Skript zur Vorlesung

Maßtheorie

WS 2012/2013

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

lknerBrehmer [1] H. Belkner, S. Brehmer, *Lebesguesche Integrale*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1984.

Ju [2] P. Junghanns, Analysis I/II - Skript zur Vorlesung 2009/2010, http://www-user.tu-chemnitz.de/~peju/skripte/analysis/Analysis_V.pdf

Michel [3] H. Michel, *Maß- und Integrationstheorie I*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

Rao [4] M. M. Rao, *Measure Theory and Integration*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2004.

Rudin [5] W. Rudin, *Reelle und komplexe Analysis*, Oldenburg Verlag, München, 1999.

Kapitel 1

Das Lebesgue'sche Integral

Bezeichnungen:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ - Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ - Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
- $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ - Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ - Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ - Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{C}$ - Menge der komplexen Zahlen

Wir erinnern an den Begriff der Riemann-integrierbaren Funktion und bezeichnen mit $\mathbf{R}[a,b]$ die Menge der über dem Intervall $[a,b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ (reellwertigen) Riemann-integrierbaren Funktionen (vgl. auch [2, Abschnitt 5.6]).

- Mit $f, g \in \mathbf{R}[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gehören auch $\alpha f + \beta g$ und fg zu $\mathbf{R}[a,b]$. Insbesondere sind $\mathbf{R}[a,b]$ ein linearer Raum und das Riemann-Integral auf diesem Raum ein lineares Funktional.
- Ist $f \in \mathbf{R}[a,b]$ mit $f(x) \geq 0 \; \forall \, x \in [a,b]$, so gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- Aus $f \in \mathbf{R}[a,b]$ folgt auch $|f| \in \mathbf{R}[a,b]$ und
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$
- Die charakteristische Funktion χ_Q der rationalen Zahlen, auch Dirichlet-Funktion genannt, gehört nicht zu $\mathbf{R}[a,b]$.
- Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ von Funktionen $f_n \in \mathbf{R}[a,b]$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen die Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so folgt $f \in \mathbf{R}[a,b]$ und
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wir erinnern auch an die Definition uneigentlicher Integrale, z.B.
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \quad \text{oder} \quad \int_0^1 \ln x\,dx\,.$$

1.1 Der erweiterte Zahlenbereich. Numerische Funktionen

defi.DEF1 **Definition 1.1** *Die Menge* $\mathbb{R}^e = [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *heißt* **erweiterter Bereich der reellen Zahlen***. Durch die Relationen* $-\infty < x < \infty \;\forall\, x \in \mathbb{R}$ *wird die Ordnungsrelation von* $\mathbb{R}$ *auf* $\mathbb{R}^e$ *fortgesetzt. Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gelten bzgl. Addition und Multiplikation folgende Regeln:*

(a) $x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty\,,\; x + (-\infty) = (-\infty) + x = (-\infty) + (-\infty) = -\infty\,,$

(b) $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \left\{ \begin{array}{ccc} \infty & : & x > 0 \\ 0 & : & x = 0 \\ -\infty & : & x < 0 \end{array} \right\},$

(c) $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty\,,\; \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty\,,$

(d) $-(-\infty) = \infty\,,\; x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -(x \cdot \infty)\,,$

(e) $x - \infty := x + (-\infty)$ *und* $|\infty| = |-\infty| = \infty\,.$

Damit ist die Multiplikation auf $\mathbb{R}^e$ uneingeschränkt ausführbar, die Addition bis auf $x + y$ mit $x = -y = \infty$ und $x = -y = -\infty$. Im Weiteren sei $\mathbf{X}$ eine beliebige nichtleere Menge. Funktionen $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ nennen wir **numerische Funktionen**. Wir definieren die Funktion $|f|$ durch $|f|(x) := |f(x)|$ und, für zwei numerische Funktionen f, g,

$$(f \cup g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad (f \cap g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}\ .$$

Der positive Teil f^+ und der negative Teil f^- von f sind dann gegeben durch $f^+ := f \cup 0$ und $f^- := -(f \cap 0) = (-f) \cup 0$. Offenbar gilt $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$. Wir schreiben $f \geq 0$, wenn $f = f^+$, und $f \leq g$, wenn $g - f \geq 0$ gilt.

1.2 Der Begriff des Integrals

defi.DEF2 **Definition 1.2** *Eine Menge* $\mathcal{X}$ *reellwertiger Funktionen* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* **Vektorverband***, wenn aus* $f, g \in \mathcal{X}$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *folgt* $\alpha f, f + g, |f| \in \mathcal{X}$.

FOLG1 **Folgerung 1.3** *Ist* $\mathcal{X}$ *ein Vektorverband, so gilt mit* $f, g \in \mathcal{X}$ *auch* $f \cup g, f \cap g, f^+, f^- \in \mathcal{X}$.

bsp.BEISP1n **Beispiel 1.4** *Die Menge* $\mathcal{X}^{(1)} := \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ *der stetigen Funktionen* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit kompaktem Träger bilden einen Vektorverband. (Man sagt, dass* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *einen kompakten Träger hat, wenn* $x_1 = x_1(f) < x_2 = x_2(f)$ *existieren, so dass* $f(x) = 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [x_1, x_2]$ *gilt.)*

bsp.BEISP1a **Beispiel 1.5** *Die Menge* $\mathbf{R}_0(\mathbb{R})$ *der Riemann-integrierbaren Funktionen mit kompakten Träger ist ein Vektorverband.*

defi.DEF3 **Definition 1.6** *Ein auf einem Vektorverband* $\mathcal{X}$ *definiertes lineares Funktional* $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *nennen wir* **Integral** *auf* $\mathcal{X}$*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

(I1) $f \in \mathcal{X}\,,\; f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{J}(f) \geq 0$ *(Positivität von* $\mathcal{J}$*),*

(I2) $f, f_n \in \mathcal{X}\,,\; f_n \uparrow f \Rightarrow \mathcal{J}(f_n) \uparrow \mathcal{J}(f)$ *(Stetigkeit von unten).*

Dabei bedeutet $f_n \uparrow f$, *dass* $f_n \leq f_{n+1}\ \forall\, n$ *(isotone Folge) und* $\lim f_n(x) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbf{X}$ *gilt.*

Wegen der Linearität von $\mathcal{J}$ ist die Stetigkeit von unten äquivalent zur Stetigkeit von oben, ja sogar zur Nullstetigkeit von oben (d.h., $f_n \downarrow 0 \Rightarrow \mathcal{J}(f_n) \downarrow 0$).

bsp.Integral **Beispiel 1.7** *Als Funktional* $\mathcal{J}^{(1)} : \mathcal{X}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ *(vgl. Bsp.* bsp.BEISP1n *1.4) wählen wir das Riemann-Integral. Dann ist dieses Funktional ein Integral gemäß Def.* defi.DEF3 *1.6.*

Die im Folgenden zu betrachtenden Grenzwerte können aus $\mathbb{R}^e$ sein.

satz.SATZ1 **Satz 1.8** *Es seien* $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ein Integral,* $f, g \in \mathcal{X}$ *und* $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ *isotone Folgen von Funktionen aus* $\mathcal{X}$ *. Dann gilt*

(a) $f \leq g \Rightarrow \mathcal{J}(f) \leq \mathcal{J}(g)$ *(Isotonie des Integrals),*

(b) $|\mathcal{J}(f)| \leq \mathcal{J}(|f|)\ \forall\, f \in \mathcal{X}$,

(c) $\lim f_n \geq 0 \Rightarrow \lim \mathcal{J}(f_n) \geq 0$,

(d) $\lim f_n \leq \lim g_n \Rightarrow \lim \mathcal{J}(f_n) \leq \lim \mathcal{J}(g_n)$,

(e) $\lim f_n = \lim g_n \Rightarrow \lim \mathcal{J}(f_n) = \lim \mathcal{J}(g_n)$.

Beweis.

(a) $f \leq g \ \Rightarrow\ g - f \geq 0 \ \Rightarrow\ \mathcal{J}(g) - \mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(g - f) \geq 0$

(b) $\pm f \leq |f| \ \Rightarrow\ \pm\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(\pm f) \leq \mathcal{J}(|f|)$

(c) $\lim f_n \geq 0 \ \Rightarrow\ (f_n \cap 0) \uparrow 0 \ \Rightarrow\ \mathcal{J}(f_n \cap 0) \uparrow 0$
$f_n \geq f_n \cap 0 \ \Rightarrow\ \mathcal{J}(f_n) \geq \mathcal{J}(f_n \cap 0) \ \Rightarrow\ \lim \mathcal{J}(f_n) \geq 0$

(d) $\lim f_n \leq \lim g_n \ \Rightarrow\ f_k \leq \lim g_n\ \forall\, k \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} (g_n - f_k) \geq 0$

$$\overset{(c)}{\Rightarrow}\ 0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(g_n - f_k) = \lim \mathcal{J}(g_n) - \mathcal{J}(f_k) \ \Rightarrow\ \mathcal{J}(f_k) \leq \lim \mathcal{J}(g_n)\ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow\ \lim \mathcal{J}(f_n) \leq \lim \mathcal{J}(g_n)$$

(e) Folgt aus (d).

□

1.3 Fortsetzung eines Integrals auf die isotone Hülle

defi.DEF4 **Definition 1.9** *Man nennt*

$$\mathcal{X}^{\sigma} := \{F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e : \exists\ (f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X} \text{ mit } f_n \uparrow F\}$$

die **isotone Hülle** *des Vektorverbandes* $\mathcal{X}$ *.*

Beachte: $\mathcal{X}^{\sigma}$ ist i. Allg. kein Vektorverband.

satz.SATZ2 **Satz 1.10** *Aus* $(F_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}^\sigma$ *und* $F_n \uparrow F$ *folgt* $F \in \mathcal{X}^\sigma$.

defi.DEF5 **Definition 1.11** *Für* $F \in \mathcal{X}^\sigma$, $f_n \in \mathcal{X}$ *und* $f_n \uparrow F$ *nennen wir* $\mathcal{J}^*(F) := \lim \mathcal{J}(f_n)$ **verallgemeinertes Integral** *von* F . *Die Funktionen der Menge* $\mathcal{X}_0^\sigma := \{F \in \mathcal{X}^\sigma : \mathcal{J}^*(F) < \infty\}$ *nennt man* **Levi-Funktionen**.

Nach Satz satz.SATZ1 1.8,(e) ist $\mathcal{J}^*(F)$ unabhängig von der Wahl der Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $f_n \uparrow F$. Ferner gilt nach Def. defi.DEF3 1.6 auch $\mathcal{J}^*(f) = \mathcal{J}(f)\ \forall f \in \mathcal{X}$. Außerdem hat das verallgemeinerte Integral folgende Eigenschaften:

(V1) $\mathcal{J}^*(\alpha F) = \alpha \mathcal{J}^*(F)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, $F \in \mathcal{X}^\sigma$

(V2) $\mathcal{J}^*(F + G) = \mathcal{J}^*(F) + \mathcal{J}^*(G)$, $F, G \in \mathcal{X}^\sigma$

(V3) $\mathcal{J}^*(F \pm g) = \mathcal{J}^*(F) \pm \mathcal{J}^*(g)$, $F \in \mathcal{X}^\sigma$, $g \in \mathcal{X}$

(V4) $F \leq G \Rightarrow \mathcal{J}^*(f) \leq \mathcal{J}^*(G)$

satz.SATZ3 **Satz 1.12** $\mathcal{J}^*$ *ist auf* $\mathcal{X}^\sigma$ *stetig von unten.*

Beweis. Sei $(F_n) \subset \mathcal{X}^\sigma$, $F_n \uparrow F$. Dann existiert eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{X}$ mit $f_n \leq F_n \leq F$ und $f_n \uparrow F$ (vgl. Beweis von Satz satz.SATZ2 1.10). Es folgt

$$\mathcal{J}^*(F) = \lim \mathcal{J}(f_n) = \lim \mathcal{J}^*(f_n) \overset{(V4)}{\leq} \lim \mathcal{J}^*(F_n) \overset{(V4)}{\leq} \mathcal{J}^*(F)$$

und somit $\mathcal{J}^*(F) = \lim \mathcal{J}^*(F_n)$. □

bsp.BEISP2 **Beispiel 1.13** *Wir wählen* $\mathbf{X}^{(2)} = \mathbb{N}_0$ *und*

$$\mathcal{X}^{(2)} = \{f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : |\{n \in \mathbb{N}_0 : f(n) \neq 0\}| < \infty\} , \quad \mathcal{J}^{(2)}(f) := \sum_{n=0}^{\infty} f(n) .$$

Dann gilt

$$\mathcal{X}^{(2)\sigma} = \{F : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} : \exists\, n_0 \text{ mit } F(n) \geq 0\ \forall\, n \geq 0\} , \quad \mathcal{J}^{(2)*}(F) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) .$$

1.4 Das Lebesgue-Integral

Abschn.LI

defi.DEF6 **Definition 1.14** *Das Integral* $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* **Lebesgue-Integral** (*kurz* **L-Integral**) , *wenn*

$$\{G : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}\} \cap \mathcal{X}_0^\sigma \subset \mathcal{X}$$

gilt. Man nennt dann das Tripel $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ *einen* **Integrationsraum**. *Bezeichnen wir mit* $\mathcal{M}_\mathcal{J}$ *folgende Menge von Funktionen*

$$\mathcal{M}_\mathcal{J} := \{\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R} : \exists\, F \in \mathcal{X}_0^\sigma \text{ mit } \varphi(x) \neq F(x) \iff F(x) = \infty\} ,$$

so nennen wir $\mathcal{J}$ *ein* **vollständiges L-Integral**, *wenn* $\mathcal{M}_\mathcal{J} \subset \mathcal{X}$ *erfüllt ist.*

Fragestellung: Kann ein Integral $\mathcal{J}$ zu einem L-Integral bzw. zu einem vollständigen L-Integral $\widetilde{\mathcal{J}}$ auf einen Vektorverband $\widetilde{\mathcal{X}} \supset \mathcal{X}$ fortgesetzt werden?

satz.THEOREM **Theorem 1.15** *Jedes Integral besitzt genau eine* **minimale** *Fortsetzung zu einem vollständigen L-Integral.*

Zum Beweis dieses Theorems benötigen wir die folgenden Lemmata lemma.LEMMA1 lemma.LEMMA6 1.16–1.21.

lemma.LEMMA1 **Lemma 1.16** *Ist $\widetilde{\mathcal{J}} : \widetilde{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine vollständige Fortsetzung des Integrals $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, so gilt*

$$L(\mathcal{J}) := \{\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R} : \exists\, F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma \text{ mit } \varphi + G = F\} \subset \widetilde{\mathcal{X}}\,.$$

lemma.LEMMA2 **Lemma 1.17** *Die in Lemma lemma.LEMMA1 1.16 definierte Menge $L(\mathcal{J})$ ist ein Vektorverband.*

lemma.LEMMA3 **Lemma 1.18** *Es existiert höchstens eine Fortsetzung $\widetilde{\mathcal{J}}$ von $\mathcal{J}$ zu einem Integral auf einen Vektorverband $\widetilde{\mathcal{X}} \subset L(\mathcal{J})$.*

Ausgehend von Lemma lemma.LEMMA3 1.18 und dessen Beweis definieren wir für $\varphi \in L(\mathcal{J})$

$$\mathcal{J}_L(\varphi) := \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G)\,,$$

wobei $\varphi + G = F$ und $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$.

lemma.LEMMA4 **Lemma 1.19** *Die Definition von $\mathcal{J}_L(\varphi)$ ist korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $\varphi + G = F$.*

lemma.LEMMA5 **Lemma 1.20** *Für jedes $\varphi \in L(\mathcal{J})$ und jedes $\varepsilon > 0$ existieren $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $\varphi + G = F$, $G \ge 0$ und $\mathcal{J}^*(G) < \varepsilon$.*

lemma.LEMMA6 **Lemma 1.21** *Es sei $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset L(\mathcal{J})$ eine isotone Folge. Dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ solche $F, G \in \mathcal{X}^\sigma$, so dass $G \ge 0$, $\mathcal{J}^*(G) < \varepsilon$ sowie*

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi_n + G) = F \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_L(\varphi_n) = \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G)$$

gilt.

Wir betrachten die Beispiele bsp.BEISP1 1.4 und bsp.Integral 1.7 und bezeichnen für $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ mit $g_{ab} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion aus $\mathcal{X}^{(1)}$, die auf $[a-b, a]$ und $[a, a+b]$ linear ist und für die $g_{ab}(a) = 1$ sowie $g_{ab}(x) = 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [a-b, a+b]$ gilt. Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge paarweise verschiedener reeller Zahlen, so setzen wir

$$f_n := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{a_k, 2^{-j-k}}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ ist isoton, so dass $F = \lim f_n$ wohldefiniert ist. Dabei gilt

$$\mathcal{J}^{(1)}(f_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{j+k}} = \sum_{j=1}^n 2^{-j} \sum_{k=1}^n 2^{-k} < 1\,.$$

Also gilt $F \in \mathcal{X}_0^{(1)\sigma}$. Außerdem haben wir für $n \geq m$

$$f_n(a_m) \geq \sum_{j=1}^{n} 1 = n\,,$$

so dass $F(a_m) = \infty\ \forall\, m \in \mathbb{N}$. Die Funktionen aus $\mathcal{M}_{\mathcal{J}^{(1)}}$ können in den Punkten a_m also beliebige Werte annehmen.

Wir betrachten Beispiel bsp.BEISP2 1.13. Offenbar ist

$$\mathcal{X}_0^{(2)\sigma} = \left\{ f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty,\ f(n) \geq 0\ \forall\, n \geq n_0(f) \right\}.$$

Man kann zeigen, dass

$$L(\mathcal{J}^{(2)}) = \left\{ f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_L^{(2)}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

gilt.

1.5 Grenzwertsätze. Mengen vom Maße Null

Abschn.GS

Im Weiteren sei $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum.

satz.SATZ4 **Satz 1.22 (Beppo Levi)** *Seien* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$, $\varphi_n \uparrow \varphi$ *oder* $\varphi_n \downarrow \varphi$ *und* $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Ferner sei* $(\mathcal{J}(\varphi_n))_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt. Dann gilt* $\varphi \in \mathcal{X}$ *und* $\lim \mathcal{J}(\varphi_n) = \mathcal{J}(\varphi)$.

Beweis. Aus $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{X}^\sigma$ und $\mathcal{J}^*(\varphi) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n) < \infty$ folgt $\varphi \in \{f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}\} \cap \mathcal{X}_0^\sigma \subset \mathcal{X}$ und somit $\mathcal{J}^*(\varphi) = \mathcal{J}(\varphi)$. □

defi.DEF7 **Definition 1.23** *Unter dem System der* $\mathcal{X}$-**messbaren Funktionen** *versteht man das kleinste Funktionensystem* $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ *numerischer Funktionen* $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$, *welches folgenden Bedingungen genügt:*

(m1) $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

(m2) $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *und, falls definiert,* $\varphi + \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

(m3) $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi_n := \sup\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\} \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

Das System $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ der messbaren Funktionen hat folgende Eigenschaften:

($\mathcal{M}$1) $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi^{\pm}, |\varphi| \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

($\mathcal{M}$2) $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi \cap \psi, \varphi \cup \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

($\mathcal{M}$3) $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi_n := \inf\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}, \liminf \varphi_n, \limsup \varphi_n \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

($\mathcal{M}$4) $\mathcal{M}(\mathcal{X}) = \{\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e : \exists\, (\varphi_n) \subset \mathcal{X} \text{ mit } \varphi_n \longrightarrow \varphi\}$.

lemma.LEMMA7 **Lemma 1.24** *Für jedes* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *mit* $\varphi \geq 0$ *existiert eine Folge* $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$ *mit* $\varphi_n \geq 0$ *und* $\varphi_n \uparrow \varphi$.

Beweis. Nach ($\mathcal{M}4$) existiert eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$ mit $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, so dass wegen $\varphi \geq 0$ folgt $\varphi_n^+ \longrightarrow \varphi$. Wir setzen

$$\widetilde{\varphi}_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} \varphi_k^+ = \lim_{m\to\infty} \bigcap_{k=n}^{m} \varphi_k^+ .$$

Aus Satz satz.SATZ4 1.22 folgt $\widetilde{\varphi}_n \in \mathcal{X}$ und $\lim \widetilde{\varphi}_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_n = \liminf \varphi_n^+ = \varphi$, also $\widetilde{\varphi}_n \uparrow \varphi$. □

Nach ($\mathcal{M}1$) sind mit φ auch $\varphi^\pm$ Elemente von $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ und nach Lemma lemma.LEMMA7 1.24 gilt $\varphi^\pm \in \mathcal{X}^\sigma$, so dass $\mathcal{J}^*(\varphi^\pm)$ erklärt sind und wir folgende Definition geben können.

defi.DEF8 **Definition 1.25** *Wir sagen, dass das* **Integral** *von* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ **existiert** *bzw. dass* φ **integrierbar** *ist, wenn wenigstens eines der verallgemeinerten Integrale* $\mathcal{J}^*(\varphi^\pm)$ *endlich ist, und schreiben dann*

$$\int \varphi(x)\,dx := \mathcal{J}^*(\varphi^+) - \mathcal{J}^*(\varphi^-) .$$

Bemerkung Ist $\varphi \in \mathcal{X}^\sigma$, so ist φ integrierbar, und es gilt

$$\int \varphi(x)\,dx = \mathcal{J}^*(\varphi) .$$

lemma.LEMMA8 **Lemma 1.26** *Aus* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $\int |\varphi(x)|\,dx < \infty$ *folgt* $\varphi \in \mathcal{X}$.

satz.SATZ5 **Satz 1.27 (Lemma von Fatou)** *Sind* $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$ *und* $\varphi_n \geq 0$, *so gilt*

$$\int \liminf \varphi_n(x)\,dx \leq \liminf \int \varphi_n(x)\,dx .$$

Beweis. Wir setzen $\varphi := \liminf \varphi_n$ und $\widetilde{\varphi}_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} \varphi_k$. Es folgt $\widetilde{\varphi}_n \in \mathcal{X}$ und $\widetilde{\varphi}_n \uparrow \varphi$, also $\varphi \in \mathcal{X}^\sigma$. Folglich ist

$$\int \varphi(x)\,dx = \mathcal{J}^*(\varphi) = \lim \mathcal{J}(\widetilde{\varphi}_n) \leq \lim_{n\to\infty} \int_{k\geq n} \mathcal{J}(\varphi_k) = \liminf \mathcal{J}(\varphi_n) .$$

□

Der folgende Satz ist bekannt unter dem Namen **Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz**.

satz.SATZ6 **Satz 1.28** *Es seien* $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$, $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, $|\varphi_n| \leq \psi$ *und* $\psi \in \mathcal{X}$. *Dann gilt* $\varphi \in \mathcal{X}$ *und*

$$\mathcal{J}(\varphi) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n) .$$

Beweis. Aus $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ folgt $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $|\varphi| \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}^\sigma$, also $\mathcal{J}^*(|\varphi|) \leq \mathcal{J}^*(\psi) = \mathcal{J}(\psi)$. Lemma lemma.LEMMA8 1.26 liefert $\varphi \in \mathcal{X}$. Offenbar gilt $\psi \pm \varphi_n \geq 0$ und somit nach Satz satz.SATZ5 1.27

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\psi) - \mathcal{J}(\varphi) &= \mathcal{J}(\psi - \varphi) = \mathcal{J} \lim(\psi - \varphi_n)) \leq \liminf \mathcal{J}(\psi - \varphi_n) = \liminf \left[\mathcal{J}(\psi) - \mathcal{J}(\varphi_n)\right] \\ &= \mathcal{J}(\psi) - \limsup \mathcal{J}(\varphi_n) \end{aligned}$$

und analog

$$\mathcal{J}(\psi) + \mathcal{J}(\varphi) \le \mathcal{J}(\psi) + \liminf \mathcal{J}(\varphi_n)\,.$$

Es folgt $\limsup \mathcal{J}(\varphi_n) \le \mathcal{J}(\psi) \le \liminf \mathcal{J}(\varphi_n)\,.$ □

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ bezeichnen wir mit $\chi_A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ die **charakteristische Funktion** (erster Art)

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & : \quad x \in A\,, \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{X} \setminus A\,, \end{cases}$$

der Menge A. Dagegen wird

$$\omega_A(x) := \begin{cases} \infty & : \quad x \in A\,, \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{X} \setminus A\,, \end{cases}$$

die **charakteristische Funktion zweiter Art** der Menge A genannt.

defi.DEF9 **Definition 1.29** *Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ heißt vom ($\mathcal{X}-$)***Maße Null***, wenn $\omega_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $\int \omega_A(x)\,dx = 0$ gilt. Das System der Mengen vom Maße Null bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(\mathcal{J})$. Ist eine Aussage $P(x)$ für $x \in \mathbf{X} \setminus A$ mit $A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ wahr, so sagt man „$P(x)$ gilt fast überall (f.ü.) auf $\mathbf{X}$“.*

lemma.LEMMA9 **Lemma 1.30** *Aus $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi \ge 0$ und $\int \varphi(x)\,dx = 0$ folgt $\varphi = 0$ f.ü.*

lemma.LEMMA10 **Lemma 1.31** *Für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ mit $\left|\int \varphi(x)\,dx\right| < \infty$ gilt $|\varphi| < \infty$ f.ü.*

Im Weiteren besitze der Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ die folgende Eigenschaft:

(E) Für alle $A \subset \mathbf{X}$ folgt aus $\omega_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ auch $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

In diesem Fall ist $A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ äquivalent dazu, dass $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $\mathcal{J}^*(\chi_A) = 0$ gilt.

satz.SATZ4a **Satz 1.32** *Es seien $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$, $\varphi_n \uparrow \varphi$ oder $\varphi_n \downarrow \varphi$ f.ü., $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $(\mathcal{J}(\varphi_n))$ beschränkt. Dann folgt $\varphi \in \mathcal{X}$ und $\mathcal{J}(\varphi) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n)$.*

satz.SATZ6a **Satz 1.33** *Sind $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $(\varphi_n) \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi, \varphi_n : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $|\varphi_n| \le \psi$ f.ü, $\psi \in \mathcal{X}$ und $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ f.ü., so gilt auch $\varphi \in \mathcal{X}$ und $\mathcal{J}(\varphi) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n)$.*

1.6 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass $\mathcal{X}$ genau dann ein Vektorverband ist, wenn aus $f, g \in \mathcal{X}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt $\alpha f, f + g, f \cap 0 \in \mathcal{X}$.

2. Man beweise, dass die Menge $\mathcal{X}^{(3)}$ der stetigen und stückweise linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompakten Träger einen Vektorverband bilden.

3. Mit $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der Zerlegungen der reellen Achse,

$$\mathcal{Z}(\mathbb{R}) := \{\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} : -\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \infty,\, n \in \mathbb{N}_0\}\,.$$

Eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{Z}(\mathbb{R})$ nennen wir **zulässig** für $f \in \mathcal{X}^{(3)}$, wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0, x_n]$ gilt und wenn f auf jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$,

$j = 1, \ldots, n$ linear ist. Wir definieren auf $\mathcal{X}^{(3)}$ das Funktional $\mathcal{J}^{(3)}$ wie folgt. Sind $f \in \mathcal{X}^{(3)}$ und $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ zulässig für f , so setzen wir

$$\mathcal{J}^{(3)}(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \left[f(x_{j-1}) + f(x_j) \right] (x_j - x_{j-1}) \ .$$

Man zeige, dass $\mathcal{J}^{(3)} : \mathcal{X}^{(3)} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Integral ist.

4. Man beweise:

   (a) $F, G \in \mathcal{X}^\sigma$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0 \Rightarrow F + G, F \cup G, F \cap G, \alpha F \in \mathcal{X}^\sigma$

   (b) $F \in \mathcal{X}^\sigma$, $F \geq 0 \Rightarrow \exists \ (f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X} : f_n \geq 0, \ f_n \uparrow F$

5. Man zeige, dass das verallgemeinerte Integral $\mathcal{J}^* : \mathcal{X}^\sigma \longrightarrow \mathbb{R}^e$ (vgl. Def. defi.DEF5 1.11) die Eigenschaften (V1) – (V4) besitzt.

6. Man beweise, dass für $F_k \in \mathcal{X}^\sigma$ mit $F_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathcal{J}^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{J}^*(F_k) \, .$$

   Hinweis: Man verwende Satz satz.SATZ3 1.12.

7. Man zeige:

   (a) $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi^+, \varphi^-, |\varphi| \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

   (b) $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi \cup \psi, \varphi \cap \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

   (c) $(\varphi_n)_{n=0}^\infty \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi_n := \inf \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, $\liminf \varphi_n$, $\limsup \varphi_n \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

8. Beweisen Sie, dass $\mathcal{M}(\mathcal{X}) = \{\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e : \exists \ (\varphi_n) \subset \mathcal{X} \text{ mit } \varphi_n \longrightarrow \varphi\}$ gilt.

9. Man zeige, dass eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ genau dann zu $\mathcal{N}(\mathcal{J})$ gehört, wenn ein $F \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $A = \{x \in \mathbf{X} : F(x) = \infty\}$ existiert.

10. Man zeige, dass $\mathcal{N}(\mathcal{J})$ ein σ-Ring ist.

11. Der Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ besitze die Eigenschaft (E). Man zeige, aus $A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$, $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\int \varphi(x) \chi_A(x) \, dx = 0$ und $\varphi \chi_A \in \mathcal{X}$.

Kapitel 2

Die Räume $\mathbf{L}^p(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$

Kapitel.Lp

2.1 Definitionen und einfachste Eigenschaften

Abschn.DefLp

Es sei im Weiteren $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum mit der Eigenschaft (E) und der folgenden Eigenschaft:

(p) Für $p \geq 1$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\varphi\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $|\varphi|^p \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

Auf $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$\varphi \sim \psi \iff \{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) \neq \psi(x)\} \in \mathcal{N}(\mathcal{J}) . \tag{2.1}$$ ER

Ferner erklären wir auf der Menge $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) = \{[\varphi]_\sim : \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})\}$ der entsprechenden Äquivalenzklassen

$$\big|[\varphi]_\sim\big|^p := [|\varphi|^p]_\sim \,, \ \lambda[\varphi]_\sim := [\lambda\varphi]_\sim \,, \ [\varphi]_\sim \cdot [\psi]_\sim := [\varphi\psi]_\sim \text{ und } [\varphi]_\sim + [\psi]_\sim := [\varphi + \psi]_\sim \,, \tag{2.2}$$ D1

falls Repräsentanten φ und ψ existieren, für die $\varphi + \psi$ f.ü. definiert ist. Ferner sei

$$[\varphi]_\sim \leq [\psi]_\sim \iff \{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) > \psi(x)\} \in \mathcal{N}(\mathcal{J}) \tag{2.3}$$ D2

und

$$\int [\varphi]_\sim \, dx := \int \varphi(x) \, dx \,, \tag{2.4}$$ D3

falls dieses Integral existiert. Mit $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$, $1 \leq p < \infty$ bezeichnen wir die Menge

$$\mathbf{L}^p = \left\{ [\varphi]_\sim \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) : \int \big|[\varphi]_\sim\big|^p dx < \infty \right\} .$$

Wir beschränken uns im Weiteren auf den Fall $p = 2$ und schreiben für $[\varphi]_\sim \in \mathbf{L}^2$ einfach $\varphi \in \mathbf{L}^2$.

L2 **Satz 2.1** *Auf* $\mathbf{L}^2$ *kann man das* **innere Produkt** (*auch* **Skalarprodukt** *genannt*)

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int \varphi(x)\psi(x) \, dx$$

erklären, d.h., es gilt für alle $\varphi, \psi, \zeta \in \mathbf{L}^2$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$

(S1) $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \iff \varphi = 0$, (S2) $\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$,

(S3) $\langle \lambda\varphi, \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle$,

(S4) $\langle \varphi + \psi, \zeta \rangle = \langle \varphi, \zeta \rangle + \langle \psi, \zeta \rangle$.

Folgerung 2.2 *Der Raum* $\left(\mathbf{L}^2, \|.\|\right)$ *mit*

$$\|\varphi\| := \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} = \sqrt{\int |\varphi(x)|^2 \, dx}$$

ist ein **normierter Raum***, d.h., folgende Axiome sind erfüllt:*

(N1) $\|\varphi\| \geq 0 \quad \forall \, \varphi \in \mathbf{L}^2$ *und* $\|\varphi\| = 0 \iff \varphi = 0$,

(N2) $\|\lambda\varphi\| = |\lambda| \, \|\varphi\| \quad \forall \, \varphi \in \mathbf{L}^2, \, \forall \, \lambda \in \mathbb{R}$,

(N3) $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\| \quad \forall \, \varphi, \psi \in \mathbf{L}^2$ *(Dreiecksungleichung).*

Außerdem gilt die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \quad \forall \, \varphi, \psi \in \mathbf{L}^2 . \tag{2.5}$$ CS

bem.Lp **Bemerkung 2.3** *Die Räume* $\left(\mathbf{L}^p, \|.\|_p\right)$ *mit*

$$\|\varphi\|_p := \left(\int |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

sind für $1 \leq p < \infty$ *normierte Räume. Dabei gewinnt man die entsprechende Dreiecksungleichung* (N3) *aus der* **Hölder'schen Ungleichung**

$$\left| \int \varphi(x)\psi(x) \, dx \right| \leq \left(\int |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |\psi(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} , \tag{2.6}$$ HU

die für alle $\varphi \in \mathbf{L}^p$ *und* $\psi \in \mathbf{L}^q$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt und die im Fall* $p = q = 2$ *die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* (2.5) *liefert.*

2.2 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass durch (2.1) eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ definiert wird.
2. Zeigen Sie, dass die Definitionen (2.2), (2.3) und (2.4) korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten aus den Äquivalenzklassen, sind.
3. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Es seien a_{kn} $(k, n \in \mathbb{N}_0)$ reelle Zahlen mit den Eigenschaften

   $$\sup \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |a_{kn}| : k \in \mathbb{N}_0 \right\} < \infty \quad \text{und} \quad a_{kn} \uparrow b_n \; (k \to \infty) \; \forall \, n \in \mathbb{N}_0 .$$

   Dann gilt

   $$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

(b) Es seien a_{kn} $(k, n \in \mathbb{N}_0)$ reelle Zahlen mit den Eigenschaften

$$\lim_{k\to\infty} a_{kn} = b_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0\,, \quad |a_{kn}| \le c_n \;\forall\, k, n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty\,.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,.$$

4. Wir betrachten den Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ mit $\mathbf{X} = \mathbb{N}_0$,

$$\mathcal{X} = L\left(\mathcal{J}^{(2)}\right) = \left\{ f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}(f) = \mathcal{J}_L^{(2)}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

(vgl. Abschnitt 1.4). Beschreiben Sie die zugehörigen Räume $\mathbf{L}^p$, $1 \le p < \infty$.

5. Es seien $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ die Ungleichung

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\,.$$

gilt und leiten Sie daraus die Hölder'sche Ungleichung (2.6) ab.

(b) Zeigen Sie, dass $\left(\mathbf{L}^p, \|.\|_p\right)$ ein normierter Raum ist (vgl. Bem. 2.3).

Kapitel 3

Das System der messbaren Mengen

Kapitel.MM

3.1 Definitionen und Eigenschaften

Es sei $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum. Eine Menge $A \subset \mathbf{X}$ nennen wir **Integrationsbereich**, wenn aus $\varphi \in \mathcal{X}$ stets $\varphi\chi_A \in \mathcal{X}$ folgt. Die Menge aller Integrationsbereiche in $\mathbf{X}$ bezeichnen wir mit $\mathbf{I}(\mathcal{J})$. Wegen $\varphi\chi_A = \varphi^+\chi_A - \varphi^-\chi_A$ ist $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ offenbar äquivalent dazu, dass aus $\varphi \in \mathcal{X}$ und $\varphi \geq 0$ folgt $\varphi\chi_A \in \mathcal{X}$. Für $\varphi \in \mathcal{X}$ und $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ schreiben wir

$$\int_A \varphi(x)\, dx := \int (\varphi\chi_A)(x)\, dx\,.$$

lemma.MM1 **Lemma 3.1** *Aus $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ und $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\varphi\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.*

Ein System $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ von Teilmengen der Menge $\mathbf{X}$ heißt **Ring**, wenn die Axiome

(R1) $\emptyset \in \mathcal{R}$,

(R2) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$

erfüllt sind. Der Ring $\mathcal{R}$ wird **Algebra** genannt, wenn zusätzlich

(A) $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$

gilt. Ein Ring (eine Algebra) $\mathcal{R}$ heißt **σ-Ring** (**σ-Algebra**), wenn

(R3) $A_n \in \mathcal{R}\,,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$

zutrifft.

satz.MM1 **Satz 3.2** *Das System $\mathbf{I}(\mathcal{J})$ ist eine σ-Algebra.*

Beweis.

- $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J}), \varphi \in \mathcal{X} \ \Rightarrow\ \varphi\chi_{\mathbf{X}\setminus A} = \varphi - \varphi\chi_A \in \mathcal{X}$

- $A_n \in \mathbf{I}(\mathcal{J}), \varphi \in \mathcal{X}, A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \varphi_n := \varphi \chi_{A_1} \chi_{A_2} \cdots \chi_{A_n}$

  $\Rightarrow \ \varphi \chi_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \varphi_n \in \mathcal{X}, \varphi_n \longrightarrow \varphi \chi_A, |\varphi_n| \leq |\varphi| \in \mathcal{X} \overset{\text{Satz satz.SATZ6 1.28}}{\Rightarrow} \varphi \chi_A \in \mathcal{X}$

□

Im Weiteren schreiben wir z.B. für $\{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) > \psi(x)\}$ kurz $\{\varphi > \psi\}$.

satz.MM2 **Satz 3.3** *Aus $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\{\varphi > \psi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$.*

Beweis.

- Seien vorerst $\varphi \geq 0$ und $\psi \geq 0$ sowie $\varphi \in \mathcal{X}$. Dann ist $A := \{\varphi > \psi\} = \{\varphi - \psi > 0\} = \{(\varphi - \psi)^+ > 0\}$. Sei $\omega \in \mathcal{X}$ mit $\omega \geq 0$. Dann folgt $\varphi_n := \omega \cap (n(\varphi - \psi)^+) \in \mathcal{X}$ (da $(\varphi - \psi)^+ \leq \psi$ und somit $(\varphi - \psi)^+ \in \mathcal{X}$) und $\varphi_n \uparrow \omega \chi_A \in \mathcal{X}$ (nach Satz satz.SATZ4 1.22, weil $\mathcal{J}(\varphi_n) \leq \mathcal{J}(\omega)$).

- Sei jetzt auch $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Dann existiert eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$ mit $\varphi_n \geq 0$ und $\varphi_n \uparrow \varphi$. Es folgt $\{\varphi > \psi\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n > \psi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$.

- Sind nun $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ beliebig, so gilt

$$\{\varphi > \psi\} = \left\{\varphi^+ > \psi^+\right\} \cup \left\{\varphi^- < \psi^-\right\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J}) .$$

□

folg.MM1 **Folgerung 3.4** *Unter Verwendung der Sätze satz.MM1 3.2 und satz.MM2 3.3 erhält man aus $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ auch*

- $\{\varphi \geq \psi\} = \mathbf{X} \setminus \{\psi > \varphi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$,
- $\{\varphi \neq \psi\} = \{\varphi > \psi\} \cup \{\psi > \varphi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$,
- $\{\varphi = \psi\} = \mathbf{X} \setminus \{\varphi \neq \psi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$.

Eine Menge $A \subset \mathbf{X}$ nennen wir Grenzwert der Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ (in Zeichen: $A = \lim A_n$), wenn

$$\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A$$

gilt. Man beachte, dass aus $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{I}(\mathcal{J})$ und $A = \lim A_n$ folgt $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ (vgl. Satz satz.MM1 3.2). Der folgende Satz zeigt, dass das Integral stetig bezüglich des Integrationsbereiches ist.

satz.MM3 **Satz 3.5** *Aus $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{I}(\mathcal{J})$, $\lim A_n = A$ und $\varphi \in \mathcal{X}$ folgt*

$$\int_A \varphi(x)\, dx = \lim \int_{A_n} \varphi(x)\, dx .$$

satz.MM4 **Satz 3.6 (σ-Additivität des Integrals)** *Es seien $A_n \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$, $A_n \cap A_k = \emptyset$ für $n \neq k$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Dann gilt*

$$\int_A \varphi(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \varphi(x)\, dx .$$

Im Weiteren gelte die Eigenschaft (E) aus Abschnitt Abschn.GS 1.5.

defi.MM3 **Definition 3.7** *Eine Menge* $A \subset \mathbf{X}$ *heißt* $(\mathcal{X}$*-)***messbar***, wenn* $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *gilt. Die Menge aller messbaren Mengen* $A \subset \mathbf{X}$ *bezeichnen wir mit* $\mathbf{M}(\mathcal{J})$. *Unter dem* $(\mathcal{J}$*-)***Maß** *einer Menge* $A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ *verstehen wir die Zahl*

$$\mu(A) := \int \chi_A(x)\, dx\,.$$

lemma.MM2 **Lemma 3.8** *Es gilt* $\mathcal{N}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{M}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{I}(\mathcal{J})$.

satz.MM5 **Satz 3.9** $\mathbf{M}(\mathcal{J})$ *ist ein* σ*-Ring.*

satz.MM6 **Satz 3.10 (σ-Additivität des Maßes μ)** *Sind* $A_n \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ *paarweise durchschnittsfremde Mengen, so gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

satz.MM7 **Satz 3.11 (Tschebyscheff'sche Ungleichung)** *Es seien* $A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$, $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi \geq 0$ *und* $\varepsilon > 0$. *Dann gilt*

$$\mu\left(\{\varphi \geq \varepsilon\} \cap A\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_A \varphi(x)\, dx\,.$$

defi.MM4 **Definition 3.12** *Es sei* $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$. *Eine Folge* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *nennen wir* **konvergent dem Maße nach** *gegen* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, *wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{|\varphi_n - \varphi| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

gilt.

folg.MM2 **Folgerung 3.13** *Es gelte* $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$. *Aus* $\varphi_n \in \mathbf{L}^1$ *und* $\|\varphi_n\|_1 \longrightarrow 0$ *folgt dann unter Verwendung der Tschebyscheff'schen Ungleichung die Konvergenz von* φ_n *gegen Null dem Maße nach.*

satz.MM8 **Satz 3.14 (Egorov)** *Es seien* $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$, $\mu(\mathbf{X}) < \infty$, $\varphi_n \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $|\varphi_n| < \infty$ *f.ü. und* $\varphi_n \longrightarrow 0$ *f.ü. Dann existiert für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ *mit*

$$\mu(\mathbf{X}_0) \leq \varepsilon \quad \textit{und} \quad \sup_{x \in \mathbf{X}\setminus\mathbf{X}_0} |\varphi_n(x)| \longrightarrow 0\,.$$

Bemerkungen

1. Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$, so folgt

   $$\{\varphi \geq \psi\} \cap A\,,\ \{\varphi > \psi\} \cap A\,,\ \{\varphi \neq \psi\} \cap A\,,\ \{\varphi = \psi\} \cap A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})\,,$$

   denn nach Folgerung folg.MM1 3.4 gilt $\{\varphi \geq \psi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$, so dass nach Lemma lemma.MM1 3.1 $\chi_{\{\varphi\geq\psi\}\cap A} = \chi_A \cdot \chi_{\{\varphi\geq\psi\}} \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt. Das wird in Definition defi.MM4 3.12 sowie in den Beweisen von Satz satz.MM7 3.11, Folgerung folg.MM2 3.13 und Satz satz.MM8 3.14 verwendet.

2. Im Fall $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ ist die Bedingung (E) erfüllt, denn $\chi_A = \omega_A \cap \chi_{\mathbf{X}}$. Außerdem gilt $\mathbf{M}(\mathcal{J}) = \mathbf{I}(\mathcal{J})$, denn aus $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ folgt mit Lemma 3.1 $\chi_A = \chi_{\mathbf{X}} \cdot \chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Man beachte zusätzlich Lemma 3.8.

3. Im Fall $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ ist also jede Menge $\{\varphi > a\}$ messbar, falls $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $a \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt für eine Funktion $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ sogar Folgendes:

$$\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \iff \{\varphi > a\} \in \mathbf{M}(\mathcal{J}) \; \forall \, a \in \mathbb{R}$$

Beweis. Wir haben nur noch die Hinlänglichkeit der Bedingung zu zeigen. Seien also für eine Funktion $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ alle Mengen $\{\varphi > a\}$, $a \in \mathbb{R}$ messbar. Wir setzen vorerst voraus, dass $\varphi \geq 0$ gilt, und definieren die Funktionen

$$\varphi_m = m \, \chi_{A_m} + \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m} \, \chi_{A_{km}} \,, \quad m \in \mathbb{N}_0 \,,$$

wobei die Mengen

$$A_{km} := \left\{ \frac{k-1}{2^m} < \varphi \leq \frac{k}{2^m} \right\} = \left\{ \varphi > \frac{k-1}{2^m} \right\} \setminus \left\{ \varphi > \frac{k}{2^m} \right\} , \quad k = 1 \ldots , m2^m \,,$$

und

$$A_m := \{\varphi > m\}$$

für festes $m \in \mathbb{N}_0$ paarweise disjunkt und nach Voraussetzung messbar sind. Damit gilt $\varphi_m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Wir zeigen $\varphi_m \uparrow \varphi$ ($m \longrightarrow \infty$), so dass nach Definition 1.23,(m3) auch $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ gilt (man kann auch Aufgabe 7(c), Abschnitt 1.6 verwenden und auf den Nachweis der Isotonie der Folge (φ_m) verzichten).

Ist $\varphi(x) = 0$ oder $\varphi(x) = \infty$, so gilt $\varphi_m(x) = 0$ bzw. $\varphi_m(x) = m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, also $\varphi_m(x) \uparrow \varphi(x)$ in beiden Fällen.

Sei nun $x \in A_{km}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $k \in \{1, \ldots, m2^m\}$. Es folgt

$$\varphi_m(x) = \frac{k-1}{2^m} < \varphi(x) \leq \frac{1}{2^m} + \varphi_m(x)$$

und $x \in A_{2k-1,m+1} \cup A_{2k,m+1}$, also $\varphi_{m+1}(x) \geq \varphi_m(x)$ und $x \in A_{j,m+1}$ für ein $j \in \left\{1, \ldots, (m+1)2^{m+1}\right\}$. Somit ergibt sich induktiv

$$\varphi_{m+\ell} < \varphi(x) \leq \frac{1}{2^{m+\ell}} + \varphi_{m+\ell}(x) \quad \forall \, \ell \in \mathbb{N}_0$$

sowie $\varphi_{m+\ell+1}(x) \geq \varphi_{m+\ell}(x)$, $\ell \in \mathbb{N}_0$. Das impliziert $\varphi_m(x) \longrightarrow \varphi(x)$.

Ist nun $x \in A_m \setminus A_{m+1}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$, also $\varphi_0(x) = \ldots = \varphi_{m-1}(x) = 0$ und $m+1 \geq \varphi(x) > m$, so folgt $\varphi_m(x) = m$ und $x \in A_{k,m+1}$ für ein $k \in \left\{m2^{m+1}+1, \ldots, (m+1)2^{m+1}\right\}$. Dies bedeutet $\varphi_{m+1} \geq m = \varphi_m(x)$, und wir sind im vorhergehenden Fall mit $m+1$ statt m, womit die Konvergenz von (φ_m) gezeigt ist.

Verzichten wir jetzt auf die Voraussetzung $\varphi \geq 0$, so können wir aus der Voraussetzung $\{\varphi > a\} \in \mathbf{M}(\mathcal{J}) \; \forall \, a \in \mathbb{R}$ schließen, dass

$$\left\{\varphi^+ > a\right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \varphi > a & : & a \geq 0 \\ \mathbf{X} & : & a < 0 \end{array} \right\} \in \mathbf{M}(\mathcal{J}) \quad \forall \, a \in \mathbb{R}$$

und

$$\{\varphi^- > a\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{X} \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi > -a - \dfrac{1}{n} \right\} & : & a \ge 0 \\ \mathbf{X} & : & a < 0 \end{array} \right\} \in \mathbf{M}(\mathcal{J}) \quad \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

Nach den vorhergehenden Überlegungen gilt $\varphi^\pm \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und damit $\varphi = \varphi^+ - \varphi^- \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. □

3.2 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass ein Ring bezüglich des Durchschnitts endlich vieler Mengen und ein σ-Ring bezüglich des Durchschnitts abzählbar vieler Mengen abgeschlossen sind.

2. Es seien $\mathbf{X}$ eine unendliche Menge und $\mathcal{R}_0$ die Familie aller endlichen Teilmengen von $\mathbf{X}$. Man beschreibe den kleinsten σ-Ring $\mathcal{R}$, der $\mathcal{R}_0$ umfasst.

3. Es sei $\{\mathcal{R}_k : k \in \mathbb{I}\}$ eine Familie von σ-Ringen $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$. Man zeige:

   (a) $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{I}} \mathcal{R}_k$ ist ein σ-Ring.

   (b) $\mathcal{R}_{k_1} \cup \mathcal{R}_{k_2}$ ist i.Allg. kein Ring.

   (c) Sind $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ und $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_k$ ein Ring, aber i.Allg. kein σ-Ring.

4. Es seien A_n, B_n, ... Teilmengen einer Menge $\mathbf{X}$. Man beweise:

   (a) $\liminf A_n \subset \limsup B_n$

   (b) $A_n \subset A_{n+1}$, $B_{n+1} \subset B_n$, $n \in \mathbb{N} \implies$

      (b1) $\exists\, A = \lim A_n$, $B = \lim B_n$

      (b2) $C_{2n-1} := A_n$, $C_{2n} := B_n$, $n \in \mathbb{N} \implies$

         (b21) $\liminf C_n = A \cap B$

         (b22) $\exists \lim C_n \iff A = B$

5. Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0,\infty]$ nennt man **Maß** (genauer **Prämaß**, vgl. Abschnitt 5.1 der Vorlesung) auf dem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ und wenn für paarweise disjunkte Mengen $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

gilt.

   (a) Man zeige, das für ein Maß $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0,\infty]$ gilt:

$$A_n \in \mathcal{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(b) Wird durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & : \quad A = \emptyset\,, \\ \infty & : \quad A \in \mathcal{P}(\mathbf{X}) \setminus \{\emptyset\}\,, \end{cases}$$

ein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ definiert?

(c) Es sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ die Familie aller Mengen, die höchstens abzählbar oder deren Komplemente höchstens abzählbar sind. Wir definieren

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & : \quad A \text{ endlich}\,, \\ \alpha & : \quad A \text{ unendlich}\,. \end{cases}$$

Für welche $\alpha \in [0, \infty]$ ist $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ ein Maß?

6. Es seien $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ eine additive Mengenfunktion, d.h.,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{R} : A \cap B = \emptyset\,.$$

Man zeige, dass $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ genau dann ein Maß ist, wenn aus $A_n \in \mathcal{A}$ und $A_n \supset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim A_n = \emptyset$ folgt $\lim \mu(A_n) = 0$.

(Z) Unter den Voraussetzungen von Aufgabe 6 zeige man, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ ist ein Maß.

(b) $A_n \in \mathcal{R}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $A := \lim A_n \in \mathcal{R} \implies \lim \mu(A_n) = \mu(A)$ (Stet. von unten)

(c) $A_n \in \mathcal{R}$, $A_n \supset A_{n+1}$, $A := \lim A_n \in \mathcal{R} \implies \lim \mu(A_n) = \mu(A)$ (Stet. von oben)

Kapitel 4

Das Lebesgue-Integral im $\mathbb{R}^n$

4.1 Erster Zugang

Wir gehen von Beispiel bsp.BEISP1n 1.4 mit dem Vektorverband $\mathcal{X}^{(1)} = \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ und dem Riemann-Integral $\mathcal{J}^{(1)} : \mathcal{X}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ aus und erweitern dieses Integral zu dem vollständigen Lebesgue-Integral $\mathcal{J}_L^{(1)} : L(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $L(\mathbb{R}) := L\left(\mathcal{J}^{(1)}\right)$ (vgl. Abschnitt Abschn.LI 1.4). Für $\varphi \in L(\mathbb{R})$ schreiben wir

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \quad \text{statt} \quad \mathcal{J}_L^{(1)}(\varphi)\,.$$

Diese Schreibweise verwenden wir auch für integrierbare Funktionen $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}))$. Im Weiteren betrachten wir also den Integrationsraum $\left(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}}\right)$.

satz.SATZ1Rn **Satz 4.1** *Jedes Intervall der reellen Achse ist messbar, und das Maß eines Intervalls ist gleich dessen Länge, z.B.* $\mu([a,b)) = b - a$, $-\infty < a < b \leq \infty$.

satz.SATZ2Rn **Satz 4.2** *Für* $-\infty < a < b < \infty$ *und jede stetige Funktion* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *gilt*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[a,b]}(x)\,dx\,,$$

wobei $(R)\int_a^b$ *das Riemann-Integral bezeichnet.*

Mit $\mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompakten Träger. Für einen Vektor $x = \left[\ \xi_k\ \right]_{k=1}^n$ sei mit $|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2}$ seine Euklidische Norm bezeichnet.

satz.SATZ3Rn **Satz 4.3** *Sind* $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})$ *und*

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,dt\,,$$

so folgt $g \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

Die Aussage des Satzes satz.SATZ3Rn 4.3 können wir iterieren und erhalten, dass für $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$ das Funktional

$$\mathcal{J}^{(n)}(f) := \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,d\xi_1 \ldots d\xi_n \tag{4.1}$$ Jn

wohldefiniert ist. Das Funktional $\mathcal{J}^{(n)} : \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ erweist sich als Integral.

defi.DEF1Rn **Definition 4.4** *Das von $\mathcal{J}^{(n)} : \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ erzeugte vollständige L-Integral nennen wir* **Lebesgue'sches Integral** *über $\mathbb{R}^n$ (vgl. Abschnitt* Abschn.LI *1.4). Den zugehörigen Vektorverband bezeichnen wir mit $L(\mathbb{R}^n)$ und das Integral mit $\int_{\mathbb{R}^n}$. Für $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$ schreiben wir*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,.$$

Diese Schreibweise verwenden wir auch für integrierbare Funktionen $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$.

Damit ist uns also der Integrationsraum $\left(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n}\right)$ gegeben.

satz.SATZ4Rn **Satz 4.5** *Seien $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in L(\mathbb{R}^m)$ und $\rho(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. Dann gilt $\rho \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ und*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \rho(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y)\, dy\,.$$

Für die bzgl. $\int_{\mathbb{R}^n}$ messbaren Mengen verwenden wir statt $\mathbf{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\right)$ die Bezeichnung $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$.

folg.FOLG1Rn **Folgerung 4.6** *Mit $A \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ und $B \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^m)$ folgt $A \times B \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^{n+m})$.*

Diese Folgerung zeigt zusammen mit Satz satz.SATZ1Rn 4.1, dass jedes Parallelepiped $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ messbar und sein Maß gleich $(b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ ist. Da jede offene Menge als Vereinigung höchstens abzählbar vieler abgeschlossener Würfel darstellbar ist, folgt aus Satz satz.MM1 3.2 die Messbarkeit jeder offenen und auch jeder abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

folg.FOLG2Rn **Folgerung 4.7** *Es gilt $\mathbb{R}^n \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$, so dass nach den Bemerkungen am Ende von Kapitel* Kapitel.MM *3 der Integrationsraum $\left(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n}\right)$ die Eigenschaft (E) besitzt. Außerdem ist $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n) = \mathbf{I}(\mathbb{R}^n) := \mathbf{I}(\int_{\mathbb{R}^n})$, und eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ ist genau dann messbar, wenn jede Menge $\{\varphi > a\}$, $a \in \mathbb{R}$ messbar ist.*

satz.SATZ5Rn **Satz 4.8** *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gehört genau dann zu $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $A_0 \subset \mathbb{R}^n$ und eine abgeschlossene Menge $A_c \subset \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $A_c \subset A \subset A_o$ und $\mu(A_o \setminus A_c) < \varepsilon$ gilt.*

Der folgende Satz zeigt, dass in der vorliegenden Situation die Voraussetzung (p) aus Kapitel Kapitel.Lp 2 erfüllt ist.

satz.SATZ6Rn **Satz 4.9** *Aus $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$ und $1 \leq p < \infty$ folgt $\varphi\psi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$ und $|\varphi|^p \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$.*

4.2 Zweiter Zugang

Ausgehend von den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnittes beschreiben wir hier einen anderen Zugang zur Maß- und Integrationstheorie über dem $\mathbb{R}^n$ im Lebesgue'schen Sinne:

(a) Für ein n-dimensionales "Intervall" $I = I^1 \times \ldots \times I^n$, wobei I^j ein beliebiges Intervall (offen, abgeschlossen oder halboffen) der reellen Achse $\mathbb{R}$ ist, setzen wir

$$\mu(I) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)\,.$$

(b) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, so lässt sich diese als Vereinigung höchstens abzählbar vieler paarweise disjunkter Intervalle $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ darstellen. Wir definieren $\mu(A) := \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k)$. Dabei ist $\mu(A)$ unabhängig von der gewählten Darstellung.

(c) Wir nennen eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $A_0 \subset \mathbb{R}^n$ und eine abgeschlossene Menge $A_c \subset \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $A_c \subset A \subset A_o$ und $\mu(A_o \setminus A_c) < \varepsilon$ gilt, und setzen $\mu(A) := \inf \{\mu(A_o) : A \subset A_o \subset \mathbb{R}^n,\ A_o\text{- offen}\}$.

(d) Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ nennen wir messbar, wenn die Menge $\{\varphi > a\}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ messbar ist.

(e) Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Beweis der letzten Bemerkung am Ende von Kapitel.MM
Kapitel 3: Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ messbar, wobei $\varphi \geq 0$, so definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx := \lim_{m \to \infty} \left[m \cdot \mu(A_m) + \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m}\, \mu(A_{km}) \right].$$

(f) Sind $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ messbar und eines der Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^+(x)\, dx$ oder $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^-(x)\, dx$ endlich, so setzen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^+(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^-(x)\, dx.$$

4.3 Iterierte Integrale

mma.LEMMA1Rn **Lemma 4.10** *Es sei $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum. Das Integral $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann vollständig, wenn aus $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $|\varphi| \leq \psi$ und $\int \psi(x)\, dx = 0$ folgt $\varphi \in \mathcal{X}$.*

folg.FOLG3Rn **Folgerung 4.11** *Ist $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum mit vollständigem Integral, so folgt aus $B \subset A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ stets $B \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$.*

Ist also $A \subset \mathbb{R}$ eine nicht Lebesgue-messbare Menge, so ist aber $B = A \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge vom ($\mathbb{R}^2$)-Lebesgue-Maß Null. Man kann aber nicht einfach

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_B(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(x)\chi_{\{0\}}(y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{0\}}(y) \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x)\, dx\, dy$$

satz.SATZ7Rn
schreiben, weil das innere Integral nicht erklärt ist. Wir formulieren dazu den Satz 4.12 und machen folgende Annahmen:

1. Es seien $(\mathbf{X}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{J}_1)$ und $(\mathbf{X}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{J}_2)$ zwei Integraionsräume mit vollständigem Integral.

2. Es existiere ein Vektorverband $\mathcal{X}$ von Funktionen $\varphi : \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, für die

$$\mathcal{J}(\varphi) := \int_{\mathbf{X}_2} \left(\int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2 \in \mathbb{R}$$

existiert, wobei $\int_{\mathbf{X}_k} \psi(x_k)\, dx_k := \mathcal{J}_k(\psi)$. Dann ist $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Integral, welches zu einem vollständigen L-Integral $\mathcal{J}_L$ auf dem Vektorverband $L(\mathcal{J})$ fortgesetzt werden kann. Also ist $(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2, L(\mathcal{J}), \mathcal{J}_L)$ ein Integrationsraum mit vollständigem Integral, welches wir in der Form $\int \varphi(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2)$ schreiben.

satz.SATZ7Rn **Satz 4.12** *Sei* $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathcal{J}))$, *und es existiere* $\int \varphi(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2)$. *Dann gilt:*

(a) *Für* $\mathcal{J}_2$*-fast alle* $x_2 \in \mathbf{X}_2$ *existiert* $\varphi^*(x_2) := \displaystyle\int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1$.

(b) *Man kann* φ^* *zu einer messbaren Funktion* $\varphi^* : \mathbf{X}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^e$ *fortsetzen, d.h.,* $\varphi^* \in \mathcal{M}(\mathcal{X}_2)$.

(c) *Es ist*

$$\int \varphi(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2) = \int_{\mathbf{X}_2} \int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =: \int_{\mathbf{X}_2} \varphi^*(x_2)\, dx_2$$

unabhängig von der gewählten Fortsetzung.

4.4 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass $\mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorverband ist und durch (Jn 4.1) ein Integral definiert wird.
2. Zeigen Sie, dass jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ als Vereinigung höchstens abzählbar vieler abgeschlossener Quadrate darstellbar ist.
3. Zeigen Sie, dass das in Abschnitt 4.3, Punkt 2 mit $\mathcal{J}$ bezeichnete Funktional ein Integral auf $\mathcal{X}$ ist.

Kapitel 5

Maßräume

5.1 Maße und Prämaße

Abschn.MR1

defi.DEF1MR **Definition 5.1** *Es seien* $\mathbf{X}$ *eine beliebige nichtleere Menge und* $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ *ein* σ*-Ring. Eine nichtnegative* σ*-additive Mengenfunktion* $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ *heißt* **Maß** *und* $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ *wird* **Maßraum** *genannt. Den* σ*-Ring* $\mathcal{R}$ *nennt man dann das* **System der** μ**-messbaren Mengen***. Man sagt, dass der Maßraum* $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ *ein* **messbarer Raum** *ist, wenn* $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ *gilt.*

Im Kapitel 3 [Kapitel.MM] haben wir gesehen, dass man mittels eines Integrationsraumes $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ einen Maßraum $(\mathbf{X}, \mathbf{M}(\mathcal{J}), \mu)$ erzeugen kann. Im Weiteren lernen wir die Möglichkeit kennen, aus einem sogenannten Prämaß eine Maß zu konstruieren.

defi.DEF2MR **Definition 5.2** *Eine nichtnegative Mengenfunktion* $\mu : \mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^e$ *auf einem Ring* $\mathcal{R}_0$ *heißt* **Prämaß**, *wenn* $\mu(\emptyset) = 0$ *gilt und wenn aus* $A, A_n \in \mathcal{R}_0$, $A_n \cap A_k = \emptyset$ *für* $n \neq k$ *und* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *die Gleichung* $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *folgt (bedingte* σ*-Additivität).*

Ist $\mu : \mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^e$ ein Prämaß, so definieren wir für alle $A \subset \mathbf{X}$ mittels

$$\mu^*(A) := \left\{ \begin{array}{c} \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{R}_0,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, \\ \infty, \text{ falls keine solche Überdeckung von } A \text{ existiert,} \end{array} \right\}$$

das sogenannte **äußere Maß**. Eigenschaften des äußeren Maßes:

(A1) $\mu^*(A) = \mu(A) \ \forall\, A \in \mathcal{R}_0$,

(A2) $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \subset \mathbf{X} \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$,

(A3) $B \subset A \subset \mathbf{X} \Rightarrow \mu^*(B) \leq \mu^*(A)$.

mma.LEMMA1MR **Lemma 5.3** *Für alle* $A \in \mathcal{R}_0$ *gilt*

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A) \quad \forall\, M \subset \mathbf{X} .$$

defi.DEF3MR **Definition 5.4** *Eine Menge $A \subset \mathbf{X}$ heißt* μ^***-messbar** (*nach Caratheodory*)*, wenn*

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A) \quad \forall\, M \subset \mathbf{X}$$

gilt. Das System aller μ^*-messbaren Mengen $A \subset \mathbf{X}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_0^*$.

mma.LEMMA2MR **Lemma 5.5** *Aus $A \subset \mathbf{X}$ und $\mu^*(A) = 0$ folgt $A \in \mathcal{R}_0^*$.*

satz.SATZ1MR **Satz 5.6** *Die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{R}_0^* \longrightarrow \mathbb{R}^e$, $A \mapsto \mu^*(A)$ ist ein Maß.*

defi.DEF4MR **Definition 5.7** *Sind $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ ein messbarer Raum und $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ eine numerische Funktion, so heißt dies Funktion* μ**-messbar**, *wenn $\{f > a\} \in \mathcal{R}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Das System aller μ-messbaren Funktionen $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\mu)$.*

satz.SATZ2MR **Satz 5.8** *Für einen messbaren Raum $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ gilt:*

(a) *Aus $f \in \mathcal{M}(\mu)$ folgt $|f| \in \mathcal{M}(\mu)$.*

(b) *Aus $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}(\mu)$ folgt $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n \in \mathcal{M}(\mu)$.*

(c) *Sind $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f, g \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbf{X}$, so folgt $h \in \mathcal{M}(\mu)$, wobei $h(x) := F(f(x), g(x))$.*

Aus den Aussagen (a) und (c) des Satzes satz.SATZ2MR 5.8 ergibt sich, dass $\mathcal{X} := \{f \in \mathcal{M}(\mu) : f(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}\}$ ein Vektorverband ist.

defi.DEF5MR **Definition 5.9** *Eine Funktion $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt* **einfache Funktion** *oder* **Treppenfunktion**, *wenn $f(\mathbf{X})$ endlich ist. Die Menge aller messbaren einfachen Funktionen $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_e(\mu)$.*

Offenbar lässt sich jede Funktion $f \in \mathcal{M}_e(\mu)$ auf eindeutige Weise in der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^m \gamma_k \chi_{E_k}(x)$$

schreiben, wobei $m = m(f) \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $\gamma_k \neq \gamma_j$ für $j \neq k$ und $E_k \in \mathcal{R}$ mit $E_k \cap E_j = \emptyset$ für $j \neq k$ und $\bigcup\limits_{k=1}^m E_k = \mathbf{X}$. In diesem Fall definieren wir

$$\int_E f\, d\mu := \sum_{k=1}^m \gamma_k \mu(E \cap E_k) \quad \forall\, E \in \mathcal{R}.$$

defi.DEF6MR **Definition 5.10** *Sind $f \in \mathcal{M}(\mu)$, $f \geq 0$ und $E \in \mathcal{R}$, so definieren wir*

$$\int_E f\, d\mu := \sup\left\{ \int_E s\, d\mu : s \in \mathcal{M}_e(\mu),\ 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Sind $f \in \mathcal{M}(\mu)$ und eines der beiden Integrale $\displaystyle\int_E f^\pm\, d\mu$ endlich, so setzen wir

$$\int_E f\, d\mu := \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu.$$

Unter der Menge $\mathcal{L}_E(\mu)$ der bezüglich μ auf E **summierbaren Funktionen** *verstehen wir*

$$\mathcal{L}_E(\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(\mu) : \left| \int_E f\, d\mu \right| < \infty \right\}.$$

Eigenschaften dieses Integralbegriffes:

(I1) $f, g \in \mathcal{M}(\mu)\,,\ 0 \leq f \leq g\,,\ E \in \mathcal{R}\ \Rightarrow\ \int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$
Dabei genügt es $f(x) \leq g(x)$ für $x \in E$ vorauszusetzen!

(I2) $A, E \in \mathcal{R}\,,\ A \subset E\,,\ f \in \mathcal{M}(\mu)\,,\ f \geq 0\ \Rightarrow\ \int_A f\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu$

(I3) $f \in \mathcal{M}(\mu)\,,\ m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in E \in \mathcal{R}\ \Rightarrow\ m\,\mu(E) \leq \int_E f\,d\mu \leq M\,\mu(E)$

(I4) $f \in \mathcal{M}(\mu)\,,\ f \geq 0\,,\ E \in \mathcal{R}$:

$$\int_E f\,d\mu = 0 \iff \mu\,(E \cap \{f > 0\}) = 0$$

satz.SATZ3MR **Satz 5.11** *Es sei $f \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f \geq 0$. Für $A \in \mathcal{R}$ definieren wir $\Phi(A) := \int_A f\,d\mu$. Dann ist $\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ ein Maß (vgl. auch Satz* satz.MM4 *3.6).*

folg.FOLG1MR **Folgerung 5.12** *Für $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ ist die in Satz* satz.SATZ3MR *5.11 definierte Mengenfunktion $\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv.*

5.2 Grenzwertsätze

satz.SATZ4MR **Satz 5.13** *Es seien $f_n \in \mathcal{M}(\mu)\,,\ 0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots\,,\ f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ und $E \in \mathcal{R}$. Dann gilt*

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu\,.$$

(I5) Für $f, g \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f \geq 0\,,\ g \geq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}\,,\ E \in \mathcal{R}$ gilt

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu \quad \text{und} \quad \int_E (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu\,.$$

(I6) Aus $f, g \in \mathcal{L}_E(\mu)$ mit $f, g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu \quad \text{und} \quad \int_E (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu\,.$$

(I7) Aus $f \in \mathcal{L}_E(\mu)$ folgt $\mu\,(E \cap \{|f| = \infty\}) = 0$.

mma.LEMMA3MR **Lemma 5.14 (Fatou)** *Sind $E \in \mathcal{R}\,,\ f_n \in \mathcal{M}(\mu)$ und $f_n \geq 0\,,\ n \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$\int_E \liminf f_n\,d\mu \leq \liminf \int_E f_n\,d\mu\,.$$

satz.SATZ5MR **Satz 5.15 (Lebesgue)** *Aus $E \in \mathcal{R}\,,\ f_n, f \in \mathcal{M}(\mu)\,,\ f = \lim f_n$ und aus der Existenz einer Funktion $g \in \mathcal{L}_E(\mu)$ mit $|f_n| \leq g\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ folgt $f_n, f \in \mathcal{L}_E(\mu)$ und*

$$\lim \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu\,.$$

5.3 Zerlegung σ-additiver Mengenfunktionen

Es seien wieder $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ ein messbarer Raum mit $\mu(\emptyset) = 0$ und $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine σ-additive Mengenfunktion.

defi.DEF7MR **Definition 5.16** *Man nennt ν* **absolut stetig** *bezüglich μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$), wenn aus $E \in \mathcal{R}$ und $\mu(E) = 0$ folgt $\nu(E) = 0$. Man sagt, dass ν auf $A \in \mathcal{R}$* **konzentriert** *ist, wenn $\nu(E) = \nu(A \cap E)$ für alle $E \in \mathcal{R}$ gilt. Falls $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so ist dies äquivalent zu $\nu(E) = 0$ $\forall\, E \in \mathcal{R}$ mit $A \cap E = \emptyset$. Sind $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ σ-additiv, so nennen wir ν_1 und ν_2* **zueinander singulär** *(in Zeichen: $\nu_1 \perp \nu_2$), wenn Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$ existieren, so dass $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gilt und ν_1 auf A_1 sowie ν_2 auf A_2 konzentriert sind.*

folg.FOLG2MR **Folgerung 5.17** *Für σ-additive Mengenfunktionen $\nu, \nu_1, \nu_2 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt:*

(a) $\nu_1 \perp \mu\,,\ \nu_2 \perp \mu \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 \perp \mu$

(b) $\nu_1 \ll \mu\,,\ \nu_2 \ll \mu \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 \ll \mu$

(c) $\nu_1 \ll \mu\,,\ \nu_2 \perp \mu \Rightarrow \nu_1 \perp \nu_2$

(d) $\nu \ll \mu\,,\ \nu \perp \mu \Rightarrow \nu \equiv 0$

Wir nennen μ ein σ-endliches Maß, wenn Mengen $A_n \in \mathcal{R}$ existieren, so dass $\mathbf{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty\,,\ n \in \mathbb{N}$ gilt.

mma.LEMMA4MR **Lemma 5.18** *Ist das Maß $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ σ-endlich, so existiert eine Funktion $\omega \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ mit $0 < \omega(x) < 1\,,\ x \in \mathbf{X}$.*

satz.SATZ6MR **Satz 5.19 (Lebesgue-Radon-Nikodym)** *Es seien das Maß $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ σ-endlich und $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann existieren eindeutig bestimmte σ-additive Mengenfunktionen $\nu_a : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\nu_s : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\nu = \nu_a + \nu_s\,, \quad \nu_a \ll \mu \quad \textit{und} \quad \nu_s \perp \mu\,.$$

Es gibt eine μ-f.ü. eindeutig bestimmte Funktion $h \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$, so dass

$$\nu_a(E) = \int_E h\,d\mu \quad \forall\, E \in \mathcal{R}$$

gilt.

satz.SATZ7MR **Satz 5.20** *Es seien $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ eine σ-Algebra und $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ σ-additiv mit $\eta(\emptyset) = 0$. Dann ist*

$$\eta^+ : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e\,,\ E \mapsto \sup\{\eta(A) : A \in \mathcal{R},\, A \subset E\}$$

ein Maß auf $\mathcal{R}$. Gilt $\eta(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$, so gilt dies auch für η^+.

Im Weiteren sei $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann ist auch $\eta^- : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ E \mapsto \eta^+(E) - \eta(E)$ ein Maß. Man nennt η^+ und η^- die **positive** bzw. **negative Variation** und $\eta = \eta^+ - \eta^-$ die **Jordan-Zerlegung** von η. Das Maß $|\eta| : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ E \mapsto \eta^+(E) + \eta^-(E)$ heißt **Totalvariation** von η.

satz.SATZ8MR **Satz 5.21 (Zerlegungssatz von Hahn)** *Es seien $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann existieren $\mathbf{X}^{\pm} \in \mathcal{R}$ mit $\mathbf{X}^+ \cap \mathbf{X}^- = \emptyset$, $\mathbf{X}^+ \cup \mathbf{X}^- = \mathbf{X}$ und*

$$\eta^+(E) = \eta(E \cap \mathbf{X}^+)\,,\ \eta^-(E) = \eta(E \cap \mathbf{X}^-) \quad \forall\, E \in \mathcal{R}\,.$$

5.4 Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie Folgerung folg.FOLG2MR 5.17.

2. Zeigen Sie, dass für σ-additive Mengenfunktionen $\nu, \nu_1, \nu_2 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

   (a) Ist ν konzentriert auf $A \in \mathcal{R}$, so auch $|\nu|$.

   (b) $\nu_1 \perp \nu_2 \Rightarrow |\nu_1| \perp |\nu_2|$

   (c) $\nu \ll \mu \Rightarrow |\nu| \ll \mu$

3. Man zeige, dass $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann bezüglich μ absolut stetig ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|\nu(E)| < \varepsilon$ für alle $E \in \mathcal{R}$ mit $\mu(E) < \delta$ gilt.

4. Man zeige: Sind $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\eta_1, \eta_2 : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ σ-additiv mit $\eta = \eta_1 - \eta_2$, so gilt $\eta_1 \geq \eta^+$ und $\eta_2 \geq \eta^-$.

5.5 Produktmaße. Der Satz von Fubini

Auch ein geordnetes Paar $(\mathbf{X}, \mathcal{R})$ aus einer nichtleeren Menge $\mathbf{X}$ und einer σ-Algebra $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ nennen wir **messbaren Raum**. Das entsprechende System der **messbaren Funktionen** bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\mathcal{R})$, d.h.

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}) := \{ f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e : \{ f > a \} \in \mathcal{R} \ \forall\, a \in \mathbb{R} \} .$$

Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R})$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S})$ zwei messbare Räume. Eine Menge $A \times B$ mit $A \in \mathcal{R}$ und $B \in \mathcal{S}$ nennen wir Rechteck. Mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ bezeichnen wir das System der **Elementarmengen**

$$\mathcal{E} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} R_k : R_k\text{-Rechteck},\ R_k \cap R_j = \emptyset\, (j \neq k),\ n \in \mathbb{N} \right\} .$$

mma.LEMMA5MR **Lemma 5.22** *$\mathcal{E}$ ist eine Algebra.*

Eine Möglichkeit, ausgehend von zwei Maßen μ und λ auf $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{S}$ ein Produktmaß zu konstruieren, betseht nun darin, auf der Algebra $\mathcal{E}$ ein Prm̈aß mittels $\eta(A \times B) = \mu(a)\lambda(B)$ zu erklären und unter Verwendung der η^*-Messbarkeit nach Caratheodory fortzusetzen (vgl. Definition defi.DEF3MR 5.4 und Satz satz.SATZ1MR 5.6). Wir beschreiben im Folgenden ein anderes Vorgehen.

defi.DEF8MR **Definition 5.23** *Unter $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ verstehen wir die kleinste σ-Algebra, die das System $\mathcal{R} \times \mathcal{S} = \{ A \times B : A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{S} \}$ umfasst. Für $E \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ und $x \in \mathbf{X}$ bzw. $y \in \mathbf{Y}$ definieren wir den x-Schnitt E_x bzw. den y-Schnitt E^y durch*

$$E_x := \{ y \in \mathbf{Y} : (x, y) \in E \} \quad \text{bzw.} \quad E^y := \{ x \in \mathbf{X} : (x, y) \in E \} .$$

mma.LEMMA6MR **Lemma 5.24** *Aus $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ folgt $E_x \in \mathcal{S}\ \forall\, x \in \mathbf{X}$ und $E^y \in \mathcal{R}\ \forall\, y \in \mathbf{Y}$.*

Sind $f : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ eine numerische Funktion und $x \in \mathbf{X}$ bzw. $y \in \mathbf{Y}$, so bezeichnen wir mit f_x bzw. f^y die Funktionen

$$f_x : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ y \mapsto f(x, y) \quad \text{und} \quad f^y : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ x \mapsto f(x, y) .$$

mma.LEMMA7MR **Lemma 5.25** *Aus $f \in \mathcal{M}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$ folgt*

$$f_x \in \mathcal{M}(\mathcal{S}) \ \ \forall\, x \in \mathbf{X} \quad \textit{und} \quad f^y \in \mathcal{M}(\mathcal{R}) \ \ \forall\, y \in \mathbf{Y}\,.$$

defi.DEF9MR **Definition 5.26** *Eine Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ nennt man* **monoton***, wenn aus $A_n, B_n \in \mathcal{F}$ und $A_n \subset A_{n+1}, B_n \supset B_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, folgt*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \quad \textit{und} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}\,.$$

mma.LEMMA8MR **Lemma 5.27** *Die σ-Algebra $\mathcal{R}\otimes\mathcal{S}$ ist das kleinste monotone Mengensystem, welches das System $\mathcal{E}$ der Elementarmengen umfasst.*

satz.SATZ9MR **Satz 5.28** *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ . Definieren wir für $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$*

$$\varphi_E : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ x \mapsto \lambda(E_x) \quad \textit{und} \quad \psi_E : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ y \mapsto \mu(E^y)\,,$$

so gilt $\varphi_E \in \mathcal{M}(\mu)$, $\psi_E \in \mathcal{M}(\lambda)$ und

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_E \, d\mu = \int_{\mathbf{Y}} \psi_E \, d\lambda\,.$$

defi.DEF10MR **Definition 5.29** *Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.28 definieren wir für $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ das Maß*

$$(\mu \otimes \lambda)(E) := \int_{\mathbf{X}} \lambda(E_x)\, d\mu = \int_{\mathbf{Y}} \mu(E^y)\, d\lambda\,.$$

Durch Definition 5.29 wird tatsächlich ein Maß erklärt. Dieses ist auch σ-endlich.

atz.SATZ10MR **Satz 5.30** *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ sowie $f \in \mathcal{M}(\mu \otimes \lambda)$ mit $f \geq 0$. Definieren wir*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbf{Y}} f_x \, d\lambda\,,\ x \in \mathbf{X} \quad \textit{und} \quad \psi(y) = \int_{\mathbf{X}} f^y \, d\mu\,,\ y \in \mathbf{Y}\,, \tag{5.1}$$ F1

so gilt $\varphi \in \mathcal{M}(\mu)$, $\psi \in \mathcal{M}(\lambda)$ und

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi \, d\mu = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f \, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{\mathbf{Y}} \psi \, d\lambda\,. \tag{5.2}$$ F2

atz.SATZ11MR **Satz 5.31 (Fubini)** *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ sowie $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}}(\mu \otimes \lambda)$. Dann gilt $f_x \in \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}(\lambda)$ für fast alle $x \in \mathbf{X}$ und $f^y \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ für fast alle $y \in \mathbf{Y}$. Damit sind $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ aus (5.1) f.ü. erklärt und können zu messbaren Funktionen $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\psi : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Dabei gilt (unabhängig von dieser Fortsetzung) $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ und $\psi \in \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}(\lambda)$ sowie (5.2).*

Folgerung 5.32 *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ sowie $f \in \mathcal{M}(\mu \otimes \lambda)$.*

(a) *Ist $\displaystyle\int_{\mathbf{X}} \varphi_0 \, d\mu < \infty$, wobei $\displaystyle\varphi_0(x) = \int_{\mathbf{Y}} (|f|)_x \, d\lambda$, so folgt $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}}(\mu \otimes \lambda)$.*

(b) *Ist eines der iterierten Integrale*

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{Y}} |f(x,y)| \, d\lambda(y) \right) d\mu(x) \quad \textit{oder} \quad \int_{\mathbf{Y}} \left(\int_{\mathbf{X}} |f(x,y)| \, d\mu(x) \right) d\lambda(y)$$

endlich, so gilt

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{Y}} f(x,y) \, d\lambda(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f \, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{\mathbf{Y}} \left(\int_{\mathbf{X}} f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\lambda(y) \,.$$

Beispiel 5.33 *Auf* $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = [0,1]$ *betrachten wir das Lebesgue-Maß* $\mu = \lambda$ *und*

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} [g_k(x) - g_{k+1}(x)] g_k(y) \,,$$

wobei $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig,*

$$g_n \geq 0 \,, \quad g_n(x) = 0 \text{ für } 0 \leq x \leq \delta_n \text{ und } \delta_{n+1} \leq x \leq 1 \,, \quad \int_0^1 g_n(x) \, dx = 1 \,, \ n \in \mathbb{N} \,.$$

satz.SATZ11MR

Satz 5.31 ist nicht anwendbar, da $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)| \, d(x,y) = \infty$. *Es gilt*

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) \, dx \right) dy = 0 \,, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) \, dy \right) dx = 1 \,.$$

Index