energie} + \text{potentielle Energie} =: \textbf{totale Energie}$$

eine Ljapunov-Funktion. Entlang der Lösungskurven bleibt die totale Energie konstant, da offenbar $\dot{L}(x) \equiv 0$ *gilt. Der Punkt* Θ *ist stabiler Gleichgewichtspunkt.*

Definition 4.7 *Seien jetzt* $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ *und* $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *habe einen lokal Lipschitz-stetigen Gradienten. Wir schreiben* $H(x,y)$ *mit* $x, y \in \mathbb{R}^n$. *Ein System*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}\,, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{4.1}$$

heißt **Hamiltonsches System** *mit n Freiheitsgraden. Die Funktion* $H(x,y)$ *nennt man* **Hamilton-Funktion** *oder* **totale Energie** *des Systems* (4.1).

Die totale Energie des Systems (4.1) bleibt konstant entlang der Lösungskurven von (4.1). Das folgt aus der Tatsache, dass entlang einer Lösungskurve gilt

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x}^T & \dfrac{\partial H}{\partial y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{bmatrix} = 0\,.$$

Beispiel 4.8 *Die Gleichung des ungedämpften nichtlinearen Pendels* $\ddot{x} + \sin x = 0$ *(vgl. Beispiel 3.4) ist äquivalent zu dem Hamilton–System*

$$\dot{x} = y\,, \quad \dot{y} = -\sin x$$

mit der Hamilton–Funktion

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x\,.$$

Die in der Abbildung zu Beispiel 3.4 zu sehenden Lösungskurven liegen also auf Niveaulinien dieser Funktion.

Beispiel 4.9 *Jedes* **Newtonsche System** $\ddot{x} = f(x)$ *(mit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *lokal Lipschitz-stetig) ist ein Hamilton-System mit der totalen Energie*

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \int_0^x f(s)\,ds\,.$$

Definition 4.10 *Sei* $M \subset \mathbb{R}^n$ *, und* $\Psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *habe einen lokal Lipschitz-stetigen Gradienten* $\operatorname{grad}\Psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *. Das System*

$$\dot{x} = -\operatorname{grad}\Psi(x) \tag{4.2}$$

heißt **Gradientensystem** *auf* M *.*

Ein Punkt $x^* \in M$ ist genau dann Gleichgewichtspunkt von (4.2), wenn $\operatorname{grad}\Psi(x^*) = \Theta$ gilt, d.h. wenn x^* ein sogenannter **kritischer** oder **singulärer Punkt** von Ψ ist. In regulären Punkten $x \in M$ von Ψ (d.h. $\operatorname{grad}\Psi(x) \neq \Theta$) steht $\operatorname{grad}\Psi(x)$ senkrecht auf der Niveaulinie $\{y \in M : \Psi(y) = \Psi(x)\}$.

Sei x^* kritischer (singulärer) Punkt von Ψ . Wir setzen $L(x) = \Psi(x) - \Psi(x^*)$. Dann gilt für das System (4.2)

$$\dot{L}(x) = [\operatorname{grad}\Psi(x)]^T[-\operatorname{grad}\Psi(x)] = -\left|\operatorname{grad}\Psi(x)\right|^2 < 0$$

für alle $x \neq x^*$ aus einer offenen Umgebung von x^* , falls x^* ein strenges lokales Extremum ist. Somit ergibt sich folgender Satz.

Satz 4.11 *Ein strenges lokales Minimum von* $\Psi(x)$ *ist ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt des Gradientensystems* (4.2)*.*

4.2 Das Theorem von Hartman-Grobman

Der Fluss zum Differentialgleichungssystem $\dot{x}_1 = -x_1$, $\dot{x}_2 = x_2 + x_1^2$, d.h. $\dot{x} = v(x)$ mit $v(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}$ ist gegeben durch

$$\Phi(t, x) = \begin{bmatrix} x_1 e^{-t} \\ x_2 e^t + \frac{x_1^2}{3}(e^t - e^{-2t}) \end{bmatrix}.$$

Wir definieren $H(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{x_1^2}{3} \end{bmatrix}$ und erhalten

$$H(\Phi(t, x)) = \begin{bmatrix} x_1 e^{-t} \\ \left(x_2 + \frac{x_1^2}{3}\right) e^t \end{bmatrix} = e^{tA} H(x)\,,$$

wobei $A = v'(\Theta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Die Abbildung $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bildet also Lösungskurven des nichtlinearen Systems auf Lösungskurven des linearen Systems $\dot{x} = A\,x$ ab. Der folgende Satz liefert die Verallgemeinerung dieses Beispiels.

Satz 4.12 (Hartman-Grobman) *Seien $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $v(\Theta) = \Theta$, und $A = v'(\Theta)$ habe keinen Eigenwert mit verschwindendem Realteil. Mit $\Phi(t,x)$ bezeichnen wir den (lokalen) Fluss zum System $\dot{x} = v(x)$. Dann existieren zwei offene Mengen $U, V \subset M$, die den Punkt Θ enthalten, und ein Homöomorphismus $H : U \longrightarrow V$, so dass für jedes $x \in U$ ein $\delta > 0$ mit*

$$H(\Phi(t,x)) = e^{tA} H(x) \quad \forall\, t \in (-\delta, \delta)$$

existiert.

D.h., H überführt Orbits des Systems $\dot{x} = v(x)$ aus einer Umgebung des Gleichgewichtspunktes in Orbits des linearen Systems $\dot{x} = Ax$. Dabei bleibt die Parametrisierung bzgl. der Zeit erhalten.

Satz 4.13 *Es seien $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $\Theta \in M$ und $v(x) = A\,x + g(x)$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lim\limits_{x\to\Theta} \dfrac{|g(x)|}{|x|} = 0$. Sind die Realteile aller Eigenwerte von A negativ, so ist Θ asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt des Systems $\dot{x} = v(x)$.*

Bemerkung 4.14 *Sind $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $\theta \in M$ und $v(\Theta) = \Theta$, so sind die Voraussetzungen des Satzes 4.13 bzgl. $g(x)$ mit $A = v'(\Theta)$ erfüllt. Der Beweis von Satz 4.13 lässt sich leicht auf die Situation*

$$v(t,x) = A\,x + g(t,x) \quad \textit{mit} \quad \lim_{x\to\Theta} \frac{|g(t,x)|}{|x|} = 0 \ \textit{glm. bzgl. } t \in [0,\infty)$$

übertragen. Man kann auch zeigen, dass der Gleichgewichtspunkt Θ instabil ist, falls ein Eigenwert von A positiven Realteil hat.

4.3 Die van der Pol'sche Gleichung

Wir betrachten eine Gleichung der Gestalt

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{4.3}$$

mit gegebenen Lipschitz-stetigen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $g(0) = 0$ sei. Die Gleichung (4.3) ist äquivalent zu dem System

$$\dot{x}_1 = x_2 - F(x_1)\,, \quad \dot{x}_2 = -g(x_1)\,, \tag{4.4}$$

wobei $F(x_1) = \displaystyle\int_0^{x_1} f(s)\,ds$. Ist nämlich $[x_1(t), x_2(t)]^T$ eine Lösung von (4.4), so gilt

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 - f(x_1)\dot{x}_1 = -g(x_1) - f(x_1)\dot{x}_1\,,$$

so dass $x(t) = x_1(t)$ Lösung von (4.3) ist. Ist umgekehrt $x(t) =: x_1(t)$ Lösung von (4.3), so folgt

$$\dot{x}_1(t) = -F(x_1(t)) - \int_0^t g(x_1(s))\,ds + \text{const} =: -F(x_1(t)) + x_2(t)$$

mit

$$\dot{x}_2(t) = -g(x_1(t))\,.$$

Wir nehmen nun an, dass für ein $\delta > 0$ die Bedingungen

$$G(y) := \int_0^y g(s)\,ds > 0\,,\ g(y)F(y) > 0\,, \quad 0 < |y| < \delta\,, \tag{4.5}$$

erfüllt sind, und setzen $L(x_1, x_2) = \dfrac{x_2^2}{2} + G(x_1)$. Dann ist

$$\dot{L}(x_1, x_2) = g(x_1)[x_2 - F(x_1)] + x_2[-g(x_1)] = -g(x_1)F(x_1) < 0$$

für $0 < |x_1| < \delta$. Damit kann man zeigen, dass der Nullpunkt (asymptotisch) stabiler Gleichgewichtspunkt ist. Gilt in der zweiten Ungleichung von (4.5) das umgekehrte Ungleichheitszeichen, so ist er instabiler Gleichgewichtspunkt. Wenden wir dieses Resultat auf die **van der Pol'sche Gleichung**

$$\ddot{x} + \gamma(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

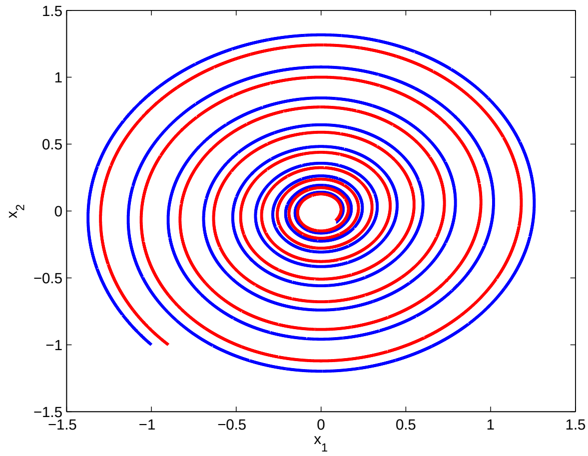
an, so erhalten wir

$$g(x) = x\,, \quad G(x) = \frac{x^2}{2}\,, \quad f(x) = \gamma(x^2 - 1)\,, \quad F(x) = \gamma\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$

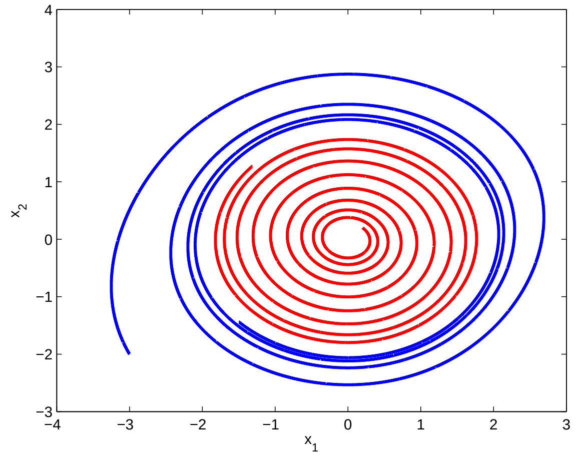
und somit

$$g(x)F(x) = \gamma\, x^2\left(\frac{x^2}{3} - 1\right) > 0 \;\; (< 0) \quad \text{für} \quad 0 < |x| < \sqrt{3}\,,$$

wenn $\gamma < 0$ (> 0) ist.



van der Pol'sche Gleichung: $\gamma = -0.1$, $x_1^0 = x_2^0 = -1$ (blau), $x_1^0 = -0.9$, $x_2^0 = -1$ (rot)



van der Pol'sche Gleichung: $\gamma = 0.1$, $x_1^0 = -3$, $x_2^0 = -2$ (blau), $x_1^0 = x_2^0 = 0.2$ (rot)

4.4 Grenzmengen, attraktive Mengen und Attraktoren

Wir betrachten im Weiteren nur global integrierbare Systeme

$$\dot{x} = v(x) \tag{4.6}$$

und das dazugehörige dynamische System $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, wobei $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ als lokal Lipschitz-stetig vorausgesetzt wird.

Definition 4.15 *Ein Punkt $p \in M$ heißt ω-**Grenzpunkt** (α-**Grenzpunkt**) des Orbits $\Gamma = \Gamma_x = \{\Phi(t,x) : t \in \mathbb{R}\}$, wenn eine Folge $(t_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$ ($\lim_{k\to\infty} t_j = -\infty$) und*

$$\lim_{k\to\infty} \Phi(t_k, x) = p$$

*existiert. Die Menge aller ω- bzw. α-Grenzpunkte heißt ω- bzw. α-**Grenzmenge** von Γ und wird mit $\omega(\Gamma)$ bzw. $\alpha(\Gamma)$ bezeichnet. Die Menge $\omega(\Gamma) \cup \alpha(\Gamma)$ heißt **Grenzmenge** von Γ.*

Satz 4.16 *Die α- und ω-Grenzmengen sind abgeschlossene Teilmengen von M. Ist $K \subset M$ eine kompakte Menge mit $\Gamma \subset K$, so sind $\alpha(\Gamma)$ und $\omega(\Gamma)$ nicht leer, zusammenhängend und kompakt.*

Satz 4.17 *Aus $p \in \alpha(\Gamma)$ folgt $\Gamma_p \subset \alpha(\Gamma)$, und aus $p \in \omega(\Gamma)$ folgt $\Gamma_p \subset \omega(\Gamma)$.*

Insbesondere sind also $\alpha(\Gamma)$ und $\omega(\Gamma)$ bezüglich des Flusses Φ invariante Teilmengen des Phasenraumes, d.h. z.B.

$$\Phi(t,y) \in \alpha(\Gamma) \quad \forall y \in \alpha(\Gamma),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hat also z.B. ein Orbit nur einen ω-Grenzpunkt, so ist dieser ein Gleichgewichtspunkt.

Definition 4.18 *Unter einer Umgebung einer Menge $A \subset M$ verstehen wir eine offene Menge $U \subset M$ mit $A \subset U$. Wir schreiben*

$$\Phi(t,x) \longrightarrow A \quad \textit{für} \quad t \longrightarrow \infty,$$

wenn

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t,x), A) = \lim_{t\to\infty} \inf\{|\Phi(t,x) - y| : y \in A\} = 0$$

*gilt. Eine abgeschlossene und bezüglich Φ invariante Menge $A \subset M$ heißt **attraktive Menge**, wenn eine Umgebung $U \subset M$ von A existiert, so dass $\Phi(t,x) \longrightarrow A$ ($t \longrightarrow \infty$) $\forall x \in U$ erfüllt ist. Eine attraktive Menge heißt **Attraktor**, wenn sie einen dichten Orbit enthält, d.h. einen Orbit, dessen Abschließung A umfaßt.*

Beispiel 4.19 *Wir betrachten das System*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= \phantom{-y+{}} x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

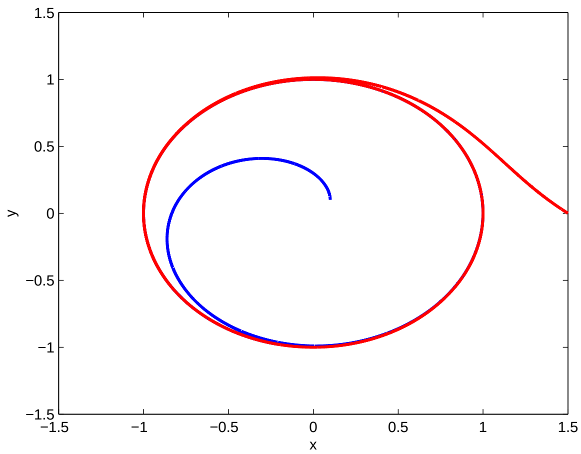
und verwenden zu dessen Untersuchung die Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \dot r &= r(1-r^2)\,, \\ \dot\varphi &= 1\,. \end{aligned}$$

Der Koordinatenursprung ist Gleichgewichtspunkt. Der Einheitskreis $\mathbb{T} = \{r = 1\}$ ist ein Orbit mit $\alpha(\mathbb{T}) = \omega(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ und ω-Grenzmenge für alle anderen Orbits außer dem Koordinatenursprung. Damit ist $\mathbb{T}$ Attraktor.



Beispiel 4.19: $x_0 = y_0 = 0.1$ (blau), $x_0 = 1.5\,,\ y_0 = 0$ (rot)

Beispiel 4.20 *Wir untersuchen das System*

$$\begin{aligned} \dot x &= -y + x(1-x^2-y^2-z^2)\,, \\ \dot y &= \quad x + y(1-x^2-y^2-z^2)\,, \\ \dot z &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Menge $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\big\} \cup \big\{(0,0,z)\in\mathbb{R}^3 : |z| > 1\big\}$ ist attraktive Menge, aber kein Attraktor.

Beispiel 4.21 *Wir untersuchen das System*

$$\begin{aligned} \dot x &= -y + x(1-x^2-y^2)\,, \\ \dot y &= \quad x + y(1-x^2-y^2)\,, \\ \dot z &= \alpha > 0\,. \end{aligned}$$

Die Zylinderoberfläche $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\big\}$ ist attraktive Menge, aber kein Attraktor.

Kapitel 5

Randwertaufgaben

5.1 Grundlagen

Für stetige Funktionen $a_j : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 0,1$, definieren wir den Operator $L : \mathbf{C}^{(2)}[a,b] \longrightarrow \mathbf{C}[a,b]$ durch

$$(Ly)(x) = y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x)\,.$$

Mit $\mathcal{L} \subset \mathbf{C}^{(2)}[a,b]$ bezeichnen wir den (linearen Teil-) Raum aller Lösungen der homogenen Gleichung

$$Ly = 0\,, \tag{5.1}$$

d.h.

$$\mathcal{L} = \left\{ y \in \mathbf{C}^{(2)}[a,b] : (Ly)(x) = 0 \;\forall\, x \in [a,b] \right\}\,.$$

Da man die Funktionen $a_j(x)$ über das Intervall $[a,b]$ hinaus stetig fortsetzen kann, ist die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten auf ein Intervall $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ anwendbar und somit die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems

$$Ly = 0\,, \quad y(x_0) = y_0\,,\; y'(x_0) = y_1\,,$$

für $x_0 \in [a,b]$ gesichert. Insbesondere folgt $\dim \mathcal{L} = 2$ (vgl. Abschnitt 3.2.7).

Wir betrachten nun Randbedingungen der Gestalt

$$R_a y := \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \alpha_2\,, \quad R_b y := \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \beta_2 \tag{5.2}$$

mit $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ und $|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$.

Satz 5.1 *Ist* $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ *ein Fundamentalsystem von Lösungen von* (5.1) *(d.h., eine Basis in* $\mathcal{L}$*), so ist das Randwertproblem* (5.1), (5.2) *genau dann eindeutig lösbar, wenn*

$$\det \begin{bmatrix} R_a\varphi_1 & R_a\varphi_2 \\ R_b\varphi_1 & R_b\varphi_2 \end{bmatrix} \neq 0 \tag{5.3}$$

gilt.

5.2 Sturm'sche Randwertaufgaben

Wir betrachten für $f \in \mathbf{C}[a,b]$ das Randwertproblem

$$Ly = f\,, \tag{5.4}$$

$$R_a y = \alpha_2\,, \quad R_b y = \beta_2\,. \tag{5.5}$$

Eine Lösung dieses Problems ist offenbar genau dann eindeutig, wenn das entsprechende homogene Problem (5.1), (5.2) nur die triviale Lösung besitzt. Das Problem (5.4), (5.5) lässt sich unter dieser Voraussetzung leicht halbhomogenisieren: Es sei $z \in \mathbf{C}^{(2)}[a,b]$ eine Funktion mit $R_a z = \alpha_2$ und $R_b z = \beta_2$. Wir setzen $y^* = y - z$. Dann ist (5.4), (5.5) äquivalent zu

$$Ly^* = f - Lz =: f^*\,, \quad R_a y^* = R_b y^* = 0\,.$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.4) mit

$$p(x) = \exp\left(\int_a^x a_1(s)\,ds\right)$$

und erhalten

$$py'' + pa_1 y' + pa_0 y = pf$$

bzw. wegen $(py')' = py'' + p'y' = py'' + pa_1 y'$

$$(py')' + pa_0 y = pf\,.$$

Wir können uns somit auf die Betrachtung der sog. **Sturm'schen Randwertaufgaben**

$$Ly = f\,, \quad R_a y = R_b y = 0 \tag{5.6}$$

mit $p', q \in \mathbf{C}[a,b]$ und

$$Ly = (py')' + qy\,, \quad p(x) > 0\,,\ a \le x \le b\,,$$

einschränken, wobei wir voraussetzen, dass (5.3) erfüllt ist. Es seien $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subset \mathcal{L}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $Ly = 0$ und

$$W(x) = \varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x)$$

die **Wronski-Determinante** dieses Systems. Es gilt dann

$$p(x)W'(x) = -p'(x)W(x)\,,$$

d.h. $[p(x)W(x)]' \equiv 0$, so dass

$$p(x)W(x) = p(a)W(a) \ne 0 \quad \forall\, x \in [a,b]\,. \tag{5.7}$$

Wir schreiben das Quadrat $[a,b]^2$ als Vereinigung der Dreiecke

$$D_1 = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le t \le b\right\} \quad \text{und} \quad D_2 = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a \le t \le x \le b\right\}$$

und definieren die **Green'sche Funktion** $G(x,t)$ der Sturm'schen Randwertaufgabe (5.6) als

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_1(x)\varphi_2(t)}{p(a)W(a)} & : \quad (x,t) \in D_1\,, \\[2ex] \dfrac{\varphi_1(t)\varphi_2(x)}{p(a)W(a)} & : \quad (x,t) \in D_2\,. \end{cases}$$

Außerhalb der Diagonalen $\{(x,x) : a \le x \le b\}$ existieren offenbar die stetigen partiellen Ableitungen $\partial_1 G := G_x$ und $\partial_{11} G := G_{xx}$, wobei für $a < x < b$ die Beziehungen

$$\partial_1 G(x+0,x) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_2'(x)}{p(a)W(a)}\,, \quad \partial_1 G(x-0,x) = \frac{\varphi_1'(x)\varphi_2(x)}{p(a)W(a)}$$

erfüllt sind. Daraus ergibt sich unter Verwendung von (5.7) die "Sprungrelation"

$$\partial_1 G(x+0,x) - \partial_1 G(x-0,x) = \frac{1}{p(x)}\,, \quad a < x < b\,. \tag{5.8}$$

Nach Voraussetzung genügt das Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ der Bedingung (5.3). Die Funktionen

$$\psi_1(x) = c_{11}\varphi_1(x) + c_{12}\varphi_2(x)\,, \quad \psi_2(x) = c_{21}\varphi_1(x) + c_{22}\varphi_2(x)$$

mit $c_{11} = R_a\varphi_2$, $c_{12} = -R_a\varphi_1$, $c_{21} = R_b\varphi_2$ und $c_{22} = -R_b\varphi_1$ bilden dann auch ein Fundamentalsystem für $Ly = 0$, da $\det[c_{jk}] \ne 0$ gilt. Außerdem ist $R_a\psi_1 = R_b\psi_2 = 0$. Wir können also im weiteren o.E.d.A. ein Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ mit

$$R_a\varphi_1 = R_b\varphi_2 = 0 \tag{5.9}$$

zugrundelegen. Wir setzen

$$\varphi(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\,dt\,, \quad a \le x \le b\,.$$

Dann gilt

$$\varphi(x) = \int_a^x G(x,t)f(t)\,dt + \int_x^b G(x,t)f(t)\,dt$$

und somit

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= G(x,x)f(x) + \int_a^x \partial_1 G(x,t)f(t)\,dt - G(x,x)f(x) + \int_x^b \partial_1 G(x,t)f(t)\,dt\\ &= \int_a^b \partial_1 G(x,t)f(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung von $\varphi(x)$ erhalten wir auf analoge Weise unter Verwendung der Beziehung (5.8)

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \partial_1 G(x+0,x)f(x) - \partial_1 G(x-0,x)f(x) + \int_a^b \partial_{11} G(x,t)f(t)\,dt\\ &= \frac{f(x)}{p(x)} + \int_a^b \partial_{11} G(x,t)f(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Aus der Definition von $G(x,t)$ folgt für $x \ne t$

$$p(x)\partial_{11}G(x,t) + p'(x)\partial_1 G(x,t) + q(x)G(x,t) = 0$$

und somit

$$(L\varphi)(x) = f(x)\,.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}R_a\varphi &= \int_a^b \left[\alpha_0 G(a,t) + \alpha_1\partial_1 G(a,t)\right] f(t)\,dt\\ &= \frac{1}{p(a)W(a)}\int_a^b \left[\alpha_0\varphi_1(a) + \alpha_2\varphi_1'(a)\right]\varphi_2(t)f(t)\,dt = 0\end{aligned}$$

und analog $R_b\varphi = 0$. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen.

Satz 5.2 *Es seien $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $Ly = 0$, die die Bedingungen $R_a\varphi_1 = R_b\varphi_2 = 0$ und $(R_a\varphi_2)(R_b\varphi_1) \neq 0$ erfüllen und $G(x,t)$ die zugehörige Green'sche Funktion. Dann ist das Randwertproblem (5.6) eindeutig lösbar, und die Lösung ist gegeben durch*

$$\varphi(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\,dt\,.$$

Beispiel 5.3 *Für die Randwertaufgabe*

$$y'' = f\,, \quad y(0) = y(1) = 0\,,$$

kann man das Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ mit $\varphi_1(x) = x$ und $\varphi_2(x) = x - 1$ wählen, so dass $W(x) \equiv 1$ und

$$G(x,t) = \begin{cases} x(t-1) & : \quad 0 \le x \le t \le 1\,, \\ t(x-1) & : \quad 0 \le t \le x \le 1\,, \end{cases}$$

ist. Hieraus erhält man die Lösungsdarstellung

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt &= (x-1)\int_0^x tf(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)f(t)\,dt \\ &= \int_0^x F(t)\,dt - x\int_0^1 F(t)\,dt\,, \end{aligned}$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ bezeichnet.

5.3 Sturm-Liouville'sche Eigenwertaufgaben

Für den Differentialoperator L, definiert wie in (5.6), betrachten wir **unter den Voraussetzungen des Satzes 5.2** das Eigenwertproblem

$$Ly + \lambda y = 0\,, \quad R_a y = R_b y = 0\,. \tag{5.10}$$

Wir nennen $\lambda \in \mathbb{R}$ einen **Eigenwert**, wenn (5.10) eine nichttriviale Lösung $\varphi = \varphi_\lambda \in \mathbf{C}^{(2)}[a,b]$ (eine zugehörige **Eigenfunktion**) besitzt.

1. $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert.
2. Ist $G(x,t)$ die entsprechende Green'sche Funktion zum Differentialoperator L, wie sie in satz 5.2 verwendet wird, so ist das Problem (5.10) äquivalent zu

   $$y = \lambda\mathcal{K}y \quad \text{oder} \quad \mathcal{K}y - \frac{1}{\lambda}y = 0\,, \tag{5.11}$$

   wobei $(\mathcal{K}y)(x) = -\int_a^b G(x,t)y(t)\,dt\,,\ a \le x \le b\,.$
3. Wir betrachten die normierten Räume

   $$\mathbf{C}[a,b] = (\mathbf{C}[a,b], \|.\|_\infty) \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_2[a,b] = (\mathbf{C}[a,b], \|.\|_2)$$

   mit

   $$\|f\|_\infty := \max\{|f(t)| : a \le t \le b\} \quad \text{und} \quad \|f\|_2 = \langle f, f\rangle\ ,\ \langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt\,.$$

Die Operatoren $\mathcal{K} : \mathbf{C}_2[a,b] \longrightarrow \mathbf{C}[a,b]$ und $\mathcal{K} : \mathbf{C}_2[a,b] \longrightarrow \mathbf{C}_2[a,b]$ sind linear und kompakt, was insbesondere bedeutet, dass für jede in $\mathbf{C}_2[a,b]$ beschränkte Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ die Folge $(\mathcal{K}f_n)_{n=1}^\infty$ sowohl in $\mathbf{C}[a,b]$ als auch in $\mathbf{C}_2[a,b]$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Offenbar ist $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Eigenwert von (5.10) genau dann, wenn $\mu = \frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von $\mathcal{K} : \mathbf{C}_2[a,b] \longrightarrow \mathbf{C}_2[a,b]$ ist.

4. Für beliebige $f, g \in \mathbf{C}[a,b]$ gilt $\langle \mathcal{K}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{K}g\rangle$.

5. Wir definieren
$$\nu(\mathcal{K}) := \sup\left\{ |\langle \mathcal{K}g, g\rangle| : g \in \mathbf{C}[a,b], \|g\|_2 = 1\right\} .$$
Dann gilt
$$\nu(\mathcal{K}) = \|\mathcal{K}\|_2 := \|\mathcal{K}\|_{\mathbf{C}_2[a,b]\to\mathbf{C}_2[a,b]} = \sup\left\{ \|Kg\|_2 : g \in \mathbf{C}[a,b], \|g\|_2 = 1\right\} .$$
Es existiert eine Folge $(g)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{C}[a,b]$ eine Folge mit $\|g_n\|_2 = 1$ und $\langle \mathcal{K}g_n, g_n\rangle \longrightarrow \mu$, $|\mu| = \nu(\mathcal{K})$. Die Folge $(\mathcal{K}g_n)_{n=1}^\infty$ hat eine in $\mathbf{C}_2[a,b]$ konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wir mit f bezeichnen. Dann ist $\mu_1 := \mu$ ein Eigenwert von $\mathcal{K}$ mit der Eigenfunktion $\varphi_1 := \frac{1}{\mu} f$, wobei $\|\varphi_1\|_2 = 1$ gilt.

6. Der lineare Teilraum $\mathbf{E}_1 := \{g \in \mathbf{C}[a,b] : \langle g, \varphi_1\rangle = 0\}$ ist invariant bezüglich $\mathcal{K}$, so dass wir auf $\mathcal{K}|_{\mathbf{E}_1}$ obige Überlegungen anwenden können. Dieser Prozess ist unbegrenzt fortsetzbar. Im Ergebnis erhalten wir eine Folge von Eigenwerten $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ von $\mathcal{K}$ mit zugehörigen Eigenfunktionen $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$, und dabei gilt
$$|\mu_1| \ge |\mu_2| \ge \ldots > 0 , \quad \langle \varphi_n, \varphi_k\rangle = \delta_{nk} .$$

7. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$.

8. Es ist $\mu_n \neq \mu_{n+1} \; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

9. Es gilt die **Bessel'sche Ungleichung**
$$\sum_{n=1}^\infty |\langle g, \varphi_n\rangle|^2 \le \|g\|_2 \quad \forall\, g \in \mathbf{C}[a,b] .$$

10. Für $g \in \mathbf{C}[a,b]$ gilt
$$\mathcal{K}g = \sum_{n=1}^\infty \mu_n \langle g, \varphi_n\rangle \varphi_n$$
in dem Sinne, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \mathcal{K}g - \sum_{k=1}^n \mu_k \langle g, \varphi_k\rangle \varphi_k \right\|_2 = 0$ gilt.

Folgerung 5.4 *Die Folge $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ enthält alle Eigenwerte von $\mathcal{K}$.*

Folgerung 5.5 *Für $g \in \mathbf{C}^{(2)}[a,b]$ mit $\mathcal{R}_a g = \mathcal{R}_b g = 0$ gilt*
$$\lim_{n\to\infty} \left\| g - \sum_{k=1}^n \langle g, \varphi_k\rangle \varphi_k \right\|_2 = 0 .$$

Beispiel 5.6 *Wir betrachten das Anfangs-Randwertproblem (Wärmeausbreitung in einem Stab der Länge ℓ)*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < \ell\,,\ t > 0\,,$$
$$u(x,0) = f(x)\,, \quad 0 < x < \ell\,,$$
$$u(0,t) = 0\,, \quad h\,u(\ell,t) + k\,\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = 0\,, \quad t > 0\,,$$

mit positiven Parametern a, h und k. Der Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ führt zu dem Eigenwertproblem

$$v''(x) + \lambda^2 v(x) = 0\,, \quad v(0) = 0\,,\ h\,v(\ell) + k\,v'(\ell) = 0\,.$$

Die Eigenwerte λ_n^2 ergeben sich als Lösungen der Gleichung

$$\tan \lambda_n \ell + \frac{k\lambda_n}{h} = 0\,,\ \lambda_n > 0\,.$$

Kapitel 6

Anhang: Das System Dampfmaschine – Fliehkraftregler

Siehe ausgehändigte Skizze (vgl. auch [6, §27]): L_1 und L_2 mögen die Länge 1 haben. Auf jeden Massepunkt wirken die Zentrifugalkraft $m\theta^2 \sin\varphi$ und die Schwerkraft $m\,g$ sowie die Reibung $b\,\dot{\varphi}$. Die Differentialgleichung der Dampfmaschine lautet

$$\mathcal{J}\,\dot{\omega} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}\,,$$

wobei $\mathcal{J}$ das Trägheitsmoment und ω die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades, $\mathcal{M}_1$ das Drehmoment der Dampfkraft und $\mathcal{M}$ das Drehmoment, das die Last (z.B. ein Förderkorb) auf das Schwungrad ausübt, bezeichnen. Die Dampfmaschine und der Regler sind über das Übersetzungsverhältnis n $(\theta = n\omega)$ und über die Gleichung

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_D + k(\cos\varphi - \cos\varphi^*)$$

miteinander gekoppelt. Es folgt

$$m\,\ddot{\varphi} = m\,n^2\omega^2 \sin\varphi\,\cos\varphi - m\,g\,\sin\varphi - b\,\dot{\varphi}\,,\quad \mathcal{J}\,\dot{\omega} = k\,\cos\varphi - \mathcal{M}_g$$

mit $\mathcal{M}_g = \mathcal{M} - \mathcal{M}_D + k\,\cos\varphi^*$. Dieses Differentialgleichungssystem ist äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= n^2 x_3^2 \sin x_1 \cos x_1 - g\,\sin x_1 - \frac{b}{m}\,x_2 \\
\dot{x}_3 &= \frac{k}{\mathcal{J}}\,\cos x_1 - \frac{\mathcal{M}_g}{\mathcal{J}}\,,
\end{aligned}$$

welches wir in der Form

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= (\alpha\,x_3^2 \cos x_1 - \beta)\sin x_1 - \gamma\,x_2 \\
\dot{x}_3 &= \delta\,\cos x_1 - \eta
\end{aligned}$$

schreiben. Wir verwenden dabei die Bezeichnungen

$$x_1 = \varphi\,,\; x_2 = \dot{\varphi}\,,\; x_3 = \omega\,,\; \alpha = n^2\,,\; \beta = g\,,\; \gamma = \frac{b}{m}\,,\; \delta = \frac{k}{\mathcal{J}}\,,\; \eta = \frac{\mathcal{M}_g}{\mathcal{J}}\,.$$

Der Phasenraum dieses Systems ist somit gleich $M = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^3$. Der stationäre Punkt $x^* \in M$ genügt den Gleichungen

$$\cos x_1^* = \frac{\eta}{\delta} = \frac{\mathcal{M}_g}{k}\,, \quad x_2^* = 0\,, \quad x_3^* = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha\,\cos x_1^*}} = \sqrt{\frac{\beta\,\delta}{\alpha\,\eta}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{g\,k}{\mathcal{M}_g}}\,. \tag{6.1}$$

Die Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes in diesem stationären Punkt ist gleich

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha(x_3^*)^2 \sin^2 x_1^* & -\gamma & 2\alpha\, x_3^* \cos x_1^* \sin x_1^* \\ -\delta\, \sin x_1^* & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom dieser Matrix erhalten wir

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^2(\lambda + \gamma) + 2\alpha\,\delta\, x_3^* \cos x_1^* \sin^2 x_1^* + \alpha(x_3^*)^2 \lambda \sin^2 x_1^* \\ &= \lambda^3 + \gamma\,\lambda^2 + \alpha(x_3^*)^2\,(\sin x_1^*)^2\,\lambda + 2\alpha\,\delta\, x_3^* \cos x_1^* \sin^2 x_1^*\,. \end{aligned}$$

Man nennt ein Polynom stabil, wenn alle seine Nullstellen negativen Realteil besitzen. Wir betrachten ein Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c \quad \text{mit} \quad a, b, c > 0 \tag{6.2}$$

und stellen die Frage, wann dieses Polynom stabil ist (siehe auch Merkblatt zur Stabilität von Polynomen):

1. Wir schreiben $p(\lambda) = (\lambda + a)(\lambda^2 + b) - a\,b + c$ und nehmen an, dass $\lambda = \mathbf{i}\rho\,,\ \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Nullstelle ist. Dann gilt

$$0 = (\mathbf{i}\rho + a)(-\rho^2 + b) - ab + c\,, \quad \text{d.h.} \quad b - \rho^2 = 0 \quad \text{und} \quad a\,b = c\,.$$

   Ist umgekehrt $c - a\,b = 0$, so ist $\mathbf{i}\sqrt{b}$ rein imaginäre Nullstelle.

2. Sei $a\,b < c$. Wir lassen a und b gegen Null streben, und zwar so, dass diese Ungleichung erhalten bleibt. Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 + c$ hat neben $-c^{\frac{1}{3}}$ die Nullstellen

$$c^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

   rechts von der imaginären Achse.

3. Sei nun $a\,b > c$. Wir betrachten $c \longrightarrow 0$. Das Polynom $\lambda(\lambda^2 + a\,\lambda + b)$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ mit negativem Realteil und die Nullstelle $\lambda_3 = 0$. Letztere geht für kleines $c > 0$ in eine negative Nullstelle über, da $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -c < 0$.

Also: Das Polynom (6.2) ist genau dann stabil, wenn $a\,b > c$ gilt. Für den Fliehkraftregler bedeutet das

$$\gamma\,\alpha(x_3^*)^2 \sin^2 x_1^* > 2\alpha\,\delta\, x_3^* \sin^2 x_1^* \cos x_1^*\,,$$

d.h.

$$x_3^*\gamma > 2\delta\, \cos x_1^* = 2\eta\,.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\frac{b\,\mathcal{J}}{m} > \frac{2\mathcal{M}_g}{\omega^*}\,. \tag{6.3}$$

Die Größe

$$\nu = \left|\frac{d\omega^*}{d\mathcal{M}_g}\right|$$

heißt Ungleichförmigkeit des Laufes der Dampfmaschine (ν – Maß für die Änderung von ω^* bei Änderung der Last $\mathcal{M}$). Aus der Gleichung $(\omega^*)^2\mathcal{M}_g = \text{const}$ (siehe (6.1)) folgt

$$2\omega^*\frac{d\omega^*}{d\mathcal{M}_g}\,\mathcal{M}_g + (\omega^*)^2 = 0\,,$$

d.h.

$$\frac{d\omega^*}{d\mathcal{M}_g} = -\frac{\omega^*}{2\mathcal{M}_g}\,.$$

Somit ist die Stabilitätsbedingung (6.3) äquivalent zu

$$\frac{b\,\mathcal{J}}{m}\,\nu > 1\,. \tag{6.4}$$

Technische Entwicklungen im 19. Jahrhundert, die eigentlich die Maschinen verbessern sollten, wirkten der Bedingung (6.4) entgegen:

- Im Zusammenhang mit der Steigerung der Kapazität der Maschinen wurde das Gewicht der Schieber vergrößert und deshalb die Masse der Kugeln am Regler erhöht.
- Verbesserte Oberflächen führten zu einer Verringerung der Reibung.
- Das Trägheitsmoment des Schwungrades wurde zur Erhöhung der Arbeitsgeschwindigkeit der Maschinen verkleinert.
- Man strebte danach, die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Last zu verringern, was zu einer Verkleinerung der Ungleichförmigkeit des Laufes führte.

Index