Skript zur Vorlesung

Hilbertraum-Methoden

SS 2011

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] N. I. Achieser, I. M. Glasmann, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Akademie-Verlag, Berlin, 1975.

[2] S. Brehmer, *Hilbert-Räume und Spektralmaße*, Akademie-Verlag, Berlin, 1979.

[3] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I, Functional Analysis*, Academic Press, 1980.

[4] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil I, Grundlagen*, B. G. Teubner, 2000.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Der Hilbertraum

Es sei $\mathbf{H}$ ein linearer Raum (i.a. über dem Körper der komplexen Zahlen). Eine Abbildung $\mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ heißt **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf $\mathbf{H}$, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(S1) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \Theta$,

(S2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{H}$,

(S3) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{H}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Es gilt die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{H}. \tag{1.1}$$

Unter Verwendung dieser Ungleichung kann man zeigen, dass durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{1.2}$$

eine Norm auf $\mathbf{H}$ definiert wird. Ein linearer Raum $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ mit Skalarprodukt heißt **unitärer Raum**, wenn $(\mathbf{H}, \|.\|)$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ein Banachraum ist. Einen unitären Raum $\mathbf{H}$ nennt man **Hilbertraum**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ ein linear unabhängiges System in $\mathbf{H}$ mit genau n Elementen existiert.

Satz 1.1 *Es sei* $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ *ein Hilbertraum.*

(a) *Die Abbildung* $\langle .,. \rangle : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ *ist stetig.*

(b) *Ist* $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ *ein linearer Teilraum von* $\mathbf{H}$, *so ist*

$$\mathbf{L}^{\perp} := \{x \in \mathbf{H} : \langle x, y \rangle = 0 \;\forall\, y \in \mathbf{L}\}$$

ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{H}$, *das sog.* **orthogonale Komplement** *zu* $\mathbf{L}$. *Dabei gilt* $\mathbf{L} \cap \mathbf{L}^{\perp} = \{\Theta\}$.

(c) *Es sei* $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ *ein abgeschlossener linearer Teilraum von* $\mathbf{H}$. *Dann lässt sich jedes* $x \in \mathbf{H}$ *auf eindeutige Weise in der Form* $x = y + z$ *mit* $y \in \mathbf{L}$ *und* $z \in \mathbf{L}^{\perp}$ *darstellen. Dabei gilt*

$$\|x - y\| = \inf \{\|x - w\| : w \in \mathbf{L}\}.$$

Der Vektor y *heißt* **orthogonale Projektion** *von* x *auf* $\mathbf{L}$. *Man schreibt auch* $\mathbf{H} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}^{\perp}$.

(d) *Es sei* $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ *ein linearer Teilraum. Dann gilt* $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{H}$ *genau dann, wenn* **kein** $x^* \in \mathbf{H} \backslash \{\Theta\}$ *existiert, so dass* $\langle x, x^* \rangle = 0$ *für alle* $x \in \mathbf{L}$ *gilt.*

Ein System $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\} =: \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{H}$ heißt **linear unabhängig**, wenn jedes endliche Teilsystem linear unabhängig ist. Das System B nennt man ein **Orthonormalsystem** (ONS), wenn $\langle b_j, b_k \rangle = \delta_{jk}$ für alle $j, k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt. Man beachte, dass ein ONS automatisch linear unabhängig ist.

Folgerung 1.2 (Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren) *Es sei* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ein linear unabhängiges System. Wir setzen*

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\langle b_0, b_0 \rangle}} \, b_0 \, .$$

Dann gilt $\langle a_0, a_0 \rangle = 1$. *Wir bestimmen* $\beta_{10} \in \mathbb{C}$ *so, dass*

$$\widetilde{a}_1 = b_1 + \beta_{10} a_0$$

orthogonal zu a_0 *ist, d.h.* $\beta_{10} = -\langle b_1, a_0 \rangle$. *Da* $\widetilde{a}_1 \neq \Theta$ *gilt, können wir*

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_1 \rangle}} \, \widetilde{a}_1$$

setzen. Sind $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \operatorname{span}\{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$ *so bestimmt, dass*

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{jk} \, , \quad j, k = 0, 1, \ldots, m-1 \, ,$$

gilt, so setzen wir

$$\widetilde{a}_m = b_m + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{mk} a_k \quad \textit{mit} \quad \beta_{mk} = -\langle b_m, a_k \rangle$$

und

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_m, \widetilde{a}_m \rangle}} \, \widetilde{a}_m \, .$$

Auf diese Weise erhalten wir ein ONS $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *mit der Eigenschaft*

$$\operatorname{span}\{a_0, \ldots, a_n\} = \operatorname{span}\{b_0, \ldots, b_n\} \, , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Folgerung 1.3 *Es seien* $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ein ONS in* $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{L}_m = \operatorname{span}\{e_0, \ldots, e_m\} \, , \quad m = 0, 1, 2, \ldots \, ,$$

und

$$\mathbf{L} = \overline{\left\{ \sum_{k=0}^{m} \alpha_k e_k : \alpha_k \in \mathbb{C}, \, m = 0, 1, 2, \ldots \right\}} \, .$$

Dann ist

$$\sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k \rangle \, e_k$$

die **beste Approximation** *an* $x \in \mathbf{H}$ *durch Elemente aus* $\mathbf{L}_m$. *Die Zahlen* $\gamma_k = \langle x, e_k \rangle$ *werden die* **Fourierkoeffizienten** *von* x *bzgl. des ONS* $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ *genannt. Dabei gilt die* **Bessel'sche Ungleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall \, x \in \mathbf{H} \, .$$

Ist $\mathbf{L} = \mathbf{H}$, *so gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k \rangle \, e_k \right\| = 0 \,, \text{ d.h. } x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, e_k \,, \ \forall\, x \in \mathbf{H} \,.$$

In diesem Fall gilt die **Parseval'sche Gleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{H} \,,$$

und man nennt $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ein* **vollständiges Orthonormalsystem** *(VONS) in* $\mathbf{H}$ *und die Abbildung* $\mathcal{F} : \mathbf{H} \longrightarrow \ell^2$, $x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)$ **Fouriertransformation**, *die wegen der Parsevalschen Gleichung ein* **isometrischer Isomorphismus** *ist.*

1.2 Lineare und beschränkte Operatoren

Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ lineare Räume über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder der komplexen Zahlen. Bekanntlich nennen wir eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $x \mapsto f(x)$ **linear**, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ die Beziehung

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

gilt. Oft nennen wir eine solche lineare Abbildung auch linearen Operator und schreiben $f(x)$ in der Form Ax. Die Menge aller linearen Operatoren zwischen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ bezeichnen wir mit $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Sie ist mit der Definition

$$(\alpha A + \beta B)x = \alpha(Ax) + \beta(Bx) \,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K} \,, \ A, B \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \,,$$

selbst wieder ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

Satz 1.4 *Es seien* $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$ *und* $(\mathbf{Y}, \|.\|_{\mathbf{Y}})$ *zwei normierte Räume über* $\mathbb{K}$ *sowie* $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist eine stetige Abbildung.*

(b) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist gleichmäßig stetig.*

(c) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist im Punkt* $\Theta \in \mathbf{X}$ *stetig.*

(d) *Es existiert eine Konstante* $M \geq 0$ *mit der Eigenschaft*

$$\|Ax\|_{\mathbf{Y}} \leq M \, \|x\|_{\mathbf{X}} \quad \forall\, x \in \mathbf{X} \,. \tag{1.3}$$

Wenn es nicht zu Missverständnissen kommen kann, verzichten wir im weiteren auf die Indizierung der Normen.

Die Menge der Operatoren $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, für die eine (und somit jede) der Aussagen (a)-(d) des Satzes 1.4 erfüllt ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Definieren wir für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$

$$\|A\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}} := \sup\left\{ \|Ax\| : x \in \mathbf{X}, \ \|x\| \leq 1 \right\} \,, \tag{1.4}$$

so wird $(\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \|.\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}})$ zu einem normierten Raum, dem Raum der **beschränkten linearen Operatoren**.

Für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ist der **Nullraum** von A, $N(A) := \{x \in \mathbf{X} : Ax = \Theta\}$, stets ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{X}$.

Satz 1.5 *Ist* $\mathbf{Y}$ *ein Banachraum, so ist auch* $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ *ein Banachraum.*

Die Elemente von $L(\mathbf{X},\mathbb{K})$ nennt man **lineare Funktionale**. Der Raum $(\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbb{K}),\|.\|_{\mathbf{X}\to\mathbb{K}})$ der linearen stetigen Funktionale heißt **dualer Raum** zu $\mathbf{X}$ und wird mit $\mathbf{X}^*$ bezeichnet.

Theorem 1.6 (Riesz'sches Darstellungstheorem) *Es seien* $\mathbf{H}$ *ein Hilbertraum und* $f \in \mathbf{H}^*$. *Dann existiert genau ein* $x_f \in \mathbf{H}$, *so dass*

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Dabei gilt $\|f\|_{\mathbf{H}^*} = \|x_f\|_{\mathbf{H}}$.

Man kann also $\mathbf{H}^*$ mit $\mathbf{H}$ identifizieren.

1.3 Räume messbarer Funktionen

Wir erinnern an einige Sätze aus der Maß- und Integrationstheorie. Dabei seien (Ω,Σ,P) ein Maßraum und $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ messbare Funktionen.

(A) (**Beppo Levi, Lebesgue**) Gilt $0 \le f_1(\omega) \le f_2(\omega) \le \ldots$ f.ü. und $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ f.ü., so ist $f : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ messbar und

$$\int_\Omega f(\omega)\, P(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\, P(d\omega)\,.$$

(B) (**Fatou**) Für messbare Funktionen $f_n : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ gilt

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega)\, P(d\omega) \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega) P(d\omega)\,.$$

(C) (**Lebesgue**) Es seien $g : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ integrierbar und $f_n(\omega) \longrightarrow f(\omega)$ f.ü. sowie $|f_n(\omega)| \le g(\omega)$ f.ü., $n = 1,2,\ldots$ Dann ist $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ integrierbar, und es gilt

$$\int_\Omega f(\omega)\, P(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\, P(d\omega)\,.$$

(D) (**Lusin**) Es seien $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-messbar und beschränkt und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert eine stetige Funktion $f_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften (m - Lebesgue-Maß)

$$m\,\{t \in [0,1] : f(t) \ne f_0(t)\} < \varepsilon \quad \text{und} \quad \sup\{|f_0(t)| : t \in [0,1]\} \le \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}\ .$$

(E) (**Fréchet**) Jede Lebesgue-messbare Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist Grenzwert einer dem Maße nach konvergenten Folge von Polynomen.

(F) (**Riesz**) Konvergiert f_n gegen f dem Maße nach, so existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$, die gegen f f.ü. konvergiert.

Auf der Menge der bez. des Lebesgue-Maßes m messbaren Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$f \sim g \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\,\{t \in [0,1] : f(t) \ne g(t)\} = 0$$

und identifizieren im weiteren die messbare Funktion f mit der zugehörigen Äquivalenzklasse $[f]_\sim$. Mit $\mathbf{S} = \mathbf{S}(0,1)$ bezeichnen wir den Raum dieser Äquivalenzklassen versehen mit der Metrik

$$\rho(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\,dt\,.$$

Satz 1.7 *Die Konvergenz in* $\mathbf{S}$ *ist die Konvergenz dem Maße nach, d.h., es gilt* $f_n \longrightarrow f$ *in* $\mathbf{S}$ *genau dann, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} m\,\{t \in [0,1] : |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\} = 0\,.$$

Satz 1.8 *Der metrische Raum* $\mathbf{S}$ *ist vollständig und separabel.*

Unter $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}^2(0,1)$ verstehen wir den Teilraum von $\mathbf{S}$ der Funktionen (genauer Äquivalenzklassen von Funktionen) f, für die $|f|^2$ integrierbar ist. Auf $\mathbf{L}^2$ definieren wir

$$\langle f,g\rangle_{\mathbf{L}^2} = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt\,.$$

Satz 1.9 *Der Raum* $\left(\mathbf{L}^2, \langle .,.\rangle_{\mathbf{L}^2}\right)$ *ist ein separabler Hilbertraum.*

Kapitel 2

Spezielle Klassen von Operatoren

2.1 Selbstadjungierte Operatoren

Für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist $A^* \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ definiert durch

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall\, x, y \in \mathbf{H} \,.$$

Wir nennen $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ **selbstadjungiert**, wenn $A^* = A$ gilt. Wir werden im Weiteren, falls nichts Anderes gesagt wird, komplexe Hilberträume betrachten (d.h., $\mathbf{H}$ ist linearer Raum über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen).

Satz 2.1 *Der Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbf{H}$ gilt.*

Satz 2.2 *Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungiert, so gilt*

$$\|A\| = \sup \{ |\,\langle Ax, x \rangle\,| : x \in \mathbf{H},\ \|x\| \le 1 \} \,.$$

Da für selbstadjungierte Operatoren $A, B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ gilt $(A\,B)^* = B^* A^* = B\,A$, ist das Produkt zweier selbstadjungierter Operatoren genau dann selbstadjungiert, wenn sie vertauschbar sind, d.h., wenn $B\,A = A\,B$ ist.

Wir nennen $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ invertierbar, wenn $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ existiert. In diesem Fall gilt $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Sei $A \in L(\mathbf{H})$. Mit $N(A)$ und $R(A)$ bezeichnen wir den **Nullraum** bzw. den **Bildraum** des Operators A,

$$N(A) = \{ x \in \mathbf{H} : A\,x = \Theta \} \,, \quad R(A) = \{ A\,x : x \in \mathbf{H} \} \,.$$

Das **Spektrum** $\sigma(A)$ des Operators A ist die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$, für die der Operator $A - \lambda I$ nicht beschränkt invertierbar ist, d.h. für die $\nexists\,(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** von A, wenn $N(A - \lambda I) \neq \{\Theta\}$.

Satz 2.3 *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$.*

(a) *Es gilt $N(A^*) = R(A)^\perp$ und $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$.*

(b) *$A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist genau dann invertierbar, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass*

$$\|A\,x\| \ge \varepsilon\, \|x\| \quad \text{und} \quad \|A^* x\| \ge \varepsilon\, \|x\| \quad \forall\, x \in \mathbf{H}$$

gilt.

(c) *Ein selbstadjungierter Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist also genau dann invertierbar, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass*

$$\|A\,x\| \geq \varepsilon\,\|x\| \quad \forall\, x \in \mathbf{H}$$

gilt.

(d) *Für einen selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal. Ferner gilt $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$ mit*

$$m_A = \inf\{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathbf{H},\ \|x\| = 1\} \quad \text{und} \quad M_A = \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathbf{H},\ \|x\| = 1\}\ .$$

Definition 2.4 *Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ heißt* **positiv**, *wenn $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbf{H}$ gilt.*

Wegen Satz 2.1 ist also jeder positive Operator selbstadjungiert. Für zwei selbstadjungierte Operatoren $A, B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ schreiben wir $A \leq B$ bzw. $B \geq A$, wenn $B - A$ positiv ist, also $\langle A\,x, x\rangle \leq \langle B\,x, x\rangle$ für alle $x \in \mathbf{H}$ erfüllt ist.

Satz 2.5 *Für einen positiven Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ gilt*

$$|\,\langle A\,x, y\rangle\,|^2 \leq \langle A\,x, x\rangle\,\langle A\,y, y\rangle\ , \quad x, y \in \mathbf{H}$$

(**verallgemeinerte Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**).

Satz 2.6 *Sind $A, B, C \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungierte Operatoren und $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, so gilt:*

(a) $A \leq B\,,\ B \leq C \Longrightarrow A \leq C$

(b) $A \leq B \Longrightarrow A + C \leq B + C$

(c) $A \leq B\,,\ B \leq A \Longrightarrow A = B$

(d) $A \geq \Theta \Longrightarrow T^*A\,T \geq \Theta$

(e) $A \geq \Theta \Longrightarrow A^n \geq \Theta\,,\ n \in \mathbb{N}$

(f) $\gamma \in \mathbb{R}\,,\ \Theta \leq A \leq \gamma I \Longrightarrow A^2 \leq \gamma\,A$

Aus $m_A I \leq A \leq M_A I$ folgt $0 \leq A - m_A I \leq (M_A - m_A)I$, also

$$(A - m_A I)^2 \leq (M_A - m_A)(A - m_A I) = (M_A I - A)(A - m_A I) + (A - m_A I)^2$$

und somit $(M_A I - A)(A - m_A I) \geq \Theta$.

Satz 2.7 *Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungiert, so gilt $m_A, M_A \in \sigma(A)$ (vgl. Satz 2.3).*

Eine Folge von Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ nennt man **stark konvergent**, wenn ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ existiert, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0\ \forall\, x \in \mathbf{H}$ gilt. Man schreibt dann auch $A_n \longrightarrow A$.

Eine Folge von Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ heißt **beschränkt**, wenn die Zahlenfolge $(\|A_n\|)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist. Eine Folge selbstadjungierter Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $n \in \mathbb{N}$, nennen wir **monoton**, wenn entweder $A_n \leq A_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ oder $A_n \geq A_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 2.8 *Jede beschränkte und monotone Folge selbstadjungierter Operatoren ist stark konvergent.*

Man beachte: Der starke Grenzwert einer Folge selbstadjungierter Operatoren ist selbstadjungiert, was durch Grenzübergang in der Gleichung $\langle A_n x, y\rangle = \langle x, A_n y\rangle$ zu sehen ist.

- Für eine stetige Funktion $k : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir den Operator $K : \mathbf{L}^2(0,1) \longrightarrow \mathbf{L}^2(0,1)$ mit
$$(Kx)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)\,ds\,.$$
Im Fall $\overline{k(t,s)} = k(s,t)\,,\ (t,s) \in [0,1]^2$ ist dieser Operator selbstadjungiert. Dabei gilt $\|K\| \le \sup\left\{|k(t,s)| : (t,s) \in [0,1]^2\right\}$. Ist $k(t,s)$ von der Form
$$k(t,s) = \sum_{r=1}^{N} \overline{g_r(t)}g_r(s)$$
mit stetigen Funktionen $g_r : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, so ist K positiv.

- Das Spektrum eines Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist stets abgeschlossen. Das ergibt sich aus der Tatsache, dass die Menge $G\mathcal{L}(\mathbf{H})$ der invertierbaren Operatoren offen ist in $\mathcal{L}(\mathbf{H})$. Ist nämlich $E \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ mit $\|E\| < 1$, so gilt $(I-E)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E^n$. Für beliebige $A, E \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ mit $\|E\| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1}$ folgt die Invertierbarkeit von $A+E$ dann aus
$$A + E = A(I + A^{-1}E) \quad \text{und} \quad \left\|A^{-1}E\right\| < 1\,.$$
Insbesondere sieht man damit, dass $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$ für $|\lambda| > \|A\|$ invertierbar ist, d.h.
$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|A\|\}\ .$$

- Das Spektrum des Verschiebungsoperators
$$V : \ell^2 \longrightarrow \ell^2\,, \quad (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, \xi_0, \xi_1, \ldots)$$
ist gleich der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$.

2.2 Orthoprojektoren

Nach Satz 1.1 existiert zu jedem abgeschlossenen linearen Teilraum $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ eines Hilbertraumes $\mathbf{H}$ das orthogonale Komplement $\mathbf{L}^\perp$, so dass $\mathbf{H} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}^\perp$. Jedes $x \in \mathbf{H}$ lässt sich dann auf eindeutige Weise in der Form $x = x_{\mathbf{L}} + x_{\mathbf{L}^\perp}$ mit $x_{\mathbf{L}} \in \mathbf{L}$ und $x_{\mathbf{L}^\perp} \in \mathbf{L}^\perp$ darstellen.

Definition 2.9 *Der durch $P_{\mathbf{L}}x = x_{\mathbf{L}}$ definierte Operator $P_{\mathbf{L}} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ heißt* **Orthoprojektor** *von* $\mathbf{H}$ *auf* $\mathbf{L}$.

Folgerung 2.10 *Für $P = P_{\mathbf{L}}$ gilt $P^2 = P$ und $\|P\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} = 1$, falls $P \ne \Theta$ (d.h. $P \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$).*

Folgerung 2.11 *Ein linearer Operator $P : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ ist genau dann ein Orthoprojektor, wenn für alle $x, y \in \mathbf{H}$ gilt*
$$\left\langle P^2x, y\right\rangle = \langle Px, y\rangle \quad \textit{und} \quad \langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle\ ,$$
also genau dann, wenn $P^2 = P$ und $P^* = P$.

Satz 2.12 *Es seien $P_{\mathbf{L}}, P_{\mathbf{M}} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ zwei Orthoprojektoren.*

(a) *Das Produkt $P_{\mathbf{L}} P_{\mathbf{M}}$ ist genau dann ein Projektor, wenn $P_{\mathbf{L}} P_{\mathbf{M}} = P_{\mathbf{M}} P_{\mathbf{L}}$ gilt.*

(b) *Es gilt $\mathbf{L} \perp \mathbf{M}$ genau dann, wenn $P_{\mathbf{L}} P_{\mathbf{M}} = \Theta$.*

(c) *Die Summe $P_{\mathbf{L}} + P_{\mathbf{M}}$ ist genau dann ein Orthoprojektor, wenn $\mathbf{L} \perp \mathbf{M}$ ist.*

(d) *Die Differenz $P_{\mathbf{L}} - P_{\mathbf{M}}$ ist genau dann ein Orthoprojektor, wenn $\mathbf{M} \subset \mathbf{L}$ erfüllt ist.*

(e) *Die Inklusion $\mathbf{M} \subset \mathbf{L}$ ist sowohl äquivalent zu $\|P_{\mathbf{M}} x\| \le \|P_{\mathbf{L}} x\| \ \forall\, x \in \mathbf{H}$ als auch äquivalent zu $P_{\mathbf{M}} \le P_{\mathbf{L}}$.*

In Anlehnung an Satz 2.12,(b) nennen wir zwei Orthoprojektoren P und Q **orthogonal**, falls $P\,Q = \Theta$ gilt.

Folgerung 2.13 *Sind $P_0, P_1, \ldots, P_n$ Orthoprojektoren, so ist ihre Summe $P_0 + P_1 + \ldots + P_n$ genau dann ein Orthoprojektor, wenn sie paarweise orthogonal sind. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ paarweise orthogonaler Orthoprojektoren konvergiert stark gegen einen Orthoprojektor.*

Wir sagen, dass $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ **schwach** gegen $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ konvergiert, falls

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbf{H}$$

gilt.

Satz 2.14 *Es sei $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Orthoprojektoren $P_n : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$.*

(a) *Ist diese Folge $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton, so konvergiert sie stark gegen einen Orthoprojektor $P : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$.*

(b) *Konvergiert die Folge $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ schwach gegen einen Orthoprojektor, so konvergiert sie auch stark.*

Definition 2.15 *Unter der* **Öffnung** *zweier linearer Teilräume $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \subset \mathbf{H}$ versteht man die Zahl*

$$\mathcal{O}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) := \|P_2 - P_1\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})},$$

wobei $P_j = P_{\overline{\mathbf{M}}_j}$, $j = 1, 2$.

Folgerung 2.16 *Für zwei lineare Teilräume $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \subset \mathbf{H}$ gilt*

(a) $\mathcal{O}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \mathcal{O}(\overline{\mathbf{M}}_1, \overline{\mathbf{M}}_2) = \mathcal{O}(\mathbf{M}_1^{\perp}, \mathbf{M}_2^{\perp})$,

(b) $\mathcal{O}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \max\left\{ \sup_{x \in \overline{\mathbf{M}}_2, \|x\|=1} \|(I - P_1)x\|, \sup_{y \in \overline{\mathbf{M}}_1, \|y\|=1} \|(I - P_2)y\| \right\}$.

Satz 2.17 *Ist die Öffnung zweier linearer Teilräume kleiner als 1, so haben beide Räume gleiche Dimension.*

Definition 2.18 *Einen linearen Teilraum $\mathbf{M} \subset \mathbf{H}$ nennen wir* **invarianten Teilraum** *des Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, falls $A\,x \in \mathbf{M} \ \forall\, x \in \mathbf{M}$. Ein linearer Teilraum $\mathbf{M} \subset \mathbf{H}$ heißt* **reduzierender Teilraum** *des Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, wenn $\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}^{\perp}$ invariante Teilräume von A sind.*

Sei $P = P_{\overline{M}}$ und $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$.

- $\mathbf{M}$ invariant bzgl. $A \Longrightarrow \overline{M}$ invariant bzgl. $A \iff PAP = AP$
- $\mathbf{M}^\perp$ invariant bzgl. $A \iff PAP = PA \iff \overline{\mathbf{M}}$ invariant bzgl. A^*
- $\overline{\mathbf{M}}$ reduzierend bzgl. $A \iff \overline{\mathbf{M}}$ invariant bzgl. A und A^*
- $A = A^*$: $\overline{\mathbf{M}}$ reduzierend bzgl. $A \iff \overline{\mathbf{M}}$ invariant bzgl. $A \iff PA = AP$
- $\mathbf{M}$ reduzierend bzgl. $A \Longrightarrow Ax = PAPx + (I-P)A(I-P)x \;\forall\, x \in \mathbf{H}$

Beispiel 2.19 *Es sei* $\mathbf{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$. *Für* $\xi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *definieren wir* $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k t^k$, $t \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, *so dass* $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ *und* $\xi_k = \widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathbf{i}s})e^{-\mathbf{i}ks}\,ds$ *gilt. Für* $a \in \mathbf{C}(\mathbb{T})$ *sei* $T^o(a) : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ *der durch* $\left(T^o(a)\xi\right)_j = \widehat{af}_j$, $j \in \mathbb{Z}$, *definierte Operator. Dieser ist linear und beschränkt. Außerdem gilt* $T^o(a)\xi = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{a}_{j-k}\xi_k\right)_{j\in\mathbb{Z}}$, *und* $T^o(a)$ *ist genau dann selbstadjungiert, wenn* $a(t)$ *reellwertig ist. Der Teilraum* $\ell^2_+(\mathbb{Z}) = \left\{\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \xi_k = 0,\, k < 0\right\}$ *ist genau dann ein invarianter Teilraum des Operators* $T^o(a)$, *wenn* $\widehat{a}_k = 0 \;\forall\, k < 0$ *gilt. Der Operator* $T(a) : \ell^2_+(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2_+(\mathbb{Z})$, $\xi \mapsto P_+T^o(a)P_+$, *wobei* $P_+\xi = (\ldots, 0, \ldots, 0, \xi_0, \xi_1, \ldots)$, *heißt* **Toeplitz-Operator** *mit dem Symbol* $a(t)$.

Beispiel 2.20 *Für* $[a,b] \subset (0,1)$ *betrachten wir den Orthoprojektor* $P : \mathbf{L}^2(0,1) \longrightarrow \mathbf{L}^2(0,1)$, $u \mapsto Pu$, *wobei* $(Pu)(t) = \begin{cases} u(t) & : \quad t \in [a,b], \\ 0 & : \quad t \in (0,1) \setminus [a,b]. \end{cases}$ *Weiterhin seien* $k : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion und* $K : \mathbf{L}^2(0,1) \longrightarrow \mathbf{L}^2(0,1)$ *der durch*

$$(Ku)(t) = \int_0^1 k(t,s)u(s)\,ds$$

definierte Operator. Dann ist PKP *gegeben durch*

$$(PKP)(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b k(t,s)u(s)\,ds & : \quad t \in [a,b], \\ 0 & : \quad t \in (0,1) \setminus [a,b]. \end{cases}$$

2.3 Isometrische und unitäre Operatoren

Es seien $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ und $(\mathbf{H}_j, \langle .,. \rangle_j)$, $j = 1, 2$, Hilberträume.

Definition 2.21 *Eine surjektive Abbildung* $V : \mathbf{H}_1 \longrightarrow \mathbf{H}_2$ *nennen wir eine* **Isometrie** *oder* **isometrischen Operator**, *wenn*

$$\langle Vx, Vy \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1 \quad \forall\, x, y \in \mathbf{H}_1$$

gilt. Eine Isometrie $U : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ *heißt* **unitärer Operator**.

Folgerung 2.22 *Ein isometrischer Operator ist invertierbar und linear.*

Definition 2.23 *Man nennt einen Operator $V \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ eine* **partielle Isometrie** *, falls*

$$\langle Vx, Vx \rangle = \langle x, x \rangle \quad \forall\, x \in N(V)^\perp .$$

Folgerung 2.24 *Sind $V \in L(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$, $R(V) = \mathbf{H}_2$ und $\langle Vx, Vx \rangle_2 = \langle x, x \rangle_1 \ \forall\, x \in \mathbf{H}_1$, so ist $V : \mathbf{H}_1 \longrightarrow \mathbf{H}_2$ eine Isometrie.*

Satz 2.25 *Ist $V \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *V ist eine partielle Isometrie.*

(b) *$V = V V^* V$.*

(c) *$V^* V$ ist ein Orthoprojektor.*

Beispiel 2.26 *Es sei $(e_n)_{n=0}^\infty$ ein VONS in $\mathbf{H}$. Dann ist der Operator*

$$V : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^\infty \langle x, e_{n+1} \rangle\, e_n$$

eine partielle Isometrie.

Beispiel 2.27 *Mit $\varphi(t) = \sqrt{1-t^2}$, $t \in [-1,1]$ definieren wir den Hilbertraum $\mathbf{L}^2_\varphi$ aller bzgl. des Gewichtes $\varphi(t)$ quadratisch integrierbaren (Klassen von) Funktionen $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{C}$, versehen mit dem inneren Produkt*

$$\langle f, g \rangle_\varphi = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)}\varphi(t)\, dt .$$

Die Systeme $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ und $(U_n)_{n=0}^\infty$ sind VONS in $\mathbf{L}^2_\varphi$, wobei $\varphi_n(t) = \dfrac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ und

$$T_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,,\ T_n(cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\theta)\,,\ n > 0\,, \quad U_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}\,,\ n \ge 0\,,$$

die Tschebyscheff-Polynome erster und zweiter Art sind. Die Beziehungen

$$\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-1}^1 \frac{T_n(s)\, ds}{(s-t)\sqrt{1-s^2}} = U_{n-1}(t)\,, \quad -1 < t < 1\,,\ n \in \mathbb{N}_0\,,\ U_{-1}(t) := 0\,,$$

zeigen, dass der durch

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-1}^1 \frac{f(s)\, ds}{s-t}\,, \quad -1 < t < 1\,,$$

auf dem linearen Teilraum $\mathrm{span}\,\{\sigma\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ definierte Operator zu einem Operator $S \in \mathcal{L}(\mathbf{L}^2_\varphi)$ stetig fortgesetzt werden kann, nämlich durch die Beziehung

$$Sf = \sum_{n=1}^\infty \langle f, \varphi_n \rangle_\varphi\, U_n .$$

Der so definierte Operator $S : \mathbf{L}^2_\varphi \longrightarrow \mathbf{L}^2_\varphi$ ist eine partielle Isometrie.

Beispiel 2.28 *In* $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ *ist das System* $\left\{ t^k e^{-\frac{t^2}{2}} : k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ *linear unabhängig. Das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren liefert* $\{\varphi_k(t) : k \in \mathbb{N}_0\}$ *mit*

$$\varphi_k(t) = H_k(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad k \in \mathbb{N}_0 ,$$

wobei $H_k(t)$ *das* k*-te (normierte) Hermite-Polynom bezeichnet,*

$$H_k(t) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{\chi_k}} e^{t^2} \left(\frac{d}{dt} \right)^k e^{-t^2}, \quad \chi_k = \sqrt{\pi}\, 2^k k! .$$

Das System $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ *ist ein VONS in* $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. *Der durch*

$$(Fg)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}st} g(s)\, ds$$

definierte Operator hat die Eigenschaft $F\varphi_k = (-\mathbf{i})^k \varphi_k$, *die es erlaubt, diesen Operator von* $\operatorname{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ *auf eindeutige Weise zu einem unitären Operator* $F : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ *fortzusetzen.*

Kapitel 3

Spektraleigenschaften selbstadjungierter und kompakter Operatoren

3.1 Stetige Funktionen selbstadjungierter Operatoren

Mit $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge aller algebraischen Polynome mit reellen Koeffizienten. Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ein selbstadjungierter Operator, so sei $\mathbf{C}_A(\mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : [m_A, M_A] \longrightarrow \mathbb{R}$. Für $f \in \mathbf{C}_A(\mathbb{R})$ setzen wir

$$m_A(f) = \min\{f(t) : m_A \le t \le M_A\}\,, \quad M_A(f) = \max\{f(t) : m_A \le t \le M_A\}$$

und

$$\gamma_A(f) = \max\{|f(t)| : m_A \le t \le M_A\}\,.$$

Weiterhin werden wir die Bezeichnung $\mathrm{comm}(A)$ für die Menge aller Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathbf{H})$, die mit $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ vertauschbar sind, verwenden.

Satz 3.1 *Ist $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ auf dem Spektralintervall $[m_A, M_A]$ des selbstadjungierten Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ nichtnegativ, so gilt $p(A) \ge \Theta$.*

Satz 3.2 *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungiert. Die Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $p \mapsto p(A)$ kann auf eindeutige Weise zu einer linearen und multiplikativen Abbildung*

$$\mathbf{C}_A(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})\,, \quad f \mapsto f(A)$$

fortgesetzt werden, die $\|f(A)\| \le \gamma_A(f)$ erfüllt. Dabei gilt für alle Funktionen $f \in \mathbf{C}_A(\mathbb{R})$ und $g \in \mathbf{C}([m_A(f), M_A(f)], \mathbb{R})$

(a) $m_A(f)I \le f(A) \le M_A(f)I$,

(b) $\mathrm{comm}(A) \subset \mathrm{comm}(f(A))$,

(c) $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$.

Bemerkung 3.3 *Die in Theorem 3.2 erwähnte Multiplikativität der Abbildung $f \longrightarrow f(A)$ bedeutet, dass für alle $f, g \in \mathbf{C}_A(\mathbb{R})$ gilt $(fg)(A) = f(A)g(A)$.*

Folgerung 3.4 *Die Abbildung* $\mathbf{C}_A(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $f \mapsto f(A)$ *ist positiv, d.h.,* $f(t) \geq 0\ \forall t \in [m_A, M_A]$ *impliziert* $f(A) \geq \Theta$.

Folgerung 3.5 *Zu jedem positiven Operator* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *gibt es genau einen positiven Operator* $B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *mit* $B^2 = A$, *nämlich* $B = \sqrt{A}$.

Folgerung 3.6 *Sind die positiven Operatoren* $A, B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *vertauschbar, so ist auch* AB *positiv.*

Folgerung 3.7 *Sei* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *selbstadjungiert. Dann sind die Operatoren*

$$|A| \quad \textit{und} \quad A^{\pm} = \frac{1}{2}(|A| \pm A)$$

positive Operatoren, und es gilt

$$|A| = \sqrt{A^2} \quad \textit{und} \quad A^+A^- = \Theta\,.$$

Es sei bemerkt, dass man $|A| = \sqrt{A^*A}$ für alle Operatoren $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ definieren kann. Für $A^* = A$ fällt diese Definition mit der obigen zusammen.

Satz 3.8 (Polardarstellung) *Zu jedem Operator* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *existiert genau ein Operator* $V \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *mit* $A = V\sqrt{A^*A}$ *und* $N(A) \subset N(V)$. *Dabei ist der Operator* V *eine partielle Isometrie,* $\sqrt{A^*A} = V^*A$, *und* $I - V^*V = P_{N(A)}$.

3.2 Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $e_\lambda(t) = \begin{cases} 1 & : \ t < \lambda\,, \\ 0 & : \ \lambda \leq t\,, \end{cases}$ und

$$e_{\lambda,n}(t) = \begin{cases} 1 & : \quad t < \lambda - \frac{1}{n}\,, \\ n(\lambda - t) & : \quad \lambda - \frac{1}{n} \leq t \leq \lambda\,, \\ 0 & : \quad \lambda < t\,. \end{cases}$$

Dann gilt für einen selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, für $n \in \mathbb{N}$, und für $\lambda \leq \mu$ (siehe Folgerung 3.4)

(Ea) $\Theta \leq e_{\lambda,n}(A) \leq e_{\lambda,n+1}(A) \leq I$,

(Eb) $I - e_{\lambda,2n}(A) \leq [I - e_{\lambda,n}(A)]^2 \leq I - e_{\lambda,n}(A)$,

(Ec) $e_{\lambda,n}(A) \leq e_{\mu,n}(A)$.

Satz 2.8 und (Ea) liefern die Existenz eines Operators $E_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ mit

$$e_{\lambda,n}(A) \longrightarrow E_\lambda =: e_\lambda(A)\,. \tag{3.1}$$

Satz 3.9 *Sind* $f \in \mathbf{C}_A(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $\lambda \leq \mu$, *so gilt*

(a) $a(E_\mu - E_\lambda) \leq f(A)(E_\mu - E_\lambda)$, *falls* $a \leq f(t)$, $t \in [\lambda, \mu]$,

(b) $f(A)(E_\mu - E_\lambda) \leq b(E_\mu - E_\lambda)$, *falls* $f(t) \leq b$, $t \in [\lambda, \mu]$.

Satz 3.10 *Die Operatoren* E_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, *sind Orthoprojektoren mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $E_\lambda = \Theta$ *für* $\lambda \le m_A$ *und* $E_\lambda = I$ *für* $M_A < \lambda$,

(b) $(A - \lambda I)E_\lambda \le \Theta \le (A - \lambda I)(I - E_\lambda)$,

(c) $E_\lambda \le E_\mu$ *für* $\lambda \le \mu$,

(d) $\lambda(E_\mu - E_\lambda) \le A(E_\mu - E_\lambda) \le \mu(E_\mu - E_\lambda)$ *für* $\lambda \le \mu$,

(e) $E_\lambda x = \theta$, *falls* $A\,x = \lambda x$.

Außerdem sind $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ *und* $\forall\, B \in \mathrm{comm}(A)$ *die Räume* $R(E_\lambda)$ *reduzierende Teilräume von* B.

Satz 3.11 *Zu jedem selbstadjungierten Operator* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *und zu jeder Zahl* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gibt es genau einen mit* A *vertauschbaren Orthoprojektor* $E_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *der (b) und (e) von Satz 3.10 erfüllt. Dabei gilt*

$$A(I - E_0) = A^+, \quad A\,E_0 = -A^-, \tag{3.2}$$

und

$$A(I - 2E_0) = |A|, \quad A = |A|(I - 2E_0). \tag{3.3}$$

Folgerung 3.12 *Für jeden selbstadjungierten Operator* $B \in \mathrm{comm}(A)$ *mit* $\pm A \le B$ *gilt* $|A| \le B$, *d.h.,* $|A|$ *ist der kleinste selbstadjungierte Operator mit dieser Eigenschaft.*

Folgerung 3.13 *Im Sinne der starken Operatorkonvergenz existieren die einseitigen Grenzwerte*

$$E_{\lambda-0} = \lim_{\mu\uparrow\lambda} E_\mu, \quad E_{\lambda+0} = \lim_{\mu\downarrow\lambda} E_\mu, \quad E_{+\infty} = \lim_{\mu\uparrow+\infty} E_\mu, \quad E_{-\infty} = \lim_{\mu\downarrow-\infty} E_\mu$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, *wobei* $E_{\lambda-0} = E_\lambda \le E_{\lambda+0}$ *gilt.*

Mit $\mathcal{O}(\mathbf{H}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{H})$ bezeichen wir die Menge der Orthoprojektoren in $\mathbf{H}$.

Definition 3.14 *Eine Abbildung* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{H})$, $\lambda \longrightarrow E_\lambda$ *nennen wir* **Spektralschar**, *falls* $E_\lambda \le E_\mu$ *für* $\lambda \le \mu$ *und* $E_{-\infty} = \Theta$, $E_\infty = I$. *Diese Schar heißt linksseitig stetig, wenn* $E_{\lambda-0} = E_\lambda$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *erfüllt ist.*

Im Weiteren sei $\lambda \longrightarrow E_\lambda$ die für den selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ durch (3.1) definierte Spektralschar.

Satz 3.15 *Es sei* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *selbstadjungiert. Dann gilt*

(a) $R(E_{\lambda+0} - E_\lambda) = N(A - \lambda I)\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$,

(b) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A) \iff \exists\, \varepsilon > 0$: $E_\lambda = E_\mu\ \forall\, \mu \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$.

Die Zahlen aus $\sigma(A)$, die keine Eigenwerte von A sind, werden Punkte des stetigen Spektrums $\sigma_c(A)$ des Operators A genannt, die Menge $\sigma_p(A)$ der Eigenwerte von A heißt dagegen **Punktspektrum**. Folglich gilt $\lambda \in \sigma_c(A)$ genau dann, wenn $E_{\lambda+0} = E_\lambda$ und $E_{\lambda+\varepsilon} \ne E_{\lambda-\varepsilon}$ für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt sind.

Beispiel 3.16 *Es seien* $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(-1,1)$ *und* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *definiert durch* $(A\,x)(t) = t\,x(t)$. *Wir zeigen, dass dann* $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [-1,1]$ *gilt.*

Es seien $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $Z = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \mathcal{Z}[a,b]$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ und

$$S(f,Z,\mu) = \sum_{j=0}^{n} f(\mu_j)\left(E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}\right)$$

eine entsprechende **Riemann-Stieltjes-Summe** bezüglich der Spektralschar E_λ, wobei $\mu = \{\mu_j : j = 1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_{j-1} \le \mu_j < \lambda_j$. Mit $d(Z) = \max\{|\lambda_j - \lambda_{j-1}| : j = 1, \ldots, n\}$ bezeichnen wir den Durchmesser der Zerlegung Z.

Definition 3.17 *Wir nennen eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$* **Riemann-Stieltjes-integrierbar** *bzw.* **gleichmäßig Riemann-Stieltjes-integrierbar** *auf $[a,b]$ bzgl. E_λ, wenn für jede Folge von Zerlegungen $(Z_m)_{m=1}^\infty$, $Z_m \in \mathcal{Z}[a,b]$, mit $\lim_{m\to\infty} d(Z_m) = 0$ eine beliebige Folge zugehöriger Riemann-Stieltjes-Summen $(S(f,Z_m,\mu^m))_{m=1}^m$ in der starken bzw. Normtopologie konvergiert. In diesem Fall setzen wir*

$$\int_a^{b-0} f(\lambda)\, dE_\lambda := \lim_{m\to\infty} S(f, Z_m, \mu^m)$$

und

$$\int_a^{b} f(\lambda)\, dE_\lambda := \int_a^{b-0} f(\lambda)\, dE_\lambda + f(b)\left(E_{b+0} - E_b\right).$$

Satz 3.18 *Bezüglich einer linksseitig stetigen Spektralschar E_λ ist jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig Riemann-Stieltjes-integrierbar.*

Es sei E_λ eine linksseitig stetige Spektralschar. Wir setzen $\mathcal{J}_a^b(f) := \displaystyle\int_a^{b-0} f(\lambda)\, dE_\lambda$, $f \in \mathbf{C}([a,b],\mathbb{R})$. Für $f, g \in \mathbf{C}([a,b],\mathbb{R})$ sind dann folgende Regeln gültig:

1. $\mathcal{J}_a^b(f) = \mathcal{J}_a^c(f) + \mathcal{J}_c^b(f)$, $a < c < b$.
2. $\mathcal{J}_a^b(f)\,(E_d - E_c) = \mathcal{J}_c^d(f)$, $a \le c < d \le b$.
3. $\mathcal{J}_a^b(f+g) = \mathcal{J}_a^b(f) + \mathcal{J}_a^b(g)$, $\mathcal{J}_a^b(\alpha f) = \alpha J_a^b(f)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\mathcal{J}_a^b(fg) = \mathcal{J}_a^b(f)\mathcal{J}_a^b(g)$.
5. $\mathcal{J}_a^b(f) \ge \Theta$ if $f(t) \ge 0\ \forall\, t \in [a,b]$.

Jedem Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ kann man einen **Realteil** $\mathsf{Re}\, A = \frac{1}{2}(A + A^*)$ und einen **Imaginärteil** $\mathsf{Im}\, A = \frac{1}{2\mathbf{i}}(A - A^*)$ zuordnen. Es gilt dann

$$A = \mathsf{Re}\, A + \mathbf{i}\, \mathsf{Im}\, A \quad \text{und} \quad A^* = \mathsf{Re}\, A - \mathbf{i}\, \mathsf{Im}\, A.$$

Dabei sind $\mathsf{Re}\, A$ und $\mathsf{Im}\, A$ selbstadjungierte Operatoren. Umgekehrt folgt aus $A = A_1 + \mathbf{i}\, A_2$ mit selbstadjungierten Operatoren $A_j \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, dass $A_1 = \mathsf{Re}\, A$ und $A_2 = \mathsf{Im}\, A$.

Wir nennen einen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ **normal**, wenn $A^*A = A\,A^*$ gilt. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist genau dann normal, wenn $\mathsf{Re}\, A$ und $\mathsf{Im}\, A$ kommutieren, was auch äquivalent ist zu

$$A^*A = A\,A^* = (\mathsf{Re}\, A)^2 + (\mathsf{Im}\, A)^2.$$

Für einen selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ und eine Funktion $f = f_1 + \mathbf{i}\, f_2 \in \mathbf{C}_A(\mathbb{C})$ mit $f_j \in \mathbf{C}_A(\mathbb{R})$ ist der Operator

$$f(A) = f_1(A) + \mathbf{i}\, f_2(A)$$

wohldefiniert, wobei $f_1(A) = \mathsf{Re}\, f(A)$ und $f_2(A) = \mathsf{Im}\, f(A)$. Außerdem gilt

1. $f(A)^* = \overline{f}(A)$,
2. $(\lambda f + \mu g)(A) = \lambda f(A) + \mu g(A)$, $f, g \in \mathbf{C}_A(\mathbb{C})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
3. $(fg)(A) = f(A)g(A)$, $f, g \in \mathbf{C}_A(\mathbb{C})$.

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ein selbstadjungierter Operator. Definieren wir $e^{\mathbf{i}A} = \cos(A) + \mathbf{i}\sin(A) =: V$, so folgt $V^*V = VV^* = I$, d.h., V ist ein **unitärer Operator**.

Satz 3.19 *Sind $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungiert, $f \in \mathbf{C}[a,b]$, $a \le m_A \le M_A < b$ und E_λ die Spektralschar von A, so gilt*

$$f(A) = \int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda$$

und $\operatorname{comm}(A) = \operatorname{comm}\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3.3 Kompakte Operatoren

Ein linearer Operator $T : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ heißt **kompakt**, wenn er jede beschränkte Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ mit $x_n \in \mathbf{H}$ in eine präkompakte Folge $(T x_n)_{n=1}^\infty$ überführt. Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ heißt **präkompakt**, wenn jede Teilfolge von $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge enthält. Die Menge aller linearen und kompakten Operatoren bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(\mathbf{H})$. Es gilt $\mathcal{K}(\mathbf{H}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{H})$, und $\mathcal{K}(\mathbf{H})$ ist eine abgeschlossene Menge (bzgl. der Operatornormtopologie).

Beispiel 3.20 *Ist $h : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Lebesgue-messbare Funktion mit*

$$\iint_{[0,1]^2} |h(t,s)|^2\, ds\, dt < \infty .$$

so ist der durch

$$(Tu)(t) = \int_0^1 h(t,s)u(s)\, ds$$

definierte Operator $T : \mathbf{L}^2(0,1) \longrightarrow \mathbf{L}^2(0,1)$ ein kompakter Operator. Das ergibt sich z.B. wie folgt: Mit $\chi_j^{(n)}(t)$ bezeichnen wir die charakteristische Funktion des Intervals $\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, $j = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und Zahlen $\lambda_{jk}^{(n)} \in \mathbb{C}$, so dass

$$\iint_{[0,1]^2} \left| h(t,s) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_{jk}^{(n)} \chi_j^{(n)}(t) \chi_k^{(n)}(s) \right|^2 ds\, dt < \varepsilon .$$

Der Operator $\widetilde{T} : \mathbf{L}^2(0,1) \longrightarrow \mathbf{L}^2(0,1)$ mit

$$(\widetilde{T}u)(t) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_{jk}^{(n)} \chi_j^{(n)}(t) \chi_k^{(n)}(s) u(s)\, ds$$

hat endlichdimensionales Bild (der Bildraum wird von den $\chi_j^{(n)}(t)$ aufgespannt), ist somit kompakt und genügt der Relation $\left\| \widetilde{T} - T \right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^2(0,1))} < \varepsilon$. Wählen wir also eine Nullfolge (ε_m) positiver Zahlen, so finden wir Operatoren $\widetilde{T}_m \in \mathcal{K}(\mathbf{L}^2(0,1))$, die in der Norm gegen T konvergieren. Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}(\mathbf{L}^2(0,1))$ in der Operatornormtopologie liefert die Kompaktheit des Operators T.

Satz 3.21 *Für $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$ ist $R(I-T)$ abgeschlossen.*

Folgerung 3.22 *Sind $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist $R(T-\lambda I)$ abgeschlossen.*

Satz 3.23 *Für einen Operator $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$ gilt:*

(a) *Sind $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\dim N(T-\lambda I) = \infty$, so ist $\lambda = 0$.*

(b) *Der einzig mögliche Häufungspunkt der Menge der Eigenwerte von T ist die Null.*

(c) *Sind $\lambda \in \mathbb{C}$ und $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $x_n \in \mathbf{H}$, eine Punktfolge mit $x_0 \neq \Theta$, $(T-\lambda I)x_0 = \Theta$ und $(T-\lambda I)x_{n+1} = x_n$, $n = 0,1,2,\ldots$, so ist $\lambda = 0$.*

Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(A) $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$,

(B) $T^*T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$,

(C) $T^* \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$.

Folgerung 3.24 *Ist $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$, so gilt $\dim N(T-\lambda I) < \infty$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, die Menge $\sigma(T) \setminus \{0\}$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, die sich nur in 0 häufen können. Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von T , so ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von T^* . Es ist stets $0 \in \sigma(T)$.*

Für einen kompakten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ und $A = I - \mu T$, $\mu \in \mathbb{C}$ haben wir also:

1. **Fredholmsche Alternative**: $Ax = y$ ist genau dann für jedes $y \in \mathbf{H}$ in $\mathbf{H}$ lösbar, wenn die Gleichung eindeutig lösbar ist.

2. **Endlich viele Lösbarkeitsbedingungen**: $Ax = y \in \mathbf{H}$ ist genau dann in $\mathbf{H}$ lösbar, wenn $y \in N(A^*)^{\perp}$ gilt. Dabei ist $\dim N(A^*) < \infty$.

Satz 3.25 *Für jeden kompakten und selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ existieren eine endliche Folge oder eine Nullfolge reeller Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ mit $|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ und paarweise orthonormale Vektoren $e_k \in \mathbf{H}$, so dass*

$$T\,x = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle\, e_k \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Definiert man $P_k x = \langle x, e_k \rangle\, e_k$, $x \in \mathbf{H}$, so ist P_k ein Orthoprojektor, und es gilt $P_k P_j = \Theta$ für $k \neq j$ sowie

$$T = \sum_k \lambda_k P_k\,,$$

wobei im Fall unendlich vieler Eigenwerte die Reihe in der Operatornorm konvergiert.

Satz 3.26 *Ein linearer Operator $T : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ ist genau dann kompakt, wenn eine Folge linearer Operatoren mit endlichdimensionalem Bild existiert, die in der Operatornorm gegen T konvergiert.*

Beispiel 3.27 *Der Operator $K : \mathbf{L}^2_\sigma(-1,1) \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma(-1,1)$, wobei $\sigma(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$, definiert durch*

$$(Ku)(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln|s-t|\, u(s)\, \sigma(s)\, ds$$

ist kompakt. Wir geben seine Diagonaldarstellung entsprechend Satz 3.25 an.

Kapitel 4

Spektralintegrale

4.1 Im Allgemeinen unbeschränkte Operatoren

Einen Operator $A : D(A) \subset \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ nennen wir **linear**, wenn sein **Definitionsbereich** $D(A)$ ein linearer Teilraum von $\mathbf{H}$ ist und wenn für alle $x, y \in D(A)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt $A(\lambda\, x + \mu\, y) = \lambda\, A\, x + \mu\, A\, y$. Die Menge aller dieser linearen Operatoren bezeichnen wir mit $L(\mathbf{H})$. Ein Operator $A \in L(\mathbf{H})$ heißt **Einschränkung** von $B \in L(\mathbf{H})$ (oder B ist **Fortsetzung** von A, in Zeichen: $A \subset B$ oder $B \supset A$), falls $D(A) \subset D(B)$ und $A\, x = B\, x \;\forall\, x \in D(A)$ gilt. Wir definieren für $A, B \in L(\mathbf{H})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$

- $D(\lambda\, A) = D(A)$ und $(\lambda\, A)x = \lambda\, A\, x$, $x \in D(A)$,
- $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ und $(A + B)x = A\, x + B\, x$, $x \in D(A + B)$,
- $D(AB) = \{x \in D(B) : B\, x \in D(A)\}$ und $(AB)x = A(B\, x)$, $x \in D(AB)$.

Folglich ist $D(A - \lambda\, I) = D(A) \quad \forall\, A \in L(\mathbf{H}), \lambda \in \mathbb{C}$. Sind $A_n \in L(\mathbf{H})$, $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, falls

- $D(A) = \left\{ x \in \mathbf{H} : \exists\, n_0 = n_0(x) \text{ mit } x \in \bigcap\limits_{n=n_0}^{\infty} D(A_n) \right\}$ und

$$A\, x = \lim_{n\to\infty} A_n x \quad \forall\, x \in D(A)\,.$$

Offenbar gilt $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in L(\mathbf{H})$. Außerdem definieren wir für $A \in L(\mathbf{H})$

- $\operatorname{comm}(A) = \{B \in \mathcal{L}(\mathbf{H}) : B\, x \in D(A),\ AB\, x = BA\, x \;\forall\, x \in D(A)\}$.

Beispiel 4.1 *Wir betrachten zwei Beispiele unbeschränkter Operatoren:*

(a) $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $D(A) = \left\{ x \in \mathbf{H} : \int_{\mathbb{R}} t^2 |x(t)|^2 dt < \infty \right\}$, $(A\, x)(t) = t\, x(t)$.

(b) $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $D(B) = \mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ x \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}) : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |t^n x^{(m)}(t)| < \infty, \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0 \right\}$,

$(B\, x)(t) = -x''(t) + t^2 x(t)$.

Definition 4.2 *Sind $A \in L(\mathbf{H})$ und $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$, so kann der* **adjungierte Operator** $A^* \in L(\mathbf{H})$ *eindeutig mittels*

$$D(A^*) = \left\{ y \in \mathbf{H} : \sup \{ |\langle Ax, y \rangle| : x \in D(A),\ \|x\| = 1 \} < \infty \right\}$$

und

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall\, x \in D(A)\,,\ \forall\, y \in D(A^*)\,,$$

definiert werden.

Aus $A \subset B$ folgt $B^* \subset A^*$.

Definition 4.3 *Es seien $A \in L(\mathbf{H})$ und $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$. Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt* **regulärer Punkt** *von A, wenn ein Operator $R_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ existiert, so dass*

$$R_\lambda (A - \lambda I) x = x \ \forall\, x \in D(A) \quad \text{und} \quad (A - \lambda I) R_\lambda x = x \ \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, die keine regulären Punkte von A sind wird **Spektrum** *von A genannt und mit $\sigma(A)$ bezeichnet. Die Menge $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ heißt* **Resolventenmenge** *von A.*

Man beachte: Erfüllt R_λ die Definition 4.3, so gilt $D(A) = R(R_\lambda)$.

Satz 4.4 *Sind $A \in L(\mathbf{H})$ und $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$, so sind $\rho(A)$ offen und somit $\sigma(A)$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{C}$. Außerdem gilt*

$$\operatorname{comm}(A) = \operatorname{comm}(R_\lambda) \quad \forall\, \lambda \in \rho(A)\,.$$

Sind $\lambda, \mu \in \rho(A)$, so gilt

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\mu R_\lambda \quad \text{und} \quad R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda\,.$$

Falls $\lambda \in \rho(A)$, so schreibt man auch $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, weil in diesem Fall $A - \lambda T : D(A) \longrightarrow \mathbf{H}$ eine Bijektion mit beschränktem inversen Operator ist.

Definition 4.5 *Wir nennen den Operator $A \in L(\mathbf{H})$* **symmetrisch***, falls*

$$\overline{D(A)} = \mathbf{H} \quad \text{und} \quad \langle A\,x, y \rangle = \langle x, A\,y \rangle \ \forall\, x, y \in D(A)$$

gilt. Der Operator $A \in L(\mathbf{H})$ heißt **selbstadjungiert***, wenn $A = A^*$ ist.*

Satz 4.6 *Für $A \in L(\mathbf{H})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A ist symmetrisch.*

(b) $A \subset A^*$.

(c) $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$ *und* $\langle A\,x, x \rangle \in \mathbb{R} \ \forall\, x \in D(A)$.

Ein Operator $A \in L(\mathbf{H})$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn

$$\overline{D(A)} = \mathbf{H}\,, \quad \langle A\,x, x \rangle \in \mathbb{R} \ \forall\, x \in D(A) \quad \text{und} \quad D(A^*) \subset D(A)$$

erfüllt sind.

Als **Graph** von $A \in L(\mathbf{H})$ bezeichnet man die Menge

$$\Gamma(A) = \{(x, A\,x) : x \in D(A)\} \subset \mathbf{H} \times \mathbf{H}\,.$$

Für $A, B \in L(\mathbf{H})$ sind $A \subset B$ und $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$ äquivalente Bedingungen. Wir versehen $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ mit dem inneren Produkt

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{\mathbf{H}\times\mathbf{H}} := \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle\ .$$

Der Operator $A \in L(\mathbf{H})$ heißt **abgeschlossen**, wenn $\Gamma(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ ist. Das ist äquivalent zu

$$x_n \in D(A)\,,\ x_n \longrightarrow x\,,\ y_n = A\,x_n \longrightarrow y \implies x \in D(A)\,,\ y = A\,x\,.$$

Das **Theorem vom abgeschlossenen Graphen** besagt, dass ein abgeschlossener Operator $A \in L(\mathbf{H})$ mit $D(A) = \mathbf{H}$ zu $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ gehört.

Folgerung 4.7 *Sind $A \in L(\mathbf{H})$ selbstadjungiert, $B \in L(\mathbf{H})$ symmetrisch und $A \subset B$, so gilt $A = B$. Ist $A \in L(\mathbf{H})$ symmetrisch mit $D(A) = \mathbf{H}$, so gilt $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$.*

Definition 4.8 *Ein Operator $A \in L(\mathbf{H})$ wird* **abschließbar** *genannt, wenn es einen abgeschlossenen Operator $B \in L(\mathbf{H})$ mit $A \subset B$ gibt.*

Satz 4.9 *Falls A abschließbar ist, so existiert eine kleinste abgeschlossene Fortsetzung $\overline{A}$, die* **Abschließung** *von A, in dem Sinne, dass $\overline{A} \subset B$ für jede abgeschlossene Fortsetzung B von A gilt. Ist $A \in L(\mathbf{H})$ abschließbar, so gilt $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$.*

Beispiel 4.10 *Wir zeigen, dass zu jedem Hilbertraum ein nicht abschließbarer linearer Operator existiert.*

Bemerkung 4.11 *Ist $A \in L(\mathbf{H})$ ein abgeschlossener Operator mit $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$, so gehört λ zu $\rho(A)$ genau dann, wenn $A - \lambda I : D(A) \longrightarrow \mathbf{H}$ eine Bijektion ist.*

4.2 Selbstadjungierte Operatoren

Satz 4.12 *Es seien $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, E_λ eine linksseitig stetige Spektralschar, $J_n(f) = \int_{-n}^{n-0} f(\lambda)\,dE_\lambda$, $D(A) = \left\{x \in \mathbf{H} : \exists \lim\limits_{n\to\infty} J_n(f)x\right\}$ und $A\,x = \lim\limits_{n\to\infty} J_n(f)x$. Dann ist $A = J(f) \in L(\mathbf{H})$ ein selbstadjungierter Operator, für den wir auch*

$$A = J(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,dE_\lambda := \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n-0} f(\lambda)\,dE_\lambda$$

schreiben. Falls f beschränkt ist, so gilt $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$.

Satz 4.13 *Es sei $A \in L(\mathbf{H})$ ein selbstadjungierter Operator. Dann*

(a) *gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$,*

(b) *ist $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ normal für $\lambda \in \rho(A)$ und selbstadjungiert für $\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$,*

(c) *existiert eine eindeutig bestimmte Spektralschar E_λ mit $A = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,dE_\lambda$. Außerdem ist*

$$\mathrm{comm}(A) = \mathrm{comm}(E_\lambda)\,.$$

Folgendes Lemma wird für den Beweis von Satz 4.13,(c) benötigt.

Lemma 4.14 *Es sei* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$.

(a) *Ist* $A = V\sqrt{A^*A}$ *die Polarzerlegung von* A (*vgl. Satz 3.8*), *so ist* $A^* = V^*\sqrt{A\,A^*}$ *die Polarzerlegung von* A^* . *Außerdem gilt* $\sqrt{A\,A^*} = V\sqrt{A^*A}V^*$.

(b) *Ist* A *ein normaler Operator, so existiert ein unitärer Operator* $V \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *mit* $V\,A = A\,V$ *und* $A = V\sqrt{A^*A}$.

Kapitel 5

Differentialoperatoren in $\mathbf{L}^2(a,b)$

Wir erinnern daran, dass wir mit $\Gamma(A)$ den Graphen des Operators $A \in L(\mathbf{H})$ bezeichnen. Ferner definieren wir $V : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H} \times \mathbf{H}$, $(x,y) \mapsto (-y,x)$, wobei wir $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ mit dem inneren Produkt $\langle (x,y),(z,w) \rangle := \langle x,z \rangle + \langle y,w \rangle$ ausstatten.

Lemma 5.1 *Es seien $A \in L(\mathbf{H})$ und $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$. Dann gilt:*

(a) $\Gamma(A^*) = V(\Gamma(A))^\perp$.

(b) *A^* ist abgeschlossen.*

(c) *A ist genau dann abschließbar, wenn $\overline{D(A^*)} = \mathbf{H}$ gilt. In diesem Fall ist $\overline{A} = (A^*)^* =: A^{**}$.*

(d) *Ist A abschließbar, so gilt $(\overline{A})^* = A^*$.*

(e) *A ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\Gamma(A) \perp V(\Gamma(A))$ und $\Gamma(A) + V(\Gamma(A)) = \mathbf{H} \times \mathbf{H}$ gilt.*

Lemma 5.2 *Es seien $F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $F_j : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, lineare Funktionale auf dem linearen Raum $\mathbf{X}$, wobei*

$$\bigcap_{j=1}^{n} N(F_j) \subset N(F)$$

gelte. Dann existieren $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{C}$, so dass $F = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j F_j$.

Im Weiteren seien $-\infty \le a < b \le \infty$ und $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(a,b)$. Eine Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **absolut stetig**, wenn eine lokal integrierbare Funktion $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert (in Zeichen: $g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$), so dass

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(y)\,dy \quad \forall\, x \in (a,b)\,,\ \forall\, c \in (a,b)\,.$$

In diesem Fall schreiben wir $g = f'$. Mit $\mathcal{A}_n(a,b)$ bezeichnen wir die Menge aller $n-1$ mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$, für die $f^{(n-1)} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ absolut stetig ist.

Satz 5.3 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $c_0 = c_0(n,\varepsilon)$, so dass*

$$\int_0^1 |f^{(j)}(x)|^2\,dx \le \varepsilon \int_0^1 |f^{(n)}(x)|^2\,dx + c_0 \int_0^1 |f(x)|^2\,dx \quad \forall\, f \in \mathcal{A}_n(0,1)\,,\ \forall\, j = 0,1,\ldots,n-1\,.$$

Folgerung 5.4 *Sind* $f \in \mathcal{A}_n(a,b) \cap \mathbf{L}^2(a,b)$ *und* $f^{(n)} \in \mathbf{L}^2(a,b)$, *so gilt auch* $f^{(j)} \in \mathbf{L}^2(a,b)$, $j = 0,1,\ldots,n$.

Wir definieren $\mathbf{W}_r^2(a,b) = \left\{f \in \mathcal{A}_r(a,b) \cap \mathbf{L}^2(a,b) : f^{(r)} \in \mathbf{L}^2(a,b)\right\}$. (Sobolevraum der Ordnung r)

Folgerung 5.5 *Ist* $f \in \mathbf{W}_r^2(a,b)$, *so folgt* $f^{(j)} \in \mathbf{C}[a,b]$, $j = 0,1,\ldots,r-1$, *wobei* $f^{(j)}(\infty) = 0$ $(f^{(j)}(-\infty) = 0)$, *falls* $b = \infty$ $(a = -\infty)$, $j = 0,1,\ldots,r-1$.

Mit $D : \mathcal{A}_1(a,b) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ bezeichnen wir den Differentialoperator $Df = f'$, und wir definieren

$$D(A_r^0) = \mathbf{C}_0^\infty(a,b)\,, \quad A_r^0 f = (-\mathbf{i}D)^r f$$

sowie

$$D(A_r) = \mathbf{W}_r^2(a,b)\,, \quad A_r f = (-\mathbf{i}D)^r f\,.$$

Satz 5.6 *Es gilt*

(a) A_r^0 *ist symmetrisch,*

(b) $R(A_r^0) = \left\{g \in \mathbf{C}_0^\infty(a,b) : \int_a^b x^j g(x)\,dx = 0,\ j = 0,1,\ldots,r-1\right\} =: \mathbf{C}_{0,r}^\infty(a,b)$,

(c) $\left(A_r^0\right)^* = A_r$, $A_r^* = \overline{A_r^0}$,

(d) $D(\overline{A_r^0}) = \left\{f \in \mathbf{W}_r^2(a,b) : f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0,\ j = 0,1,\ldots,r-1\right\} =: \mathbf{W}_r^{2,0}(a,b)$.

Folgerung 5.7 *Ist* $(a,b) = \mathbb{R}$, *so ist der Operator* A_r *selbstadjungiert. Ist aber* $(a,b) \neq \mathbb{R}$, *so sind* $\overline{A_r^0}$ *und* A_r *keine selbstadjungierten Operatoren.*

Satz 5.8 *Im Fall* $(a,b) = \mathbb{R}$ *gilt* $\sigma(A_{2r}) = [0,\infty)$ *und* $\sigma(A_{2r-1}) = \mathbb{R}$.

Kapitel 6

Der Formalismus der Quantenmechanik

Wir betrachten ein System aus N (im Allgemeinen elektrisch geladenen) Teilchen in einem elektromagnetischen Feld und setzen $n = 3N$. Mit $q_1, \ldots, q_n$ bezeichnen wir die kartesischen Ortskoordinaten (d.h., q_{3j-2}, q_{3j-1} und q_{3j} sind die Ortskoordinaten des j-ten Teilchens) und mit $p_1, \ldots, p_n$ die Impulskoordinaten (d.h., $p_{3j-k} = m_j \dot{q}_{3j-k}$, $k = 0, 1, 2$, $j = 1, \ldots, N$). Die Hamiltonschen Differentialgleichungen lauten dann

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q},$$

wobei die Hamiltonfunktion $H(q,p)$ gleich der totalen Energie des Systems ist. Im Fall eines geladenen Teilchens in einem elektrischen Feld E mit dem Potential V (d.h., $E(q) = -\operatorname{grad} V(q)$) haben wir

$$H(q,p) = \frac{|p|^2}{2m} + V(q) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{3} p_j^2 + V(q_1, q_2, q_3)$$

und somit

$$\dot{q}_j = \frac{p_j}{m}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial V(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Das ist klassische Mechanik. In der Quantenmechanik wird der **Zustand** eines Systems zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ durch eine **Zustandsfunktion** $\psi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \psi_t(x)$ beschrieben: Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so ist

$$\int_A |\psi_t(x)|^2 \, dx$$

gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass $q(t) \in A$. Folglich muss $\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_t(x)|^2 \, dx = 1$, erfüllt sein, insbesondere ist $\psi_t \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Die Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,t) \mapsto \psi_t(x)$ nennt man **Wellenfunktion**. Somit ist $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ als **Zustandsraum** des Systems anzusehen. Der Erwartungswert der Ortskoordinate q_j im Zustand $\psi = \psi_t$ ist gleich

$$q_j^\psi = \int_{\mathbb{R}^n} x_j |\psi(x)|^2 \, dx = \langle x_j \psi, \psi \rangle,$$

die entsprechende Varianz gleich

$$\operatorname{var}_\psi(q_j) = \int_{\mathbb{R}^n} (x_j - q_j^\psi)^2 |\psi(x)|^2 \, dx = \left\langle (x_j - q_j^\psi)\psi, (x_j - q_j^\psi)\psi \right\rangle,$$

und die Streuung gleich $\sigma_\psi(q_j) = \sqrt{\mathrm{var}_\psi(q_j)}$. Wir haben somit der Ortskoordinate q_j den Operator der Multiplikation mit x_j zugeordnet. Der Impulskoordinate ordnen wir den Differentiationsoperator $D_j = \frac{\hbar}{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ zu, wobei $\hbar \approx 10^{-34} Js$ das Planck'sche Wirkungsquantum bezeichnet. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
p_j^\psi &= \frac{\hbar}{\mathbf{i}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} \overline{\psi(x)}\, dx = \langle D_j \psi, \psi \rangle \ , \\
\mathrm{var}_\psi(p_j) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\frac{\hbar}{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - p_j^\psi \right) \psi(x) \right|^2 dx = \left\langle (D_j - p_j^\psi)\psi, (D_j - pj^\psi)\psi \right\rangle \ , \\
\sigma_\psi(p_j) &= \sqrt{\mathrm{var}_\psi(p_j)} \, .
\end{aligned}$$

Bemerkung 6.1 *Es seien $A, B \in L(\mathbf{H})$ symmetrische Operatoren (d.h. $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle \ \forall\, x \in D(A)$). Wir definieren $a_x := \langle Ax, x\rangle$ und $b_x := \langle Bx, x\rangle$ sowie*

$$\sigma_x(A) := \|(A - a_x I)x\| \ , \quad \sigma_x(B) := \|(B - b_x I)x\| \ .$$

Dann gilt die **Unschärferelation**

$$\sigma_x(A)\sigma_x(B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle (AB - BA)x, x\rangle \right| \quad \forall\, x \in D(AB) \cap D(BA) \, .$$

Folgerung 6.2 (Heisenberg'sche Unschärferelation) *Für jeden Zustand $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\sigma_\psi(q_j)\sigma_\psi(p_j) \geq \frac{\hbar}{2} \ \|\psi\|^2 \ , \quad j = 1, \ldots, n \, .$$

Die Wellenfunktion genügt der **Schrödingergleichung**

$$\mathbf{i}\hbar \, \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = S\psi(x,t) \, , \tag{6.1}$$

wobei der **Schrödingeroperator** S auf ψ als Funktion der Ortskoordinaten wirkt. Den Operator S erhält man aus der Hamiltonfunktion $H(q,p)$ unter Berücksichtigung folgender Regeln:

1. Man stellt $H(q,p)$ als eine Summe von
   (a) rein quadratischen Termen in p_j ,
   (b) Termen $V(q)$, die nur q abhängen,
   (c) Termen der Form $\frac{1}{2}\left[p_j f_j(q) + f_j(q) p_j\right]$

   dar.
2. Man ersetzt q_j durch den Operator der Multiplikation mit x_j und p_j durch den Differentiationsoperator D_j .

Der Erwartungswert $\langle S\psi, \psi\rangle$ des Schrödingeroperators im Zustand ψ ist gleich der Energie des Systems im zustand ψ und sollte somit für alle $\psi \in D(S)$ reell sein. Folglich hat S symmetrisch zu sein (vgl. Satz 4.6). Die Evolutionsoperatoren $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ sind wie folgt definiert:

> $U(t)\psi$ ist gleich dem Zustand zur Zeit $t \in \mathbb{R}$, wenn ψ der Zustand des Systems zum Zeitpunkt 0 ist.

Somit ist es sinnvoll, dass $U(t)$ folgende Bedingungen erfüllt ($\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$):

(a) $D(U(t)) = \mathbf{H}\ \forall\, t \in \mathbb{R}$,

(b) $U(0) = I$,

(c) $U(t) \in L(\mathbf{H})\ \forall\, t \in \mathbb{R}$,

(d) $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2) = U(t_2)U(t_1)$, $\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

(e) $\lim\limits_{s \to t} \|U(s)\psi - U(t)\psi\| = 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\forall\, \psi \in \mathbf{H}$,

(f) $\|U(t)\psi\| = \|\psi\|$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\forall\, \psi \in \mathbf{H}$,

(g) $R(U(t)) = \mathbf{H}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Definition 6.3 *Wir nennen eine Familie* $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *von Operatoren mit den Eigenschaften* (a)–(g) *eine* (*einparametrige*) **stark stetige Gruppe unitärer Operatoren**. *Der* **infinitesimale Generator** $A \in L(\mathbf{H})$ *dieser Gruppe ist definiert durch*

$$D(A) = \left\{ x \in \mathbf{H} : \exists \lim_{t \to 0} t^{-1}[U(t) - I]x \in \mathbf{H} \right\}, \quad Ax = \lim_{t \to 0} t^{-1}[U(t) - I]x\,.$$

Satz 6.4 *Es sei* $A \in L(\mathbf{H})$ *der infinitesimale Generator der stark stetigen Gruppe* $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *unitärer Operatoren.*

(a) *Der Operator* $S = \mathbf{i}A$ *ist selbstadjungiert.*

(b) *Für jedes* $x^0 \in D(S)$ *ist die Funktion* $U(t)x^0$, $t \in \mathbb{R}$, *die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = -\mathbf{i}Sx\,, \quad x(0) = x^0\,.$$

Insbesondere gilt $U(t)x \in D(S)$ *für alle* $x \in D(S)$ *und für alle* $t \in \mathbb{R}$.

Index