Skript zur Vorlesung

Analysis I/II

2009/2010

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] K. Burg, H. Haf, F. Wille, Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. 1, Analysis, B. G. teubner, Stuttgart.

[2] J. Dieudonne, Grundzüge der modernen Analysis, Bd. 1, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[3] G. M. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung, Bd. 1 und 2, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[4] H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1 und 2, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden.

[5] H. S. Holdgrün, Analysis, Bd. 1 und 2, Leins Verlag, Göttingen.

[6] W. Rudin, Analysis, Oldenbourg Verlag, München, Wien.

[7] C. P. Wiedemann, Analysis, Eine Einführung mit vielen Beispielen, Pro BUSINESS, Berlin.

[8] ——, Kleine Enzyklopädie Mathematik, Bibliographisches Institut, Leipzig.

Kapitel 1

Zahlenkörper

1.1 Bezeichnungen und Vereinbarungen

Bezeichnungen:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ - die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ - die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
- $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ - die Menge der ganzen Zahlen

Relationen zwischen Mengen:

- $A \subset B \iff_{\text{def}} (a \in A \implies a \in B) \iff (a \in B \; \forall \, a \in A)$
- $A = B \iff_{\text{def}} (A \subset B \text{ und } B \subset A)$
- Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die leere Menge. Es gilt $\emptyset \subset A$ für jede Menge A.

Operationen mit Mengen:

- $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$ - die Vereinigung zweier Mengen
- $A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$ - der Durchschnitt zweier Mengen
- $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$ - die Differenz zweier Mengen
- $A \times B := \{(x, y) : x \in A \text{ und } y \in B\}$ - das Kreuzprodukt zweier Mengen
- $A^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in A, \, j = 1, \ldots, n\}$, $n = 2, 3, \ldots$
- $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha := \{x : \exists \, \alpha \in \mathcal{I} \text{ mit } x \in A_\alpha\}$ - die Vereinigung beliebig vieler Mengen

  Im Fall $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$ schreiben wir auch $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ statt $\displaystyle\bigcup_{k \in \{1, \ldots, n\}} A_k$, im Fall $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ auch $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ statt $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
- $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \; \forall \, \alpha \in \mathcal{I}\}$ - der Durchschnitt beliebig vieler Mengen

Im Fall $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$ schreiben wir auch $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ statt $\bigcap\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}} A_k$, im Fall $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ auch $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ statt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Weitere Bezeichnungen:

- $\#A$ - Anzahl der Elemente der Menge A, falls A nur endlich viele Elemente enthält
- $\mathcal{P}(A) := \{B : B \subset A\}$ - Potenzmenge der Menge A, z.B. $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \le y$: $\sum\limits_{k=x}^{y} a_k := a_x + a_{x+1} + \ldots + a_y$, z.B. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \le y$: $\prod\limits_{k=x}^{y} a_k := a_x a_{x+1} \cdots a_y$, z.B. $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n$

1.2 Die Körper der rationalen und der reellen Zahlen

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist die Menge aller geordneten Paare (m, n) mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Eine rationale Zahl (m, n) schreiben wir auch in der Form $\frac{m}{n}$, wobei m Zähler und n Nenner dieser rationalen Zahl genannt werden. Für $(m, 1) \in \mathbb{Q}$ schreibt man auch nur m. In diesem Sinne gilt $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Zwei rationale Zahlen (m_1, n_1) und (m_2, n_2) werden identifiziert (in Zeichen: $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$), wenn $m_1 n_2 = m_2 n_1$ gilt. Die Addition und die Multiplikation zweier rationaler Zahlen sind wie folgt erklärt:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}, \quad \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}.$$

(Das Multiplikationszeichen wird meistens nicht geschrieben.) Unter Verwendung der bekannten Ordnungsrelation in der Menge der ganzen Zahlen definieren wir

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \iff_{\text{def}} m_1 n_2 < m_2 n_1 .$$

Für $a, b \in \mathbb{Q}$ schreiben wir auch $a \le b$, falls $a < b$ oder $a = b$ gilt. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, versehen mit den erklärten binären Operationen der Addition und Multiplikation und obiger Ordnungsrelation hat nun u.a. folgende Eigenschaften:

(A1) $a + b = b + a \ \forall\, a, b \in \mathbb{Q}$ - Kommutativität der Addition

(A2) $a + (b + c) = (a + b) + c \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$ - Assoziativität der Addition

(A3) $a + 0 = a \ \forall\, a \in \mathbb{Q}$ - Existenz einer Null (neutrales Element bezüglich der Addition)

(A4) $\forall\, a \in \mathbb{Q} \ \exists\, b \in \mathbb{Q}$ mit $a + b = 0$ (in Zeichen: $b = -a$) - Existenz der entgegengesetzten Zahl

(M1) $ab = ba \ \forall\, a, b \in \mathbb{Q}$ - Kommutativität der Multiplikation

(M2) $(ab)c = a(bc) \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$ - Assoziativität der Multiplikation

(M3) $a1 = a \ \forall\, a \in \mathbb{Q}$, $1 \ne 0$ - Existenz einer Eins (neutrales Element bzgl. der Multiplikation)

(M4) $\forall\, a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \ \exists\, b \in \mathbb{Q}$ mit $ab = 1$ (in Zeichen: $b = \frac{1}{a} = a^{-1}$) - Existenz der inversen Zahl

(D) $a(b+c) = ac + bc \; \forall \, a, b, c \in \mathbb{Q}$ - das Distributivgesetz (Vereinbarung: “Punkt vor Strich”)

(O1) Für beliebige $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt genau eine der Aussagen $a < b$, $a = b$, $b < a$.

(O2) Aus $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$. (Transitivität der Ordnungsrelation)

Für $a < b$ bzw. $a \leq b$ schreibt man auch $b > a$ bzw. $b \geq a$. Weiterhin vereinbart man

$$a - b := a + (-b) \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} := a\frac{1}{b} = ab^{-1} \,. \tag{1.1}$$

Folgerung 1.1 *Aus $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$.*

Bemerkung 1.2 *Für $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt offenbar $a^{-1} = \frac{n}{m}$.*

Die Eigenschaften (auch Axiome genannt) (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (D) besagen, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein **Körper** ist. Wegen (O1) und (O2) ist $(\mathbb{Q}, <)$ eine **geordnete Menge**. Man nennt nun $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ einen **geordneten Körper**, weil noch folgende zwei Axiome erfüllt sind:

(O3) Aus $a, b, c \in \mathbb{Q}$ und $b < c$ folgt $a + b < a + c$.

(O4) Aus $a, b \in \mathbb{Q}$, $0 < a$ und $0 < b$ folgt $0 < ab$.

Für beliebiges $a \in \mathbb{Q}$ setzt man $a^0 = 1$ und definiert für $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = a^{n-1}a \quad \text{sowie, falls } a \neq 0, \quad a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n \,.$$

Offenbar gelten dann für beliebige $a, b \in \mathbb{Q}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ die Potenzgesetze

$$(ab)^n = a^n b^n \,, \quad a^m a^n = a^{m+n} \quad \text{und} \quad (a^m)^n = a^{mn} \,. \tag{1.2}$$

Satz 1.3 *Die Axiome $(A1) - (A4)$, $(M1) - (M4)$ und (D) implizieren folgende Rechenregeln für beliebige $a, b, c \in \mathbb{Q}$:*

(a) *Es ist $a + b = a + c$ äquivalent zu $b = c$. Insbesondere folgt aus $a + b = a$ stets $b = 0$, so dass es nur ein neutrales Element bezüglich der Addition gibt.*

(b) *Es ist $a + b = 0$ äquivalent zu $b = -a$. Also ist die entgegengesetzte Zahl zu einer gegebenen Zahl eindeutig bestimmt.*

(c) *Es gilt $-(-a) = a$.*

(d) *Für $a \neq 0$ ist $ab = ac$ äquivalent zu $b = c$. Insbesondere folgt aus $ab = a$ stets $b = 1$, so dass es nur ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation gibt.*

(e) *Es ist $ab = 1$ äquivalent zu $b = a^{-1}$, so dass die inverse Zahl zu einer gegebenen Zahl eindeutig bestimmt ist.*

(f) *Für $a \neq 0$ gilt $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.*

(g) *Es gilt $0a = 0$ für alle $a \in \mathbb{Q}$.*

(h) *Aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $ab \neq 0$.*

(i) *Es gilt $(-a)b = -(ab) = a(-b)$ und $(-a)(-b) = ab$.*

Mit der in (1.1) vereinbarten Schreibweise erhalten wir also

$$a(b - c) = a[b + (-c)] = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac \,.$$

Satz 1.4 *Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gelten (wie in jedem geordneten Körper) folgende Regeln:*

(*a*) *Die Ungleichung $0 < a$ ist äquivalent zu $-a < 0$.*

(*b*) *Ist $0 < a$, so ist $ab < ac$ äquivalent zu $b < c$.*

(*c*) *Ist $a < 0$, so ist $ab < ac$ äquivalent zu $c < b$.*

(*d*) *Aus $a \neq 0$ folgt $0 < a^2$. Insbesondere gilt $0 < 1$.*

(*e*) *Die Aussage $0 < a < b$ ist äquivalent zu $0 < b^{-1} < a^{-1}$.*

Folgerung 1.5 *Der geordnete Körper der rationalen Zahlen ist* **in sich dicht**, *d.h., für beliebige $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ existiert ein $c \in \mathbb{Q}$, so dass $a < c < b$ gilt.*

Sind $(M, <)$ eine geordnete Menge und $A \subset M$ nicht leer, so schreiben wir $x = \max A$ bzw. $y = \min A$, falls $x \in A$ und $x \le a \ \forall\, a \in A$ bzw. $y \in A$ und $y \ge a \ \forall\, a \in A$ gilt.

Definition 1.6 *Es seien $(M, <)$ eine geordnete Menge und $N \subset M$ nicht leer. Ein Element $a \in M$ nennt man* **obere Schranke** (*bzw.* **untere Schranke**) *von N, wenn $x \le a$ $(x \ge a)$ für alle $x \in N$ gilt. Die Menge aller oberen (bzw. unteren) Schranken von N bezeichnen wir mit N_o (bzw. N_u). Man nennt N nach* **oben** *(bzw. nach* **unten***)* **beschränkt**, *falls $N_o \neq \emptyset$ (bzw. $N_u \neq \emptyset$) gilt. Das kleinste Element in N_o, falls dieses existiert, wird* **Supremum** *von N genannt (in Zeichen: $\sup_M N$). Entsprechend heißt das größte Element in N_u, falls dieses existiert,* **Infimum** *von N (in Zeichen: $\inf_M N$).*

Eine Menge, die sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, nennt man **beschränkt**.

Beispiel 1.7 *Es gibt keine rationale Zahl a, für die $a^2 = 2$ gilt. Mehr noch, die Zahlen*

$$\sup_{\mathbb{Q}} \left\{ a \in \mathbb{Q} : a > 0 \text{ und } a^2 < 2 \right\} \quad \textit{und} \quad \inf_{\mathbb{Q}} \left\{ a \in \mathbb{Q} : a > 0 \text{ und } a^2 > 2 \right\}$$

existieren nicht, obwohl die erste Menge nach oben und die zweite nach unten beschränkt sind.

Definition 1.8 *Man sagt, dass eine geordnete Menge M die* **Supremumseigenschaft** *hat bzw.* **vollständig** *ist, wenn für jede nichtleere Menge $N \subset M$, die nach oben beschränkt ist, $\sup_M N$ existiert.*

Das Beispiel 1.7 zeigt, dass die Menge der rationalen Zahlen nicht vollständig ist.

Satz 1.9 *Besitzt M die Supremumseigenschaft und ist $N \subset M$ nicht leer und nach unten beschränkt, so existiert $s = \sup_M N_u$, und es gilt $\inf_M N = s$.*

Satz 1.10 *Es gibt einen geordneten Körper $\mathbb{R}$ (den Körper der reellen Zahlen), der den geordneten Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen als Unterkörper enthält und die Supremumseigenschaft besitzt, also vollständig ist.*

Für $\sup_{\mathbb{R}}$ bzw. $\inf_{\mathbb{R}}$ schreiben wir kurz sup bzw. inf . Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer, so gilt offenbar $x = \sup A$ (bzw. $y = \inf A$) genau dann, wenn $x \ge a$ (bzw. $y \le a$) für alle $a \in A$ gilt und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $a_\varepsilon \in A$ mit $a_\varepsilon > x - \varepsilon$ (bzw. $a_\varepsilon < y + \varepsilon$) existiert. Sind $A \subset \mathbb{R}$ nach oben (bzw. unten) beschränkt und $B \subset A$, so sieht man leicht, dass dann $\sup B \le \sup A$ (bzw. $\inf B \ge \inf A$) folgt.

Bemerkung 1.11 *Die Aussagen der Sätze 1.3 und 1.4 bleiben also gültig, wenn man $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt.*

Abkürzend verwenden wir folgende Bezeichnungen für gewisse Teilmengen von $\mathbb{R}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ vorausgesetzt wird:

1. $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ - offenes Intervall,
2. $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ - abgeschlossenes Intervall,
3. $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$, $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$ - halboffene Intervalle,
4. $[a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$, $(a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$,
5. $(-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$, $(-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.

Für $\mathbb{R}$ schreiben wir manchmal auch $(-\infty,+\infty)$. (Vgl. auch Bemerkung 1.20.)

Satz 1.12 (Archimedes'sches Prinzip) *Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*

Folgerung 1.13 *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Folgerung 1.14 *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer. Dann gilt $x = \sup A$ genau dann, wenn $x \ge a$ für alle $a \in A$ gilt und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit $a_n > x - \frac{1}{n}$ existiert. Eine analoge Aussage gilt für $\inf A$.*

Satz 1.15 (Wohlordnungseigenschaft der natürlichen Zahlen) *Jede nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ der geordneten Menge der natürlichen Zahlen besitzt ein kleinstes Element.*

Bemerkung 1.16 *Analog gilt, dass jede nach unten beschränkte Teilmenge der geordneten Menge der ganzen Zahlen ein kleinstes Element besitzt.*

Satz 1.17 *Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$. Insbesondere ist also der Körper der reellen Zahlen in sich dicht.*

Der Betrag $|x|$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist erklärt durch

$$|x| := \begin{cases} x & : \ x \ge 0 \,, \\ -x & : \ x < 0 \,. \end{cases}$$

Offenbar sind $|x| < y$ bzw. $|x| \le y$ äquivalent zu $-y < x < y$ bzw. $-y \le x \le y$. Ferner gilt die Dreiecksungleichung

$$|x+y| \le |x| + |y| \,, \quad x, y \in \mathbb{R} \,, \tag{1.3}$$

aus der man die Ungleichung

$$\Big| |x| - |y| \Big| \le |x-y| \,, \quad x, y \in \mathbb{R} \,, \tag{1.4}$$

schlussfolgern kann.

Mit $\mathbb{R}_+$ bezeichnen wir die Menge der positiven reellen Zahlen, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, \infty)$.

Satz 1.18 (Existenz der n-ten Wurzel) *Für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}_+$ mit $y^n = x$ (in Zeichen: $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$).*

Sind $a, b \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$, so folgen mit $\alpha := a^{\frac{1}{n}}$ und $\beta := b^{\frac{1}{n}}$ aus den Potenzgesetzen (1.2) die Beziehungen

$$(\alpha\beta)^n = \alpha^n \beta^n = ab \quad \text{und} \quad a^m = (\alpha^n)^m = (\alpha^m)^n \,,$$

also die Gesetze

$$a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m .$$

Die Zahl x^y kann nun für beliebige $x \in \mathbb{R}_+$ und $y \in \mathbb{R}$ in folgenden Schritten definiert werden:

1. Für $p = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$, $m_j \in \mathbb{Z}$, $n_j \in \mathbb{N}$, gilt $(x^{m_1})^{\frac{1}{n_1}} = (x^{m_2})^{\frac{1}{n_2}}$, so dass die Definition

   $$x^p := (x^m)^{\frac{1}{n}} \quad \text{für} \quad p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

   korrekt ist. Es folgt

   $$(xy)^p = x^p y^p \,, \quad x^p x^q = x^{p+q} \,, \quad (x^p)^q = x^{pq} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+ \,,\ \forall\, p, q \in \mathbb{Q} \,. \tag{1.5}$$

   Außerdem ist offenbar $0 < a < b$ äquivalent zu $0 < a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$, woraus folgt

   $$0 < a < b \iff 0 < a^p < b^p \quad \forall\, p \in \mathbb{Q}_+ := \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\} \,. \tag{1.6}$$

   Weiterhin gilt

   $$x^{p_1} < x^{p_2} \quad \forall\, x > 1 \,,\ \forall\, p_1, p_2 \in \mathbb{Q} : p_1 < p_2 \,. \tag{1.7}$$

2. Setzen wir $A(x, y) = \{x^p : p \in \mathbb{Q} \text{ und } p \le y\}$, so gilt für $x \ge 1$ und $y \in \mathbb{Q}$ die Beziehung $x^y = \sup_{\mathbb{R}} A(x, y)$, so dass diese Gleichung als Definition für x^y für beliebige $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x \ge 1$ und $y \in \mathbb{R}$ sinnvoll ist.

3. Für $0 < x < 1$ und $y \in \mathbb{R}$ setzen wir $x^y = \left(x^{-1}\right)^{-y}$.

Die Potenzgesetze (1.2) bleiben gültig:

$$(xy)^z = x^z y^z \,, \quad x^z x^w = x^{z+w} \quad \text{und} \quad (x^z)^w = x^{zw} \,, \quad x, y \in \mathbb{R}_+,\ z, w \in \mathbb{R} \,. \tag{1.8}$$

Ferner gilt

$$x^{y_1} < x^{y_2} \quad \text{für} \quad x > 1 \text{ und } y_1 < y_2 \tag{1.9}$$

sowie

$$x_1^y < x_2^y \quad \text{für} \quad 0 < x_1 < x_2 \text{ und } y > 0 \,. \tag{1.10}$$

Satz 1.19 (Logarithmus) *Für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und jedes $x \in \mathbb{R}_+$ existiert genau ein $y \in \mathbb{R}$, so dass $a^y = x$ gilt (in Zeichen: $y = \log_a x$).*

Bemerkung 1.20 *In gewissen Situationen ist es sinnvoll, die Menge der reellen Zahlen (die reelle Zahlengerade) durch die zwei Symbole $-\infty$ und $+\infty$ zu ergänzen. Neben der bekannten Ordnung in $\mathbb{R}$ vereinbart man dann $-\infty < x < +\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach oben (bzw. unten) unbeschränkt, so setzt man $\sup A = +\infty$ (bzw. $\inf A = -\infty$). Damit hat jede nichtleere Teilmenge der erweiterten Zahlengeraden ein Supremum und ein Infimum. Obwohl die erweiterte Zahlengerade kein Körper ist, sind folgende weitere Vereinbarungen sinnvoll:*

1. $x - \infty = -\infty \,, \quad x + \infty = +\infty \,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \,,$
2. $\dfrac{x}{-\infty} = \dfrac{x}{+\infty} = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \,,$
3. $x \cdot (-\infty) = -\infty \,, \quad x \cdot (+\infty) = +\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+ \,,$
4. $x \cdot (-\infty) = +\infty \,, \quad x \cdot (+\infty) = -\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ *mit* $x < 0 \,.$

In einem solchen Zusammenhang nennt man die $x \in \mathbb{R}$ endliche reelle Zahlen.

Oft schreibt man für $+\infty$ auch einfach nur ∞.

1.3 Übungsaufgaben

1. Sind die folgenden Aussagen wahr? Was ist jeweils ihr Gegenteil?

   (a) $3 < 4 \wedge 4 < 3$, (e) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 \in \mathbb{N}$,
   (b) $3 < 4 \vee 4 < 3$, (f) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} : x = y + 1$,
   (c) $3 < 4 \wedge \neg(4 < 3)$, (g) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} : y = x + 1$,
   (d) $3 < 4 \vee$ Der Mond ist aus Käse, (h) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x = y + 1$,
   (i) Wenn meine Großmutter Räder hätte, wäre sie ein Autobus,
   (j) Für alle reellen Zahlen x gilt $3 < x \Leftrightarrow \neg(x < 3)$.

2. Beweisen Sie mithilfe der Wahrheitswerttabelle den Satz von der Kontraposition (Prinzip des indirekten Beweises): $(p \Rightarrow q) \iff (\neg q \Rightarrow \neg p)$!

3. Es gelte die folgende Implikation:

   {Die Ware ist verdorben.} $\Rightarrow$ {Die Ware darf nicht verkauft werden.}

   Welche Folgerungen können getroffen werden, wenn folgende Aussagen wahr sind:

   (a) Die Ware ist verdorben. (c) Die Ware darf verkauft werden.
   (b) Die Ware ist nicht verdorben. (d) Die Ware darf nicht verkauft werden.

4. Nutzen Sie die Implikation $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ zur Lösung der Gleichung $\sqrt{x+2} - x = 0$!

5. Sei M die Menge der Menschen und H die Menge der Hunde. Negieren Sie

   $\forall h \in H \quad \exists m \in M : (m \text{ füttert } h \wedge m \text{ führt } h \text{ Gassi})$.

6. Seien A und B zwei Aussagen (etwa „$x > 2$" und „$x > 1$" für reelle x). Schreiben Sie $A \Rightarrow B$ ohne den Folgepfeil nur mit den logischen Symbolen „nicht", „und" und „oder" ($\neg$, $\wedge$ und $\vee$).

7. Dividieren Sie

   (a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$, (b) **(HA)** $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$.

8. Lösen Sie die folgenden Gleichungen

   (a) $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \dfrac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x+0.25}\,\lg 4$.

   (b) $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a^4 - x^4}}(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = (a - x)^{-\frac{1}{2}}$, $a > 0$.

9. Zeigen Sie, dass folgende Zahlen irrational sind:

   (a) $\sqrt{2}$, (b) **(HA)** $\sqrt{5}$!

10. Dies ist ein A4-Blatt. Es ist offenbar etwas höher als breit. Aber wie ist das Verhältnis von Höhe und Breite genau, und warum ist das so?

11. Man zeige, dass aus $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ folgt $p + x, px \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12. Sind folgende Mengen beschränkt? Ermitteln Sie gegebenenfalls Supremum und Infimum!

    (a) $(0, 1)$, (b) $(-\infty, 0]$, (c) $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$,
    (d) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, (e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\right\}$, (f) $\left\{n^{(-1)^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, (**Z**) $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

13. Es seien die nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt und $-A := \{-a : a \in A\}$. Man zeige, dass dann $\sup(-A) = -\inf A$ gilt.

14. Die Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ seien nach oben beschränkt. Wir definieren

    $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

    Zeigen Sie, dass dann $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ gilt.

15. Es seien $r, z, w \in \mathbb{R}$ und $r < zw$. Dann existieren $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < z$, $q < w$ und $r < pq$.

1.4 Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Satz 1.21 *Hat eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ der Menge der natürlichen Zahlen die zwei Eigenschaften, dass $1 \in M$ gilt und dass aus $n \in M$ folgt $n + 1 \in M$, so ist $M = \mathbb{N}$.*

Folgerung 1.22 (Beweisprinzip der vollständigen Induktion) *Eine Aussage $P(n)$ ist genau dann für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr, wenn $P(1)$ wahr ist und wenn aus der Gültigkeit der Aussagen $P(1), \ldots, P(k)$, $k \in \mathbb{N}$, die Gültigkeit von $P(k + 1)$ folgt.*

Beispiel 1.23 (Bernoullische Ungleichung) *Für beliebiges reelles $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ und beliebiges $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt*

$$(1 + x)^n > 1 + n\,x\,.$$

1.5 Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion

   (a) die Ungleichung $2^n > n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$,

   (b) die Formel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

   (c) $\displaystyle\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$,

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Beweisen Sie, dass $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar ist.

3. Man zeige durch vollständige Induktion, dass aus $\#A = n$ folgt $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

4. (a) Beweisen Sie mit Hilfe der binomischen Formel, dass

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (b) Lösen Sie mit dieser Beziehung die Aufgabe 3.

5. Zeigen Sie, dass $n^3 - 7n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

6. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen Primteiler besitzt!

1.6 Der Körper der komplexen Zahlen

Definition 1.24 *Die Menge* $\mathbb{C}$ *der komplexen Zahlen ist die Menge aller geordneten Paare* (x,y) *reeller Zahlen* $x,y \in \mathbb{R}$ *, d.h.* $\mathbb{C} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ *. Dabei werden zwei komplexe Zahlen* (x_1,y_1) *und* (x_2,y_2) *genau dann als gleich angesehen, wenn* $x_1 = x_2$ *und* $y_1 = y_2$ *gilt. Ferner definieren wir die Addition und die Multiplikation komplexer Zahlen durch*

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und

$$(x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\,.$$

Satz 1.25 $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *ist ein Körper mit der Null* $(0,0)$ *und der Eins* $(1,0)$.

Geometrisch kann man also die Menge der komplexen Zahlen auch als Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ auffassen, weshalb $\mathbb{C}$ auch **Gaußsche Zahlenebene** genannt wird. Die Menge $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ können wir mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen identifizieren, weil $(x,0)+(y,0) = (x+y,0)$ und $(x,0)(y,0) = (xy,0)$ gilt. Wir schreiben deshalb für die komplexe Zahl $(x,0)$ einfach nur x und betrachten in diesem Sinne $\mathbb{R}$ als Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Die komplexe Zahl $\mathbf{i} := (0,1)$, die die Eigenschaft $\mathbf{i}^2 = -1$ besitzt, nennt man **imaginäre Einheit**. Ferner gilt $(x,0)+(0,1)(y,0) = (x,y)$, was wir nun auch in der Form $(x,y) = x+\mathbf{i}y$ schreiben können. Wir nennen $\mathsf{Re}\, z := x$ den **Realteil** und $\mathsf{Im}\, z := y$ den **Imaginärteil** der komplexen Zahl $z = x+\mathbf{i}y$, wobei $x,y \in \mathbb{R}$. Die komplexe Zahl $\overline{z} := x-\mathbf{i}y$ nennt man die zu $z = x+\mathbf{i}y$, $x,y \in \mathbb{R}$, **konjugiert komplexe Zahl**.

Satz 1.26 *Für beliebige komplexe Zahlen* z *und* w *gilt*

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,

(c) $2\mathsf{Re}\, z = z + \overline{z}$, $2\mathbf{i}\,\mathsf{Im}\, z = z - \overline{z}$,

(d) $z\overline{z} = x^2 + y^2 \in [0,\infty)$, *falls* $z = (x,y) = x + \mathbf{i}y$.

Beispiel 1.27 *Die Menge aller Lösungen* $z \in \mathbb{C}$ *der Gleichung* $z^2 + 1 = 0$ *ist gleich* $\{\mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$.

Die Zahl $|z| := \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$ nennt man **Betrag** der komplexen Zahl $z = x + \mathbf{i}y$, $x,y \in \mathbb{R}$.

Satz 1.28 *Für beliebige* $z,w \in \mathbb{C}$ *gilt*

(a) $|z| = 0 \iff z = 0$,

(b) $|\overline{z}| = |z|$,

(c) $|zw| = |z| \cdot |w|$,

(d) $\max\{\mathsf{Re}\, z, \mathsf{Im}\, z\} \le \max\{|\mathsf{Re}\, z|, |\mathsf{Im}\, z|\} \le |z|$,

(e) $|z+w| \le |z| + |w|$ (**Dreiecksungleichung**).

Beispiel 1.29 *Sei* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *der* **Einheitskreis** *der komplexen Zahlenebene. Für jedes* $z \in \mathbb{T}$ *gilt* $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$.

Bemerkung 1.30 *Aus der Dreiecksungleichung (Satz 1.28,(e)) folgt wie im Fall reeller Zahlen die Ungleichung*

$$\Big||z| - |w|\Big| \le |z - w|\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,. \tag{1.11}$$

Beispiel 1.31 *In der Dreiecksungleichung $|z+w| \le |z|+|w|$ steht für beliebige komplexe Zahlen z und w mit $w \neq 0$ genau dann das Gleichheitszeichen, wenn $\frac{z}{w}$ reell und nichtnegativ ist.*

Beispiel 1.32 (Schwarz'sche Ungleichung) *Für beliebige komplexe Zahlen $z_j, w_j \in \mathbb{C}$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}\Big| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2}\,\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2}\,.$$

Eine komplexe Zahl $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann man in der Form

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + \mathbf{i}\frac{y}{|z|}\right) = |z|(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$$

schreiben, wobei die reelle Zahl φ bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt ist,

$$\varphi \in \{\varphi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\,, \quad \varphi_0 \in [-\pi, \pi)\,.$$

Man nennt φ ein **Argument** und φ_0 den **Hauptwert des Arguments** der komplexen Zahl z. Die Darstellung $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ mit $r = |z|$ wird auch **trigonometrische Darstellung** der komplexen Zahl z genannt. Für das Produkt zweier komplexer Zahlen

$$z_k = |z_k|(\cos\varphi_k + \mathbf{i}\sin\varphi_k)\,, \quad k = 1, 2\,,$$

ergibt sich dann die Formel

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\,. \tag{1.12}$$

Induktiv folgt hieraus die **Formel von Moivre**

$$(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \mathbf{i}\sin(n\varphi)\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.13}$$

Beispiel 1.33 *Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung*

$$z^n = 1 \tag{1.14}$$

genau n verschiedene komplexe Lösungen

$$e_k^{(n)} = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Diese n Zahlen nennt man n-te **Einheitswurzeln**. *Sie sind gleichabständig auf dem* **Einheitskreis** *$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ verteilt, weshalb man die Gleichung* (1.14) *auch* **Kreisteilungsgleichung** *nennt.*

Sind nun $w = |w|(\cos\psi + \mathbf{i}\sin\psi) \neq 0$ eine gegebene komplexe Zahl und $n \in \mathbb{N}$, so hat die Gleichung $z^n = w$ genau n verschiedene komplexe Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\psi + 2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,. \tag{1.15}$$

1.7 Einige Formeln

1.7.1 Die geometrische Summenformel

Für $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\,. \tag{1.16}$$

1.7.2 Die binomische Formel

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man den **Binominalkoeffizienten**

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & : \quad k = 0\,, \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} & : \quad k > 0\,. \end{cases}$$

Im Fall $\alpha = n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ist dieser gleich

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,,$$

wobei $0! = 1$ und $k! = (k-1)!\,k$ für $k \in \mathbb{N}$. Falls $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$, so gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\,. \tag{1.17}$$

Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt nun die **binomische Formel**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,. \tag{1.18}$$

Für den Spezialfall $n = 2$ erhält man

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

oder auch (b durch $-b$ ersetzen)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2\,.$$

Aus der letzten Gleichung folgt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ unmittelbar die Ungleichung $2\,a\,b \le a^2 + b^2$, die man für $a\,b > 0$ auch in der Form

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2 \tag{1.19}$$

schreiben kann. Aus (1.18) erhält man für $a = 1$ und $b = z \in \mathbb{C}$ die Formel

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k\,. \tag{1.20}$$

1.7.3 Die polynomische Formel

Die binomische Formel (1.18) ist ein Spezialfall ($p = 2$) der polynomischen Formel

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n \\ (k_1, k_2, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}_0^p}} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_p!}\, a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_p^{k_p}\,, \tag{1.21}$$

die für beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{C}$ und beliebige $p, n \in \mathbb{N}$ gilt.

1.8 Übungsaufgaben

1. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

   (a) $(2+3\mathbf{i})(3-2\mathbf{i})$, (b) $(1+\mathbf{i})^3$, (c) $(1+2\mathbf{i})^6$, (d) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$, (e) $\mathbf{i}^k$ $(k\in\mathbb{Z})$,

   (f) $\dfrac{a+b\mathbf{i}}{a-b\mathbf{i}}$ $(a,b\in\mathbb{R},\ (a,b)\neq(0,0))$, (g) $\dfrac{(1+\mathbf{i})^{10}}{(1-\mathbf{i})^8}$, (h) $(a+b\mathbf{i})^n$ $(a,b\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N})$.

2. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $z,w\in\mathbb{C}$ die Beziehung
$$2(|z|^2+|w|^2)=|z-w|^2+|z+w|^2$$
   gilt.

3. Sind Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z=\log_2 3+\mathbf{i}\log_2 6$ irrational?

4. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

   (a) $\frac{1}{2}+\frac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$, (b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i}$, (c) $\sin\alpha+\mathbf{i}(1-\cos\alpha)$ $(\alpha\in[-\pi,\pi))$, (d) $1+\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}$.

5. Es sei $z=x+\mathbf{i}y=r(\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi)$ mit $x,y\in\mathbb{R}$, $\varphi\in[-\pi,\pi)$, $r>0$ eine beliebige komplexe Zahl. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen:

   (a) $\overline{z}$, (b) $\dfrac{1}{\overline{z}}$, (c) z^2, (d) $\mathbf{i}z$, (e) $z\overline{z}$, (f) $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right|$, **(Z)** $\dfrac{1}{1-z}$ für $z\neq 1$.

6. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre

   (a) $(1+\mathbf{i})^{10}$, (b) $(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^6$, (c) $(-1+\mathbf{i})^5$, (d) $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^3$, (e) $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^9$.

7. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

   (a) $z=\dfrac{1}{\overline{z}}$, (b) $\mathsf{Re}\,(z^2)=1$, (c) $\mathsf{Re}\,\dfrac{1}{z}=c$, (d) $\left|\dfrac{1}{z}\right|\leq 3$, (e) $2<|z|<4$,

   (f) $|z-z_0|=|z-z_1|$, (g) $|z+3|+|z-3|\leq 10$,

   wobei $c\in\mathbb{R}$ und $z_0,z_1\in\mathbb{C}$ beliebige, aber fest gewählte Zahlen sind.

8. Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichungen:

   (a) $z^3=-1$, (b) $z^4+1=0$, (c) $z^3+2=2\mathbf{i}$, (d) $z^4=-8+8\sqrt{3}\,\mathbf{i}$,

   (e) $z^2=-3-4\mathbf{i}$, (f) $z^4-2\mathbf{i}z^2+2\mathbf{i}=1$, (g) $z^2+4\mathbf{i}z+5=0$, (h) $|z|-z=1+2\mathbf{i}$.

9. Zerlegen Sie folgende Polynome sowohl in komplexe Linearfaktoren als auch in reelle Linear- und (wenn nötig) quadratische Faktoren:

   (a) z^4+1, (b) z^3+1, (c) z^4-16.

10. Berechnen Sie die Summe und das Produkt aller komplexen Lösungen der Gleichung
$$z^n=1,\quad n\in\mathbb{N}.$$

11. Zeigen Sie, dass für $\alpha\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$ mit $\alpha,\ n\alpha\notin\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$ die Beziehung
$$\left(\frac{1+\mathbf{i}\tan\alpha}{1-\mathbf{i}\tan\alpha}\right)^n=\frac{1+\mathbf{i}\tan(n\alpha)}{1-\mathbf{i}\tan(n\alpha)}$$
    gilt.

12. Es seien $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $p(z_0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $p(\overline{z_0}) = 0$ gilt.

(**Z**) Lösen Sie die Gleichung $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$. Ermitteln Sie hieraus explizite Formeln für $\sin \frac{2\pi}{5}$ und $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Kapitel 2

Abbildungen und metrische Räume

2.1 Abbildungen, Relationen, Mächtigkeit von Mengen

Es seien A und B zwei nichtleere Mengen. Unter einer **Abbildung** oder **Funktion**

$$f : A \longrightarrow B\,,\ a \mapsto f(a)$$

von A nach B verstehen wir eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mittels der Vorschrift $b = f(a)$ zuordnet. Dabei heißt b **Bild** von a unter der Abbildung f, a **Urbild** von b bezüglich der Abbildung f. Ist $M \subset A$, so nennt man

$$f(M) := \{b \in B : \exists a \in M \text{ mit } f(a) = b\} = \{f(a) : a \in M\}$$

das **Bild der Menge** M unter der Abbildung f. Die Menge $f^{-1}(N) := \{a \in A : f(a) \in N\}$ nennen wir das (vollständige) **Urbild der Menge** $N \subset B$ unter der Abbildung f. Die Menge $\{(a, f(a)) : a \in A\}$ heißt **Graph** der Abbildung f.

Bemerkung 2.1 *Es ist möglich, dass $f^{-1}(N) = \emptyset$ gilt, obwohl N nicht leer ist. Für das Urbild einer einelementigen Menge vereinbaren wir die Schreibweise $f^{-1}(b)$ statt $f^{-1}(\{b\})$.*

Beispiel 2.2 *Die Abbildung $id_A : A \longrightarrow A$, $a \mapsto a$, d.h. $id_A(a) = a$ für alle $a \in A$, ist die identische Abbildung in A.*

Beispiel 2.3 *Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ nennt man* **Zahlenfolge** *und schreibt dafür auch $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit der Vereinbarung $z_n := f(n)$. Das Bild $f(\mathbb{N}) = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht zu verwechseln mit der Zahlenfolge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$!*

Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ nennt man

- **surjektiv**, wenn $f(A) = B$ gilt,
- **injektiv**, wenn aus $a_1, a_2 \in A$ und $f(a_1) = f(a_2)$ stets $a_1 = a_2$ folgt,
- **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Sind uns mehrere Abbildungen $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ und $h : C \longrightarrow D$ gegeben, so können wir diese miteinander verknüpfen. Z.B. ist $g \circ f : A \longrightarrow C$ definiert durch $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ $\forall a \in A$. Für diese Verknüpfung gilt das Assoziativgesetz: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Satz 2.4 *Für eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ existiert genau dann eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit den Eigenschaften $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$, wenn f bijektiv ist.*

Ist die Voraussetzung von Satz 2.4 erfüllt, so nennt man $g : B \longrightarrow A$ die **Umkehr-** oder **inverse Abbildung** bzw. **Funktion** zu $f : A \longrightarrow B$ und bezeichnet sie mit f^{-1}. Es gilt also $f^{-1}(f(a)) = a \ \forall a \in A$ und $f(f^{-1}(b)) = b \ \forall b \in B$.

Satz 2.5 *Sind die Abbildungen $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ bijektiv, so ist auch $g \circ f : A \longrightarrow C$ bijektiv, wobei $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ gilt.*

Beispiel 2.6 *Die Menge aller bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ der ersten n natürlichen Zahlen auf sich selbst, auch* **Permutationen** *der Ordnung n genannt, bezeichnen wir mit S_n. Wir verwenden dabei folgende Schreibweise: Ein $\sigma \in S_4$ schreiben wir in der Form*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

was ausführlich geschrieben

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 1, \quad \sigma(3) = 2 \quad \textit{und} \quad \sigma(4) = 4$$

bedeutet. Es gilt nun

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

was zeigt, dass die Verknüpfung "$\circ$" i.a. nicht kommutativ ist, auch wenn der Bildbereich B mit dem Urbildbereich A zusammenfällt.

Definition 2.7 *Zwei nichtleere Mengen A und B nennt man* **gleichmächtig**, *wenn eine bijektive Abbildung $f : A \longrightarrow B$ existiert (in Zeichen: $A \sim B$).*

Beispiel 2.8 *Die Menge der natürlichen Zahlen und die Menge der positiven geraden Zahlen sind gleichmächtig.*

Man nennt nun eine nichtleere Menge A

- **endlich**, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt,
- **unendlich**, wenn A nicht endlich ist,
- **abzählbar**, wenn $A \sim \mathbb{N}$ gilt,
- **überabzählbar**, wenn A weder endlich noch abzählbar ist,
- **höchstens abzählbar**, wenn A endlich oder abzählbar ist.

Satz 2.9 *Jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.*

Die abzählbaren Mengen sind also die "kleinsten" Mengen unendlicher Mächtigkeit.

Satz 2.10 *Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Folgerung 2.11 *Vereinigt man höchstens abzählbar viele höchstens abzählbare Mengen, so erhält man eine höchstens abzählbare Menge.*

Folgerung 2.12 *Sind A und B abzählbar, so auch $A \times B$.*

Folgerung 2.13 *Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Folgerung 2.14 *Ist die Menge A abzählbar, so ist auch A^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ abzählbar.*

Satz 2.15 *Die Menge $D := \{(x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \{0,1\} \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ der Zahlenfolgen aus Nullen und Einsen ist überabzählbar.*

Folgerung 2.16 *Da die Menge $\{(x_n)_{n=1}^\infty \in D : \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n = 0 \ \forall\, n \geq k\}$ abzählbar ist, ist die Menge der reellen Zahlen überabzählbar.*

Wir erinnern an folgende Begriffe (vgl. Vorl. "Lineare Algebra und Analytische Geometrie"): Unter einer **Relation** R auf einer nichtleeren Menge M versteht man eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Für $x, y \in M$ schreibt man xRy genau dann, wenn $(x,y) \in R$ gilt. Man nennt eine Relation $R \subset M \times M$

(r) **reflexiv**, wenn $(x,x) \in R \ \forall\, x \in M$,

(s) **symmetrisch**, wenn aus $(x,y) \in R$ folgt $(y,x) \in R$,

(t) **transitiv**, wenn aus $(x,y), (y,z) \in R$ folgt $(x,z) \in R$,

(a) **antisymmetrisch**, wenn aus $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$ folgt $x = y$.

Eine Relation auf M wird **Äquivalenzrelation** genannt, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Ist sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, so spricht man von einer **Ordnungsrelation**.

Ist $R \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation, so definiert man für $x \in M$ die zugehörige **Äquivalenzklasse** $[x]_R$ (oder auch nur mit $[x]$ bezeichnet) als die Menge

$$[x] := \{y \in M : (x,y) \in R\} .$$

Das Element $x \in M$ heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse $[x]$. Es gilt nun:

(A1) $[x] = [y] \Leftrightarrow (x,y) \in R$.

(A2) $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$.

(A3) Aus (A1) und (A2) folgt: Jedes $x \in M$ liegt in genau einer Äquivalenzklasse. Man sagt: Eine Äquivalenzrelation auf M erzeugt eine **Zerlegung** von M in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen, nämlich die Äquivalenzklassen. Eine solche Zerlegung wird auch **Partition** von M genannt.

Es gilt auch die Umkehrung:

(A4) Jede Partition P von M, d.h.

$$P \subset \mathcal{P}(M)\,, \ \emptyset \notin P\,, \ \bigcup_{A \in P} A = M \text{ und } A \cap B = \emptyset \text{ für } A, B \in P\,, \ A \neq B\,,$$

erzeugt eine Äquivalenzrelation R auf M, und zwar durch die Definition

$$xRy \iff_{\text{def}} \exists A \in P : x \in A \text{ und } y \in A\,.$$

Beispiel 2.17 *Es sei N eine beliebige nichtleere Menge. Die auf $M = \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}$ mittels Definition 2.7 erklärte Relation $A \sim B$ ist eine Äquivalenzrelation. Zu einer Äquivalenzklasse gehören dann jeweils die gleichmächtigen Teilmengen der Menge N.*

2.2 Übungsaufgaben

1. Geben Sie für folgende Situationen alle Abbildungen $f : I \to M$ an und entscheiden Sie, ob diese injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

   (a) $I = \{a_1, a_2\}, M = \{1, 2\}$, (b) $I = \{a\}, M = \{l, m, n\}$, (c) $I = \{a, b\}, M = \{3\}$.

2. Es sei in der Menge M der Wale (die einmal gelebt haben bzw. noch leben) eine Vorschrift $y = \gamma(x)$ gegeben durch

   (a) y ist Vater von x, (b) y ist Sohn von x, (c) y ist Großvater von x,

   (d) y ist älteste Tochter von x.

   Ist γ eine Funktion von M in M?

3. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \longrightarrow B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

   (a) $A = B = \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$
   (b) $A = \mathbb{R},\ B = [0, \infty),\ x \mapsto e^x$
   (c) $A = [0, \infty),\ B = \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$
   (d) $A = B = \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$
   (e) $A = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\},\ B = \mathbb{R},\ x \mapsto \tan x$
   (f) $A = B = \mathbb{N},\ n \mapsto n^2$
   (g) $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{Q},\ n \mapsto \frac{1}{n}$
   (h) $A = B = \mathbb{R},\ x \mapsto |2x - 4|$

   Geben Sie gegebenenfalls maximale Teilmengen A_1 und B_1 von A bzw. B an, so dass $f : A_1 \longrightarrow B_1$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B_1 \longrightarrow A_1$.

4. Es seien $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

   (a) Aus $A \subset B$ folgt $f(A) \subset f(B)$.
   (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   (c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   (d) Geben Sie ein Beispiel für $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ an.

5. Es sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (a) $f : X \longrightarrow Y$ ist injektiv.
   (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \forall\, A, B \subset X$.
   (c) **(HA)** Für alle Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.
   (d) $f^{-1}(f(A)) = A \quad \forall\, A \subset X$.
   (e) **(HA)** Für alle Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \supset B$ ist $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

6. Es seien $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $A \subset X$, $A_1, B_1 \subset Y$.

   (a) Überprüfen Sie die Inklusionen

   $$f(f^{-1}(A_1)) \subset A_1 \quad \text{und} \quad (\mathbf{HA})\ f^{-1}(f(A)) \supset A\,.$$

   Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass i.a. keine Gleichheit gilt.

(b) Untersuchen Sie die Gültigkeit der Beziehungen

$$f^{-1}(A_1 \cup B_1) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(B_1) \quad \text{und} \quad (\mathbf{HA})\ f^{-1}(A_1 \cap B_1) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(B_1).$$

7. Beweisen Sie: Sind $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ injektiv bzw. surjektiv, so gilt dies auch für $g \circ f : A \longrightarrow C$. Kann man für die entsprechenden Aussagen die Bedingungen an f und/oder g abschwächen?

8. Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ fest gewählt. Mit $\langle a, x\rangle$ bezeichnen wir das Skalarprodukt der Vektoren a und $x \in \mathbb{R}^3$. Ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \langle a, x\rangle\, x$ injektiv bzw. surjektiv?

9. Man zeige: Sind A überabzählbar und $B \subset A$ höchstens abzählbar, so ist $A \backslash B$ überabzählbar.

10. Sind folgende Mengen abzählbar
    (a) $M = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt[n]{m},\ m, n \in \mathbb{N}\}$ (b) Menge der Primzahlen,
    (c) die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, **(Z)** die Menge der algebraischen Zahlen.

11. Geben Sie eine Bijektion zwischen folgenden gleichmächtigen Mengen an !
    (a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, (b) $[a, b], [c, d]$, wobei $a < b$ und $c < d$, (c) $(-\infty, \infty), (0, \infty)$,
    (d) $(-\infty, \infty), (0, 1)$, (e) $[0, 1], (0, 1]$.

12. Gilt $[0, 1) \times [0, 1) \sim [0, 1)$? (Begründung)

13. Auf dem Mars steht ein Hotel mit unendlich vielen durchnumerierten Zimmern, welches voll belegt ist. (Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass jeder Gast sein eigenes Zimmer hat.)
    (a) Es kommen noch zwei Herren, die ebenfalls in diesem Hotel wohnen möchten. Ist dies möglich?
    (b) 1100 Gäste reisen ab. Kann der Manager dennoch seine Behauptung aufrecht erhalten, sein Hotel sei stets ausgebucht?
    (c) Abzählbar unendlich viele Gäste reisen an. Können diese noch untergebracht werden? Wenn ja, wie?
    (d) Derartige Hotels befinden sich in allen Sonnensystemen. Aufgrund einer Havarie im Kosmos müssen (abzählbar) unendlich viele geschlossen werden. Kann unser Hotel den dadurch entstandenen Zimmerbedarf decken?
    (e) Der Hotelmanager wird vom gastronomischen Zentrum gebeten, alle möglichen Zimmerbelegungen aufzuschreiben. Er schreibt unendlich viele durchnumerierte Varianten auf. Das gastronomische Zentrum ist jedoch nicht zufrieden. Warum?

14. Eine Schießscheibe habe die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 2. Sie werde fünf mal getroffen. Zeigen Sie, dass es zwei Einschüsse gibt, deren Abstand kleiner oder gleich 1 ist.

15. Es seien M eine beliebige nichtleere Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Gibt es eine Bijektion zwischen M und $\mathcal{P}(M)$?

16. Zeigen Sie, dass eine Menge genau dann unendlich ist, wenn sie zu einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig ist.

2.3 Metrische Räume, topologische Grundbegriffe

Definition 2.18 *Es seien* X *eine nichtleere Menge und* $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ *eine Abbildung. Man nennt* (X, d) *einen* **metrischen Raum***, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

(M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x) \;\forall\, x, y \in X$,

(M3) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y) \;\forall\, x, y, z \in X$.

Die Abbildung $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ *nennt man dann* **Abstand** *oder* **Metrik***.*

Beispiel 2.19 $(\mathbb{C}, d)$ *mit* $d(z, w) = |z - w|$ *und* $(\mathbb{C}^n, d_2)$, $n \in \mathbb{N}$, *mit*

$$d_2((z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|^2}$$

sind metrische Räume. Beachte: $(\mathbb{C}, d) = (\mathbb{C}^1, d_2)$.

Bemerkung 2.20 *Ist* $X_0 \subset X$ *eine nichtleere Teilmenge des metrischen Raumes* (X, d) , *so ist auch* (X_0, d_0) *mit* $d_0 = d|_{X_0 \times X_0}$ *ein metrischer Raum. Für* (X_0, d_0) *schreiben wir auch einfach nur* (X_0, d) .

Beispiel 2.21 *Es seien* d *und* d_2 *wie in Beispiel 2.19 definiert. Dann sind* $(\mathbb{R}, d)$ *und* $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $n \in \mathbb{N}$, *aber auch* $([0, 1), d)$, $(\mathbb{R}_+, d)$ *oder* $(\mathbb{T}, d)$ *mit dem Einheitskreis* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *metrische Räume.*

Im weiteren sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Elemente von X nennt man auch Punkte. Mit $U_\varepsilon(x_0)$, wobei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$, bezeichnen wir die (offene) ε-Umgebung des Punktes x_0 ,

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\} \;.$$

Diese Menge wird auch (offene) Kugel mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius ε genannt. Sei $A \subset X$. Die abgeschlossene Kugel mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius $r > 0$ bezeichnen wir mit $K_r(x_0)$,

$$K_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \le r\} \;.$$

Man nennt $x_0 \in X$ einen

- **Berührungspunkt** der Menge A , wenn $A \cap U_\varepsilon(x_0) \ne \emptyset \;\forall\, \varepsilon > 0$,
- **Häufungspunkt** der Menge A , wenn $A \cap \Big(U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\Big) \ne \emptyset \;\forall\, \varepsilon > 0$,
- **isolierten Punkt** der Menge A , wenn $\exists\, \varepsilon > 0 : A \cap U_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}$,
- **inneren Punkt** der Menge A , wenn $\exists\, \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \subset A$.

Offenbar ist $x_0 \in X$ genau dann Häufungspunkt der Menge $A \subset X$, wenn in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ unendlich viele Punkte von A liegen.

Mit $\overline{A}$ bezeichnen wir die Menge aller Berührungspunkte der Menge A - die **Abschließung** von A , mit $\mathrm{int}(A)$ die Menge aller inneren Punkte der Menge A - das **Innere** der Menge A . Ferner sei A' die Menge aller Häufungspunkte der Menge A , auch **Ableitung** der Menge A genannt.

Definition 2.22 *Eine Menge $A \subset X$ nennt man*

(a) **abgeschlossen**, *wenn* $\overline{A} = A$, *d.h.* $A' \subset A$,

(b) **offen**, *wenn* $\operatorname{int}(A) = A$,

(c) **perfekt**, *wenn* $A' = A$,

(d) **beschränkt**, *wenn eine Zahl $r > 0$ und ein $x_0 \in X$ existieren, so dass $A \subset U_r(x_0)$ gilt,*

(e) **dicht** *in* X, *wenn* $\overline{A} = X$.

Bemerkung 2.23 *Die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sind sowohl offen als auch abgeschlossen.*

Satz 2.24 *Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.*

(a) *Jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ ist eine offene Menge, jede Kugel $K_\varepsilon(x_0)$ ist abgeschlossen.*

(b) *A' ist abgeschlossen. Ist also A perfekt, so ist A abgeschlossen.*

(c) *A ist genau dann offen, wenn $X \setminus A$ abgeschlossen ist.*

(d) *Vereinigung und Durchschnitt endlich vieler offener (bzw. abgeschlossener) Mengen sind offen (bzw. abgeschlossen).*

(e) *Die Vereinigung (der Durchschnitt) beliebig vieler offener (abgeschlossener) Mengen ist offen (abgeschlossen).*

Beispiel 2.25 *Wir betrachten die in $(\mathbb{C}, d)$ offenen Mengen $G_n = U_{1+\frac{1}{n}}(0)$ und abgeschlossenen Mengen $F_n = K_{2-\frac{1}{n}}(0)$. Dann sind $K_1(0) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$* **nicht** *offen und $U_2(0) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$* **nicht** *abgeschlossen.*

Bemerkung 2.26 *Im Allgemeinen gilt* **nicht** $\overline{U_r(x_0)} = K_r(x_0)$.

Bemerkung 2.27 *Die Eigenschaft einer Teilmenge A eines metrischen Raumes X offen oder abgeschlossen zu sein, ist abhängig vom Raum X. Das Intervall $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ ist z.B. eine in $\mathbb{R}$ offene Menge, aber in $\mathbb{C}$ weder offen noch abgeschlossen.*

Beispiel 2.28 *Eine (komplexe) Zahlenfolge $(z_n)_{n=0}^\infty$ nennt man beschränkt, wenn ihr Wertebereich beschränkt ist, d.h., wenn $\sup\{|z_n| : n \in \mathbb{N}_0\} < \infty$ gilt. Die Menge aller beschränkten Zahlenfolgen bezeichnen wir mit ℓ^∞. Definiert man $d_\infty : \ell^\infty \times \ell^\infty \longrightarrow [0,\infty)$ durch*

$$d_\infty(z,w) = \sup\{|z_n - w_n| : n \in \mathbb{N}_0\}, \quad z = (z_n)_{n=0}^\infty, \ w = (w_n)_{n=0}^\infty,$$

so ist (ℓ^∞, d_∞) ein metrischer Raum.

Beispiel 2.29 (Intervallschachtelung) *Es seien $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $D := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. Dabei besteht D genau dann aus nur einer Zahl, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $b_{n_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon} < \varepsilon$ existiert.*

Definition 2.30 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Sind $A \subset X$ und $\{G_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ eine Familie offener Mengen $G_\alpha \subset X$, so nennt man diese Familie eine* **offene Überdeckung** *der Menge A, wenn $A \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} G_\alpha$ gilt. Die Menge A heißt* **kompakt**, *wenn zu jeder offenen Überdeckung $\{G_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ der Menge A eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h., es gibt endlich viele Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathcal{I}$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^m A_{\alpha_j}$.*

Im Weiteren werden wir, wenn nichts anderes gesagt wird, $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ oder Teilmengen dieser Mengen als metrische Räume mit der d_2-Metrik (vgl. Beispiel 2.19) betrachten.

Beispiel 2.31 *Das Intervall* $(0,1]$ *ist nicht kompakt.*

Beispiel 2.32 *Jedes abgeschlossene Intervall* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *ist kompakt.*

Satz 2.33 *Jede kompakte Menge ist abgeschlossen, und jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.*

Satz 2.34 *Es seien* $K_n \subset X$ *nichtleere kompakte Mengen mit* $K_{n+1} \subset K_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ *nichtleer.*

Satz 2.35 *Jede unendliche Teilmenge einer kompakten Menge* K *besitzt einen Häufungspunkt in* K .

Satz 2.36 *Für eine Teilmenge* $K \subset \mathbb{R}$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) K *ist kompakt.*

(b) K *ist abgeschlossen und beschränkt.*

(c) *Jede unendliche Teilmenge in* K *besitzt einen Häufungspunkt in* K .

Beispiel 2.37 *Jede abgeschlossene Kugel* $K_r(x)$, $x \in \ell^\infty$, $r > 0$, *ist nicht kompakt in* ℓ^∞ .

Man nennt zwei Teilmengen A und B eines metrischen Raumes (X,d) **getrennt**, wenn

$$A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$$

gilt. Z.B. sind $(-1,0) \subset \mathbb{R}$ und $(0,1) \subset \mathbb{R}$ getrennt, aber $(-1,0]$ und $(0,1)$ nicht, obwohl in beiden Fällen die zwei Mengen durchschnittsfremd sind. Eine Teilmenge $X_0 \subset X$ heißt **zusammenhängend**, wenn sie sich nicht als Vereinigung zweier nichtleerer getrennter Mengen darstellen lässt.

Satz 2.38 *Eine Teilmenge* $X_0 \subset \mathbb{R}$ *ist genau dann zusammenhängend, wenn aus* $x,y \in X_0$ *und* $x < z < y$ *folgt* $z \in X_0$.

Satz 2.39 *Jede nichtleere offene Menge* $A \subset \mathbb{R}$ *lässt sich als Vereinigung höchstens abzählbar vieler offener Intervalle darstellen.*

2.4 Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Im Weiteren seien (X, d_X) , (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume.

Definition 2.40 *Eine Abbildung* $f : X \longrightarrow Y$ *heißt* **stetig im Punkt** $x_0 \in X$, *wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert, so dass*

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0)$$

gilt, was gleichbedeutend mit $f\,(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$ *ist. Man nennt* f **stetig**, *wenn* f *in jedem Punkt* $x_0 \in X$ *stetig ist, und* **gleichmäßig stetig**, *wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert, so dass*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \quad \forall\, x_1, x_2 \in X \text{ mit } d_X(x_1, x_2) < \delta$$

gilt.

Beispiel 2.41 *Die Abbildung*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} : x \neq 0\,, \\ 0 : x = 0\,, \end{cases}$$

ist in $x_0 = 0$ *nicht stetig. Die Abbildung*

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} : x \neq 0\,, \\ 0 : x = 0\,, \end{cases}$$

ist in $x_0 = 0$ *stetig.*

Beispiel 2.42 *Die Abbildung* $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^{-1}$ *ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.*

Satz 2.43 *Sind* $f : X \longrightarrow Y$ *und* $g : Y \longrightarrow Z$ *in* $x_0 \in X$ *bzw.* $y_0 = f(x_0)$ *stetig, so ist auch* $g \circ f : X \longrightarrow Z$ *in* x_0 *stetig. Sind also* f *und* g *stetige Abbildungen, so gilt dies auch für* $g \circ f : X \longrightarrow Z$ *.*

Satz 2.44 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Die Abbildung* $f : X \longrightarrow Y$ *ist stetig.*

(b) *Das Urbild* $f^{-1}(A)$ *jeder offenen Menge* $A \subset Y$ *ist offen.*

(c) *Das Urbild* $f^{-1}(A)$ *jeder abgeschlossenen Menge* $A \subset Y$ *ist abgeschlossen.*

Im Beispiel 2.41 ist das vollständige Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\}$ bzgl. der Abbildung f gleich $f^{-1}(\{1\}) = \left\{\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^{-1} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ und somit nicht abgeschlossen, weil diese Menge ihren Häufungspunkt 0 nicht enthält. Die Abbildung $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \operatorname{sgn} x$ ist offenbar im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig, was man auch daran sieht, dass das vollständige Urbild der offenen Menge $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ gleich $h^{-1}(A) = \{0\}$ und somit nicht offen ist.

2.5 Übungsaufgaben

1. Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$|d(x,z) - d(y,w)| \le d(x,y) + d(z,w) \quad \forall\, x,y,z,w \in X$$

und

$$|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y) \quad \forall\, x,y,z \in X\,.$$

2. Zeigen Sie, dass folgende Räume (X,d) metrische Räume sind:

   (a) $X = \mathbb{C}^n\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ d(z,w) = d_\infty(z,w) := \max\{|z_k - w_k| : k = 1,\ldots,n\}$ mit $z = (z_1,\ldots,z_n)\,,\ w = (w_1,\ldots,w_n)\,,$

   (b) $X = \mathbb{C}^n\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ d(z,w) = d_1(z,w) := \sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|\,,$

   (c) $X = \mathbb{C}\,,\ d(z,w) = \sqrt{|z-w|}\,.$

3. Es seien (X,d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

   (a) **(HA)** Aus $A \subset B$ folgt $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) Es gilt $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Gilt auch $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}$?

(c) $\overline{A}$ ist abgeschlossen und $\operatorname{int}(A)$ ist offen.

(d) Der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen in X, die A umfassen, ist gleich der Abschließung von A, d.h.

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(A)} F\,, \text{ wobei } \mathcal{F}(A) = \left\{F \in \mathcal{P}(X) : A \subset F \text{ und } \overline{F} = F\right\} .$$

4. Zeigen Sie: Sind $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und $x = \sup A$, so ist $x \in \overline{A}$.

5. Zeigen Sie: Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist auch (X, d_1) mit

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ein metrischer Raum.

6. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $Z = X \times Y$. Zeigen Sie, dass dann auch (Z, d) ein metrischer Raum ist, wobei für $z_j = (x_j, y_j)$

   (a) $d(z_1, z_2) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$,

   (b) $d(z_1, z_2) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$,

   (c) **(HA)** $d(z_1, z_2) = \sqrt{[d_X(x_1, x_2)]^2 + [d_Y(y_1, y_2)]^2}$.

7. Finden Sie die Ableitung A', die Abschließung $\overline{A}$ und das Innere $\operatorname{int}(A)$ folgender Mengen $A \subset \mathbb{R}$:

   (a) $A = \mathbb{N}$, (b) $A = (0, 1) \cup (1, 2)$, (c) $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

   (d) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{2n}{n+1}\right\}$, (e) **(HA)** $A = \left\{\frac{2n-3}{3n+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

8. Zeigen Sie, dass $X_0 \subset X$ genau dann zusammenhängend ist, wenn keine zwei offenen Mengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$, $A \cap X_0 \neq \emptyset$, $B \cap X_0 \neq \emptyset$ und $X_0 \subset A \cup B$ existieren.

9. Untersuchen Sie, ob folgende Mengen in $\mathbb{R}$ abgeschlossen, offen, beschränkt, perfekt, kompakt oder zusammenhängend sind:

   (a) $\mathbb{N}$, (b) $\left\{\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, (c) $(0, 1]$, (d) $[0, 1]$, (e) $[0, 1] \cup \{2\}$.

10. (a) Es seien $A = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ und $U_n = \left(\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, und $U_0 = (-\varepsilon, \varepsilon)$ für ein gewisses $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Wählen Sie aus der Überdeckung $\{U_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ von A eine endliche Teilüberdeckung aus.

    (b) Kann man aus der Überdeckung $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ von $B = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ eine endliche Teilüberdeckung auswählen?

11. Wir betrachten die Teilmenge $A = \left\{r \in \mathbb{Q} : 2 < r^2 < 3\right\}$ des metrischen Raumes $(\mathbb{Q}, d)$ mit $d(r, s) = |r - s|$. Zeigen Sie, dass A in $\mathbb{Q}$ offen, abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist. Ist die Menge $B = \left\{r^2 : r \in \mathbb{Q},\, 2 \le r \le 3\right\}$ in $\mathbb{Q}$ abgeschlossen?

12. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie:

    (a) Zwei disjunkte abgeschlossene Mengen sind getrennt.

    (b) Zwei disjunkte offene Mengen sind getrennt.

(c) **(HA)** $U_r(x_0)$ und $X \setminus K_r(x_0)$ sind getrennt, wobei $x_0 \in X$, $r > 0$.

(Z1) Zeigen Sie, dass jede nichtleere perfekte Teilmenge der Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist.

(Z2) Zeigen Sie, dass die Menge aller reellen Zahlen aus $[0,1]$, bei denen in irgendeiner Dezimalbruchdarstellung die Ziffer 7 nicht vorkommt, perfekt ist.

(Z3) Wir schreiben die abzählbare Menge der rationalen Zahlen als Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, d.h. $\mathbb{Q} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, und definieren $U_n = (x_n - 2^{-n}, x_n + 2^{-n})$. Dann ist $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{Q}$. Ist dies auch Überdeckung von $\mathbb{R}$?

Kapitel 3

Punktfolgen in metrischen Räumen

3.1 Konvergente Punktfolgen

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Unter einer **Punktfolge** in diesem metrischen Raum verstehen wir eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$, $n \mapsto f(n)$ und schreiben dafür kurz $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n := f(n)$. Im Spezialfall $X \subset \mathbb{C}$ sprechen wir von einer **Zahlenfolge**. Die Punktfolge $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ nennt man **Teilfolge** der Punktfolge $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$, wenn $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ gilt. Wir nennen eine Punktfolge $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ **beschränkt**, wenn die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Der Punkt $x^* \in X$ heißt **Grenzwert** der Punktfolge $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x_n, x^*) < \varepsilon \;\forall\, n \geq n_0$ gilt (in Zeichen: $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ oder $x_n \longrightarrow x^*$). Die Punktfolge $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ nennt man **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert besitzt, sonst **divergent**.

Beispiel 3.1 *Die Zahlenfolge* $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(n^{-1}e^{\mathbf{i}\pi n/4}\right)_{n=1}^{\infty}$ *ist konvergent,* $\left(y_n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(e^{\mathbf{i}\pi n/4}\right)_{n=1}^{\infty}$ *aber nicht. Die Teilfolgen* $\left(y_{8k}\right)_{k=1}^{\infty}$, $\left(y_{8k+1}\right)_{k=1}^{\infty}$, $\left(y_{8k+2}\right)_{k=1}^{\infty}$ $\ldots$ $\left(y_{8k+7}\right)_{k=1}^{\infty}$ *sind konvergent.*

Die Grenzwerte von Teilfolgen einer Punktfolge $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ nennt man **partielle Grenzwerte** der Punktfolge $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$.

Satz 3.2 *Es sei X ein metrischer Raum.*

(a) *Eine konvergente Punktfolge besitzt genau einen Grenzwert und jede ihrer Teilfolgen ist konvergent mit dem gleichen Grenzwert.*

(b) *Jede konvergente Punktfolge ist beschränkt.*

(c) *Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Berührungspunkt der Menge $A \subset X$, wenn eine Punktfolge $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in A \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert.*

(d) *Ist $K \subset X$ kompakt, so besitzt jede Punktfolge $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in K \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ eine konvergente Teilfolge.*

Satz 3.3 *Die Menge $K \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn jede Punktfolge $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in K$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ eine in K konvergente Teilfolge besitzt.*

Definition 3.4 *Eine Punktfolge $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ nennt man* **Fundamentalfolge** *oder* **Cauchy-Folge**, *wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon \;\forall\, m, n \geq n_0$ gilt.*

Folgerung 3.5 *Jede Cauchy-Folge ist beschränkt und jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge. Eine Cauchy-Folge ist genau dann konvergent, wenn eine ihrer Teilfolgen konvergiert.*

Definition 3.6 *Ein metrischer Raum heißt* **vollständig**, *wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergent ist.*

Beispiel 3.7 *Der metrische Raum der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ *ist vollständig, sein Teilraum* $\mathbb{Q}$ *der rationalen Zahlen dagegen nicht.*

Satz 3.8 *Jeder abgeschlossene Teilraum eines vollständigen metrischen Raumes ist vollständig. Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.*

3.2 Zahlenfolgen

Eine Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$ nennt man **Nullfolge**, wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt. Offenbar ist eine Zahlenfolge genau dann konvergent gegen $x^* \in \mathbb{C}$, wenn $(x_n - x^*)_{n=1}^\infty$ eine Nullfolge ist. Die Menge aller Nullfolgen bezeichnet man mit c_0, die Menge aller konvergenten Zahlenfolgen mit c. Die Menge aller Zahlenfolgen wird mit s bezeichnet. Nach Satz 3.2,(b) gilt offenbar $c_0 \subset c \subset \ell^\infty \subset s$ (vgl. Beispiel 2.28). Aus dem Archimedes'schen Prinzip Satz 1.12 folgt, dass $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^\infty$ eine Nullfolge ist.

Folgerung 3.9 *Aus* $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \in c_0$ *und* $(z_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ *folgt* $(x_n \pm y_n)_{n=1}^\infty \in c_0$ *und* $(x_n z_n)_{n=1}^\infty \in c_0$.

Satz 3.10 *Es seien* $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \in c$ *mit* $x_n \longrightarrow x$ *und* $y_n \longrightarrow y$.

(a) *Dann gilt*

  (a1) $(x_n \pm y_n)_{n=1}^\infty \in c$ *mit* $x_n \pm y_n \longrightarrow x \pm y$,

  (a2) $(x_n y_n)_{n=1}^\infty \in c$ *mit* $x_n y_n \longrightarrow xy$,

  (a3) $\dfrac{x_n}{y_n} \longrightarrow \dfrac{x}{y}$, *falls* $y \neq 0$.

(b) *Aus* $x_n \le y_n \ \forall\, n \ge n_0$ *folgt* $x \le y$.

(c) *Aus* $x_n \le z_n \le y_n \ \forall\, n \ge n_0$ *und* $x = y$ *folgt* $(z_n)_{n=1}^\infty \in c$ *mit* $z_n \longrightarrow x$.

Beispiel 3.11 *Wir bestimmen folgende Grenzwerte:*

(a) $\lim_{n\to\infty} w^n = 0 \quad \forall\, w \in U_1(0)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall\, a > 0$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$.

Wir bemerken, dass $(w^n)_{n=1}^\infty \in c$ *genau dann gilt, wenn* $w \in U_1(0) \cup \{1\}$ *erfüllt ist.*

Gilt $x_n \le x_{n+1} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, so nennt man die (reelle) Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$ **monoton nicht fallend**, im Fall $x_n < x_{n+1} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ **monoton wachsend**. Entsprechend definiert man **monoton nicht wachsend** und **monoton fallend**. Man nennt eine (reelle) Zahlenfolge **monoton**, wenn sie eine dieser vier Eigenschaften hat.

Satz 3.12 *Eine monotone Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.*

Beispiel 3.13 *Es gilt* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{w^n}{n!} = 0$ *für alle* $w \in \mathbb{C}$.

Beispiel 3.14 *Wir betrachten die durch* $0 < x_1 < 1$ *und* $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *definierte Zahlenfolge* $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Beispiel 3.15 *Die Folgen* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^\infty$ *und* $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_{n=1}^\infty$ *sind monoton und beschränkt. Sie haben den gleichen Grenzwert, die* **Eulersche Zahl** e,

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045\ldots$$

Hat eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$ die Eigenschaft, dass für jedes $R > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n > R \;\forall\, n \geq n_0$ gilt, so sagen wir, dass $(x_n)_{n=1}^\infty$ **bestimmt divergiert** gegen $+\infty$, und schreiben dafür $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Analog definiert man $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Satz 3.16 *Unter allen partiellen Grenzwerten einer reellen Zahlenfolge gibt es einen größten und einen kleinsten, wobei auch $\pm\infty$ als partielle Grenzwerte zugelassen sind.*

Bemerkung 3.17 *Aus dem Beweis von Satz 3.16 ist ersichtlich, dass der größte partielle Grenzwert x^* und der kleinste partielle Grenzwert x_* einer reellen Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$ den Formeln*

$$x^* = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} \quad \text{und} \quad x_* = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k; k \geq n\}$$

genügen, weshalb man auch $x^* = \limsup_{n\to\infty} x_n$ (limes superior) und $x_* = \liminf_{n\to\infty} x_n$ (limes inferior) schreibt. Eine andere Schreibweise ist $x^* = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ bzw. $x_* = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. Außerdem gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : x_* - \varepsilon < x_n < x^* + \varepsilon \;\forall\, n \geq n_0 .$$

Offenbar ist eine reelle Zahlenfolge genau dann konvergent, wenn ihr kleinster und ihr größter partieller Grenzwert endlich und gleich sind.

Beispiel 3.18 *Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt.*

Satz 3.19 (Satz von Stolz) *Es seien $(x_n)_{n=1}^\infty$ und $(y_n)_{n=1}^\infty$ zwei Zahlenfolgen mit*

$$y_{n+1} > y_n \;\forall\, n \geq n_0 , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = a ,$$

wobei $a = \pm\infty$ zugelassen ist. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

Beispiel 3.20 *Wir zeigen, dass für $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{1+k} .$$

Beispiel 3.21 *Sind $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Zahlenfolge und $\lim_{n\to\infty} a_n = a^*$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a^* .$$

3.3 Punktfolgen und stetige Abbildungen

Satz 3.22 *Es seien X und Y metrische Räume sowie $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.*

(a) *Die Abbildung f ist genau dann stetig in $x^* \in X$, wenn aus $x_n \in X \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*)$.*

(b) *Sind X kompakt und $f : X \longrightarrow Y$ stetig, so ist f auf X gleichmäßig stetig.*

(c) *Sind X kompakt und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existieren $x_1^*, x_2^* \in X$ mit $f(x_1^*) \le f(x) \le f(x_2^*)$ $\forall\, x \in X$.*

(d) *Sind $f : X \longrightarrow Y$ stetig und $X_0 \subset X$ zusammenhängend, so ist auch $f(X_0)$ zusammenhängend.*

Definition 3.23 *Es seien X und Y metrische Räume sowie $A \subset X$ und $f : A \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Man sagt, dass die Abbildung f im Punkt $a \in A'$ den* **Grenzwert** *$y^* \in Y$ hat (in Zeichen: $y^* = \lim_{x \longrightarrow a} f(x)$), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$d_Y(f(x), y^*) < \varepsilon \quad \forall\, x \in A \cap U_\delta(a) \setminus \{a\}$$

gilt. Im Fall $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ schreiben wir $y^* = \lim_{x \to \infty} f(x)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$d_Y(f(x), y^*) < \varepsilon \quad \forall\, x \ge x_0$$

gilt. Analog definiert man $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Es ist nun klar, was man im Fall $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ unter $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ oder im Fall $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unter $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ zu verstehen hat.

Beispiel 3.24 *Wir zeigen, dass $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ gilt.*

Folgerung 3.25 *Die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig in $x^* \in X$, wenn f in x^* einen Grenzwert besitzt und $\lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*)$ gilt.*

Folgerung 3.26 *Die Abbildung $f : A \subset X \longrightarrow Y$ hat in $a \in A'$ genau dann den Grenzwert $y^* \in Y$, wenn für jede Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$ mit $x_n \in A \setminus \{a\}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y^*$.*

Im Weiteren bezeichne I ein beliebiges Intervall reeller Zahlen.

Satz 3.27 (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen) *Es seien $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie $x_1, x_2 \in I$ und $f(x_1) < y < f(x_2)$. Dann existiert ein x zwischen x_1 und x_2 mit $f(x) = y$.*

Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ nennt man **monoton nicht fallend** bzw. **monoton wachsend**, wenn aus $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \le f(x_2)$ bzw. $f(x_1) < f(x_2)$ folgt. Analog definiert man **monoton nicht wachsende** bzw. **monoton fallende** Funktionen. Hat eine Funktion eine dieser Eigenschaften, so heißt sie **monoton**.

Ist $x_0 \in I$ nicht rechter Randpunkt von I, so kann man in x_0 den rechtseitigen Grenzwert $y_0 = f(x_0 + 0)$ einer Funktion $f : I \longrightarrow Y$ definieren: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$ $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I$. Man schreibt dann auch $y_0 = \lim_{x \longrightarrow x_0 + 0} f(x)$. Analog definiert man $f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Ist $x_0 \in \operatorname{int}(I)$ eine Unstetigkeitsstelle der Funktion $f : I \longrightarrow Y$, so nennt man diese eine **Unstetigkeitsstelle 1. Art**, wenn die einseitigen Grenzwerte $f(x_0+0)$ und $f(x_0-0)$ existieren. Sonst heißt x_0 **Unstetigkeitsstelle 2. Art**.

Satz 3.28 *Eine monotone Funktion $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ($a = -\infty$ und $b = +\infty$ sind zugelassen) besitzt nur Unstetigkeitsstellen 1. Art. Sie ist genau dann stetig, wenn $f((a, b))$ zusammenhängend ist.*

Folgerung 3.29 *Eine monotone Funktion $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.*

Folgerung 3.30 *Folgende Abbildungen sind stetig:*

(a) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto a^x$ *für fixiertes* $a > 0\,.$

(b) $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^\lambda$ *für fixiertes* $\lambda \in \mathbb{R}\,,$

(c) $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \log_a x$ *für fixiertes* $a > 0\,,\ a \neq 1\,.$

Zu (b)*: Im Fall* $\lambda > 0$ *kann man auch die Stetigkeit von* $[0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^\lambda$ *zeigen.*

Beispiel 3.31 *Wir zeigen, dass* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt.*

Wir bemerken, dass eine Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$ genau dann gegen x^* konvergiert, wenn die reelle Zahlenfolge $(d(x_n, x^*))_{n=1}^\infty$ eine Nullfolge ist.

Folgerung 3.32 *Für eine Zahlenfolge* $(z_n)_{n=1}^\infty$ *gilt* $z_n \longrightarrow z^*$ *genau dann, wenn* $\mathsf{Re}\, z_n \longrightarrow \mathsf{Re}\, z^*$ *und* $\mathsf{Im}\, z_n \longrightarrow \mathsf{Im}\, z^*$ *erfüll sind.*

Folgerung 3.33 *Die Konvergenz in* $\mathbb{C}^k$ *und* $\mathbb{R}^k$ *ist die koordinatenweise Konvergenz. Diese Räume sind vollständige metrische Räume. Eine Teilmenge dieser Räume ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist (vgl. Satz 2.33 und Satz 2.36). Man beachte dabei, dass in jedem metrischen Raum gilt, dass eine kompakte Menge beschränkt ist, da sie durch endlich viele offene Kugeln vom Radius 1 überdeckt werden kann (vgl. auch den Beweis von Satz 2.36).*

Unter Verwendung von Satz 3.10, Folgerung 3.33 und Satz 3.22(a) erhalten wir

Folgerung 3.34 *Folgende Abbildungen sind stetig:*

(a) $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ (z, w) \mapsto z \pm w\,,$

(b) $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ (z, w) \mapsto zw\,,$

(c) $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ (z, w) \mapsto \dfrac{z}{w}\,,$

(d) $\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ z \mapsto z^{-1}\,,$

(e) $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ z \mapsto \lambda z$ *für fixiertes* $\lambda \in \mathbb{C}\,.$

Folgerung 3.35 *Sind* X *ein metrischer Raum und* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *in* $x_0 \in X$ *stetige Abbildungen, so sind auch folgende Abbildungen in* x_0 *stetig:*

(a) $f \pm g : X \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ x \mapsto f(x) \pm g(x)\,,$

(b) $fg : X \mapsto \mathbb{C}\,,\ x \mapsto f(x)g(x)\,,$

(c) $f/g : U_\delta(x_0) \mapsto \mathbb{C}\,,\ x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$*, falls* $g(x_0) \neq 0$ *und* $\delta > 0$ *hinreichend klein,*

(d) $\lambda f : X \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ x \mapsto \lambda f(x)$ *für fixiertes* $\lambda \in \mathbb{C}\,.$

Die Aussagen (a) und (d) zeigen, dass der Raum $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ der auf X definierten komplexwertigen und stetigen Funktionen ein linearer Raum über dem Körper der komplexen Zahlen ist. Dabei sind die algebraischen Operationen wie folgt erklärt:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)\,, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)\,, \quad x \in X\,,\ \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Folgerung 3.36 *Folgende Abbildungen sind stetig:*

(a) $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *für fixierte* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $a_k \in \mathbb{C}$,

(b) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \sin(x)$ *und* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \cos(x)$.

3.4 Übungsaufgaben

1. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zeigen Sie:

   (a) Eine Punktfolge $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ von Punkten aus $Z = X \times Y$ konvergiert genau dann in einer der Metriken aus Aufgabe 6 der 6. Übung, wenn sie in den anderen zwei Metriken konvergiert.

   (b) Die Abbildung $d_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, wobei man $X \times X$ mit jeder der Metriken d aus Aufgabe 6 der 6. Übung für $Y = X$ versehen kann.

   (c) **(HA)** Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn aus $x_n \in A\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ folgt $x^* \in A$ (vgl. Satz 3.2(c) der Vorlesung).

2. **(HA)** Ermitteln Sie die Grenzwerte nachstehender Folgen und diskutieren Sie die unterschiedlichen Annäherungen an diese Grenzwerte (Skizze):

   (a) $x_n = \frac{1}{n}$ (b) $x_n = -\frac{1}{n}$ (c) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (d) $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$

   (e) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ (f) $z_n = \frac{1+\mathbf{i}}{n}$ (g) $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\mathbf{i})\right)^n$

3. Für folgende Zahlenfolgen sind Zahlen a und $N(\varepsilon)$ zu finden, so dass $|x_n - a| < \varepsilon\ \forall\, n > N(\varepsilon)$ und $\forall\, \varepsilon > 0$ gilt.

   (a) $x_n = \frac{n}{n^3+n^2+1}$ (b) **(HA)** $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) $x_n = \frac{1+\sqrt{n}}{n^3}$ (d) **(HA)** $x_n = \frac{\sin n}{2+\sqrt[3]{n^5}}$

   (e) $x_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$ (f) $x_n = \frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ (g) $z_n = \frac{1}{n} + 25\mathbf{i}$ (h) $z_n = \left(\frac{\mathbf{i}}{n}\right)^n$

   (i) **(HA)** $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 1)$ (j) **(HA)** $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^4$ (k) **(HA)** $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\mathbf{i})\right)^n$

4. Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

   (a) $x_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}$ (b) $x_n = a^{\frac{1}{n}}$ $(a > 0)$ (c) $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

   (d) $x_n = \frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ (e) $x_n = (n+1)^k - n^k$ $(0 < k < 1)$

(f) $x_n = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i n^i}{\sum\limits_{i=0}^{j} b_i n^i}$ $(k, j \in \mathbb{N},\, a_i \in \mathbb{C},\, a_k \neq 0, b_j \neq 0)$ (g) $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(h) **(HA)** $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$ (i) $x_n = \sqrt[n]{4^n + 3^n + 2^n}$

(j) $x_n = (1+n)^{\frac{1}{n}}$ (k) **(HA)** $x_n = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^n\right)^{\frac{1}{n}}$ $(a_i > 0)$

(l) $x_n = \dfrac{\log_a n}{n}$ $(a > 1)$ (m) **(HA)** $x_n = \dfrac{3n^2 + \sqrt{n^3+2}}{n^2 - n + 1}$ (n) $x_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

(o) **(HA)** $x_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$ (p) **(HA)** $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n} - n}$

(q) **(HA)** $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ (r) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (s) $x_n = n - \sqrt[3]{n^3 - 1}$ (t) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(u) **(HA)** $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$ (v) $x_n = \left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)^n$ $(a \in \mathbb{R})$

5. FÃ$\frac{1}{4}$r welche $z \in \mathbb{C}$ existieren die Grenzwerte

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n z^n$, (b) **(HA)** $\lim\limits_{n\to\infty} n! z^n$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n}$?

6. Verwenden Sie die binomische Formel, um zu zeigen, dass

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

   gilt, und berechnen Sie damit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

7. Ermitteln Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen:

   (a) $x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$ $(c > 0)$

   (b) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}_0,\, a > 0,\, x_0 > 0)$

8. Beweisen Sie:

   (a) Aus $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \longrightarrow a$ und $a > p$ folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n > p$ $\forall\, n \geq n_0$.

   (b) Aus $x_n \in \mathbb{R}$, $b = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ und $b < q$ folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n < q$ $\forall\, n \geq n_0$.

9. **(HA)** Formulieren Sie eine zu 8.(b) analoge Aussage für den Limes Inferior.

10. Man bestimme $\underline{\lim}\, x_n$ und $\overline{\lim}\, x_n$:

   (a) $x_n = (-1)^n(2 + \dfrac{3}{n})$ (b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$ (c) $x_n = n^{(-1)^n}$

   (d) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$ (e) **(HA)** $x_n = \dfrac{n^2}{1+n^2} \cos \dfrac{2n\pi}{3}$ (f) **(HA)** $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k$

   (g) **(HA)** $x_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{2n} + \cos(n\pi)$

11. Es seien $(x)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ reelle und beschränkte Zahlenfolgen. Man zeige, dass dann gilt:

    (a) $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \le \underline{\lim}\, (x_n + y_n) \le \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$,

    (b) **(HA)** $\underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \le \overline{\lim}\, (x_n + y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$,

    (c) $\underline{\lim}\, x_n \cdot \underline{\lim}\, y_n \le \underline{\lim}\, (x_n y_n) \le \underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$, falls $x_n \ge 0$, $y_n \ge 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$,

    (d) **(HA)** $\underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n \le \overline{\lim}\, (x_n y_n) \le \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$, falls $x_n \ge 0$, $y_n \ge 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

12. Zeigen Sie: Gilt $x_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, \frac{1}{x_n} = 1$, so ist $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent.

13. Untersuchen Sie mit der Definition 3.4 der Vorlesung, ob folgende Zahlenfolgen Cauchy-Folgen sind:

    (a) $x_n = \dfrac{1}{n}$, (b) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, (c) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3.5 Zahlenreihen

Definition 3.37 *Für eine beliebige Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definieren wir*

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt **Zahlenreihe** *oder auch nur* **Reihe** *und wird mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{oder} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

bezeichnet. Man nennt s_n die n-te **Partialsumme** *der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Diese Reihe heißt* **konvergent**, *falls die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ der Partialsummen konvergiert, andernfalls* **divergent**. *Gilt $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, so schreibt man auch*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

und nennt s die **Summe** *der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Natürlich sind auch andere Indizierungen, wie z.B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,,$$

möglich.

Beispiel 3.38 *Aus Beispiel 3.15 folgt $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Dabei gilt*

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!\, n}\,.$$

Hieraus kann man schließen, dass e eine irrationale Zahl ist.

Folgerung 3.39

1. **Notwendiges Konvergenzkriterium**: *Ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent, so ist* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Nullfolge.*

2. **Cauchysches Konvergenzkriterium**: *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein Index* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$\left| \sum_{k=n}^{n+\ell} a_k \right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ *und für alle* $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ *gilt (vgl. Beispiel 3.7 und Folgerung 3.33).*

3. **Monotoniekriterium**: *Gilt* $a_n \geq 0 \; \forall \, n \geq n_0$, *so konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *genau dann, wenn die Folge* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *der Partialsummen nach oben beschränkt ist (vgl. Satz 3.12).*

4. *Aus den Regeln über das Rechnen mit Grenzwerten von Zahlenfolgen (siehe Satz 3.10) ergibt sich: Sind* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergente Reihen mit den Summen* a *und* b, *so sind auch die Reihen* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma\, a_n)$ *konvergent, wobei*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = a + b \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\gamma\, a_n) = \gamma\, a$$

gilt und γ *eine beliebige komplexe Zahl sein kann.*

Beispiel 3.40 *Für* $z \in \mathbb{C}$ *betrachten wir die* **geometrische Reihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots\,,$$

d.h. $a_n = z^n$ *und, falls* $z \neq 1$,

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\,,$$

also

$$s = \lim s_n = \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \forall\, z \in U_1(0)$$

(vgl. Beispiel 3.11,(a)). Für $|z| \geq 1$ *divergiert diese Reihe, weil das notwendige Konvergenzkriterium (vgl. Folgerung 3.39) verletzt ist.*

Beispiel 3.41 *Für die* **harmonische Reihe**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

betrachten wir die Teilfolge $\{s_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$ *der Folge der Partialsummen. Es gilt*

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} \\ &= 1+k\cdot\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

woraus $\lim\limits_{k\to\infty} s_{2^k} = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ *folgt. Die harmonische Reihe ist also divergent. Wir könnten auch*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

schreiben.

Beispiel 3.42 (Die Leibniz-Reihe) *Wir untersuchen die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots$$

auf Konvergenz und betrachten zuerst $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ *. Es gilt*

$$s_{2k}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)<s_{2(k+1)}\,.$$

Also ist die Folge $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ *monoton wachsend. Die Folge* $\{s_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ *ist wegen*

$$s_{2k+1}=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

monoton fallend. Ferner gilt $s_{2k+1}>s_{2k}$ *und*

$$s_{2k+1}-s_{2k}=\frac{1}{2k+1}\longrightarrow 0 \quad (k\in\mathbb{N})\,.$$

Somit sind beide Folgen konvergent und haben den gleichen Grenzwert, womit die Konvergenz der Leibniz-Reihe gezeigt ist.

Ersetzt man im vorhergehenden Beispiel $\frac{1}{n}$ durch a_n , so kann man völlig analog folgendes Konvergenzkriterium beweisen.

Satz 3.43 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen) *Ist* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine monoton nicht wachsende Nullfolge aus nichtnegativen Zahlen, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\,.$$

Definition 3.44 *Die Zahlenreihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *nennt man* **absolut konvergent**, *wenn die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *konvergiert. Anderenfalls heißt sie* **bedingt konvergent**.

Aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium (vgl. Folgerung 3.39) folgt, dass jede absulut konvergente Reihe auch konvergent ist. Nach den Beispielen 3.41 und 3.42 ist die Leibniz-Reihe bedingt konvergent.

Folgerung 3.45 *Gilt* $|a_n| \le b_n \;\forall\, n \ge n_0$ *und konvergiert die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *so folgt aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium, dass die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergiert.*

Satz 3.46 (Verdichtungssatz) *Es seien* $a_n \ge 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ *und* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton nicht wachsend. Dann konvergiert die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *genau dann, wenn die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *konvergiert.*

Beispiel 3.47 (Verallg. harm. Reihen) *Die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *konvergiert genau dann, wenn* $\alpha > 1$ *gilt.*

Satz 3.48 (Wurzelkriterium) *Es seien* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Zahlenfolge und* $\rho = \displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert, falls* $\rho < 1$, *und divergiert, falls* $\rho > 1$.

Satz 3.49 (Quotientenkriterium) *Es seien* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Zahlenfolge mit* $a_n \ne 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$. *Die Zahlenreihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert, falls* $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ *gilt, und divergiert, falls ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass* $\displaystyle\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1 \;\forall\, n \ge n_0$.

Beispiel 3.50 *Aus Satz 3.49 folgt, dass die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *konvergiert.*

Beispiel 3.51 *Auf die Reihen*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \ldots$$

ist das Wurzelkriterium anwendbar, das Quotientenkriterium dagegen nicht.

Satz 3.52 *Für jede Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *positiver Zahlen gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Beispiel 3.53 *Es seien* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge komplexer Zahlen,* $z_0 \in \mathbb{C}$ *und* $\alpha = \displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Setzen wir*

$$r = \begin{cases} \alpha^{-1} & : \quad 0 < \alpha < \infty, \\ \infty & : \quad \alpha = 0, \\ 0 & : \quad \alpha = \infty, \end{cases}$$

so liefert die Anwendung des Wurzelkriteriums (Satz 3.48) auf die sog. **Potenzreihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

dass diese Reihe für $|z-z_0|<r$ konvergiert und für $|z-z_0|>r$ divergiert. Den Kreis $U_r(z_0)$ nennt man den **Konvergenzkreis** *und r den* **Konvergenzradius** *dieser Potenzreihe.*

Satz 3.54 *Es seien $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ zwei Zahlenfolgen sowie $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Sind die Folge $(A_n b_{n+1})_{n=1}^\infty$ und die Reihe $\sum_{n=1}^\infty A_n(b_n - b_{n+1})$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$.*
2. **Abelsches Kriterium**: *Sind die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent und die Folge $(b_n)_{n=1}^\infty$ monoton und beschränkt, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$.*
3. **Dirichletsches Kriterium**: *Ist die Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ beschränkt und ist die Folge $(b_n)_{n=1}^\infty$ eine monotone Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$.*

Beispiel 3.55 *Mit $a_n = (-1)^{n+1}$ folgt aus dem Dirichlet-Kriterium das Leibnizkriterium (Satz 3.43).*

Beispiel 3.56 *Es sei $(b_n)_{n=0}^\infty$ eine monotone Nullfolge. Für $z \in K_1(0)\backslash 1$ setzen wir im Dirichlet-Kriterium $a_n = z^n$ und erhalten*

$$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^n z^n\right| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \le \frac{2}{|1-z|}\,.$$

Also konvergiert die Potenzreihe (vgl. Beispiel 3.53) $\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ mindestens für alle $z \in K_1(0) \setminus 1$.

Satz 3.57 (Umordnung absolut konvergenter Reihen) *Es seien $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^\infty a_{f(n)} = \sum_{n=1}^\infty a_n\,.$$

Beispiel 3.58 *Wir betrachten die Leibniz-Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ mit $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Aus den Überlegungen in Beispiel 3.42 folgt, dass*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^\infty a_n$$

eine positive endliche Zahl ist, wobei $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Für die Bijektion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$n \mapsto \begin{cases} 2k-1 & : \quad n = 3k-2, \quad k \in \mathbb{N}\,, \\ 4k-2 & : \quad n = 3k-1, \quad k \in \mathbb{N}\,, \\ 4k & : \quad n = 3k, \quad k \in \mathbb{N}\,, \end{cases}$$

erhalten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \cdots ,$$

deren Partialsummen wir mit s'_n *bezeichnen. Dann ist*

$$\begin{aligned} s'_{3m} &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2}\, s_{2m} \longrightarrow \frac{1}{2}\, s \quad (m \in \mathbb{N}) . \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$s'_{3m-1} = s_{3m} + \frac{1}{4m} \longrightarrow \frac{1}{2}\, s \quad \text{und} \quad s'_{3m-2} = s'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2} \longrightarrow \frac{1}{2}\, s \quad (m \in \mathbb{N}) ,$$

so dass die Summe der umgeordneten Reihe gleich $\lim s'_n = \frac{1}{2}\, s$ *ist.*

Satz 3.59 (Riemannscher Umordnungssatz) *Es seien* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine bedingt konvergente Reihe reeller Zahlen und* $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *beliebig. Dann existiert eine Bijektion* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft*

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} .$$

Satz 3.60 (Cauchy-Produkt von Reihen) *Es seien* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergente Reihen mit den Summen* a *und* b *, wobei wenigstens eine der Reihen absolut konvergent ist. Dann ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *mit*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

konvergent, wobei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = a \cdot b$ *gilt.*

Beispiel 3.61 *Die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *konvergiert für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *absolut (siehe Beispiel 3.50)). Wir bezeichnen ihre Summe mit* $s(z)$ *. Für beliebige* $z, w \in \mathbb{C}$ *folgt aus dem Satz 3.60 und der binomischen Formel* (1.18)

$$s(z)s(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \, \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = s(z+w) .$$

3.6 Übungsaufgaben

1. Es seien $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende **Vergleichskriterien**:

   (a) Es existiere der Grenzwert $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

   - Ist $q < \infty$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.
   - Ist $q > 0$, so folgt aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.
   - Im Fall $q \in (0, \infty)$ konvergieren bzw. divergieren beide Reihen gleichzeitig.

   (b) **(HA)** Existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ $\forall\, n > n_0$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{2^n}$

   (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ (g) $1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{3}{2^{2n+1}} + \cdots$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{2}{n} \tan\frac{5}{n}$

   (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$ (j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n^2}{2+n^2}$ (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!}$

   (n) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ (o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (p) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$ (q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$

   (r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \cos^2\frac{1}{n}$ (s) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left[\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right]$

   (u) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$ (v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n)$ (w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s}$ $(s \in \mathbb{R},\ a, b \ge 0)$

   (x) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \tan\frac{1}{\sqrt{n}}$ (y) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ (z) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

   (ä) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$ (ö) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^\rho}$ $(\rho > 0)$ (ü) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

3. Untersuchen Sie mit Hilfe von Vergleichskriterien auf Konvergenz:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\alpha}{n}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\alpha}{n}\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$

4. Untersuchen Sie mit Hilfe des Wurzel- bzw. Quotientenkriteriums auf Konvergenz ($z \in \mathbb{C}$):

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{z}{n}\right)^n$ (d) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan n}{2} z\right)^n$

5. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ eine Reihe mit $b_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $b_n \longrightarrow 0$. Konvergiert diese Reihe?

6. Beweisen Sie: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ für alle $p > 1$. Gilt die Umkehrung?

7. Beweisen Sie: Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergent, so konvergieren auch die Reihen

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

8. Es gelte $a_n \longrightarrow a$ und $a_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ sowie $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1}|$ konvergiert.

9. Wir modifizieren die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ auf folgende Weise:

   (a) **(HA)** Wir summieren nur über die durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen n.
   (b) Wir summieren nur über die natürlichen Zahlen n, bei denen in der Dezimaldarstellung die Ziffer 9 nicht vorkommt.

   Untersuchen Sie die so modifizierten Reihen auf Konvergenz.

10. Geben Sie die Summe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgender Reihen an:

    (a) $a_n = \frac{1}{(d+n)(d+n+1)}$ $(-d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$ (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) **(HA)** $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$

11. Untersuchen Sie mit Hilfe des Dirichlet- oder Leibniz-Kriteriums auf Konvergenz ($\alpha \in \mathbb{R}$):

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\alpha)$ ($(b_n)_{n=1}^{\infty}$ monotone Nullfolge) (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin(n\alpha)}{n}$ (e) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n} - 1)$

    (f) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$

12. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen absolut konvergiert.

13. Es sei $\gamma_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie die Summe der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{10^n}$ an.

14. Es seien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion sowie $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ und $s_n' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}$. Verwenden Sie die Tatsache, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 mit $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+\ell} |a_k| < \varepsilon\ \forall\, n \ge n_0\,,\ \forall\, \ell \ge 0$ existiert, um zu zeigen, dass $(s_n - s_n')_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist. (D.h., beweisen Sie Satz 3.57.)

(**Z**) Es sei s die Summe der Leibniz-Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Geben Sie jeweils eine Umordnung dieser Reihe an, die die Summe $\dfrac{3s}{2}$, 0 bzw. ∞ hat.

15. Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{\mathbf{i}z}{n}\right)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\mathbf{i}n)^n z^n}{n!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n$, wobei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler der Zahl n bezeichnet,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^2}$ $(a \ne 0,\ a \in \mathbb{C})$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^{\sqrt{n}}}$ $(a > 0)$ (f) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n}$ $(a, b > 0)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\vartheta(n)}(1-z)^n}{n}$, wobei $\vartheta(n)$ die Anzahl der Dezimalziffern der Zahl n bezeichnet,

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) z^n$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathbf{i})^n z^{2n}}{n!}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$

(k) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} z^n$ (l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+2\cos\frac{\pi n}{4})^n}{\ln n} z^n$ (m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} [3+(-1)^n]^n (z-\mathbf{i})^n$

(n) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$ **(Z)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\sin n}\right)^n$

16. Die Potenzreihen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mögen den Konvergenzradius R_1 bzw. R_2 haben. Geben Sie Abschätzungen für den Konvergenzradius R der folgenden Reihen an:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n$

Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 Differenzierbarkeit

Die Lösung verschiedenster Probleme führt auf den Begriff der Ableitung einer Funktion:

- Ein geometrisches Problem

  Es sei der Anstieg der Tangente an den Graphen $\{(x, f(x)) : a < x < b\}$ einer Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ gesucht, wobei x_0 ein Punkt aus dem Intervall (a, b) sei. Wir wählen $h \in \mathbb{R}$ so, dass auch $x_0 + h \in (a, b)$ gilt. Da der Anstieg der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ gleich dem **Differenzenquotienten**

  $$\frac{f(x_0 + h)) - f(x_0)}{h}$$

  ist, kann man den **Anstieg der Tangente** als den Grenzwert dieses Differenzenquotienten für $h \longrightarrow 0$ definieren, falls dieser existiert. Diesen Grenzwert nennt man dann **Ableitung** der Funktion f im Punkt x_0 und bezeichnet ihn mit $f'(x_0)$.

- Ein physikalisches Problem

  Ein Punkt habe zum Zeitpunkt t den Weg $s(t)$ zurückgelegt. Gesucht sei seine Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t. Da man als mittlere Geschwindigkeit des Punktes im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ den **Differenzenquotienten**

  $$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

  ansehen kann, ist die Geschwindigkeit des Punktes zum Zeitpunkt t gleich dem Grenzwert dieses Differenzenqotienten für $\Delta t \longrightarrow 0$ zu setzen, also $v(t) = s'(t)$.

- Ein Wachstumsprozess

  Mit $P(t)$ sei die (unbekannte) Größe einer Population zum Zeitpunkt t bezeichnet, wobei die Größe $P_0 = P(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben sei. Nach welchem Gesetz könnte man $P(t)$ für $t > 0$ voraussagen. Um ein solches Gesetz zu finden, nehmen wir an, dass die Zunahme der Population in einem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ proportional zur Länge des Zeitintervalls und zur Größe der Population ist. Den entsprechenden Proportionalitätsfaktor nennt man Geburtenrate, wir bezeichnen ihn mit k. Es folgt also

  $$P(t + \Delta t) - P(t) \approx k\, P(t)\Delta t$$

  bzw.

  $$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx k\, P(t)\,.$$

Es ist anzunehmen, dass diese ungefähre Gleichheit für $\Delta t \longrightarrow 0$ in eine Gleichheit übergeht. Wir erhalten also eine sogenannte Differentialgleichung

$$P'(t) = k\,P(t)\,,$$

d.h. eine Gleichung für die gesuchte Funktion $P(t)$, in der auch die Ableitung $P'(t)$ der gesuchten Funktion vorkommt. Diese Funktion hat zusätzlich die Bedingung $P(0) = P_0$ zu erfüllen. Eine Verfeinerung dieses Modells, bei der von einer optimalen Populationsgröße $P_{\rm opt}$ (die den vorhandenen Ressourcen entspricht) ausgegangen wird, führt auf die Differentialgleichung

$$P'(t) = k\,P(t)[P_{\rm opt} - P(t)]\,.$$

Im Weiteren seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $G \subset \mathbb{K}$ eine offene Menge.

Definition 4.1 *Man nennt $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ im Punkt $z_0 \in G$* **differenzierbar**, *wenn*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)\,, \quad z \in G\,,$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion $g : G \longrightarrow \mathbb{K}$ gilt. Die Zahl $f'(z_0) := g(z_0)$ heißt **Ableitung** *der Funktion $f(z)$ im Punkt z_0. Die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt* **differenzierbar**, *wenn sie in jedem Punkt $z \in G$ differenzierbar ist. Man nennt dann $f' : G \longrightarrow \mathbb{K}$, $z \mapsto f'(z)$ die* **Ableitung** *der Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$.*

Bemerkung 4.2 *Die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ ist genau dann in $z_0 \in G$ differenzierbar, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt $f'(x_0)$ den Anstieg der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an den Graphen der Funktion an. Diese Tangente genügt der Geradengleichung

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Offenbar ist die Ableitung einer konstanten Funktion gleich 0.

Beispiel 4.3 *Für $n \in \mathbb{N}$ untersuchen wir die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ auf Differenzierbarkeit. Aus*

$$\frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} h^{k-1} = n z_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z_0^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}$$

folgt $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$.

Beispiel 4.4 *Offenbar gelten für $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ die Ungleichungen*

$$0 < \sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,,$$

so dass

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

gilt. Unter Verwendung der Stetigkeit von $\cos x$ und der Beziehung $\sin(-x) = -\sin x$ ($\sin x$ ist eine ungerade Funktion) folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,. \tag{4.1}$$

Hieraus folgt für $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \sin x$ *die Formel* $f_1'(0) = 1$. *Aus* $\cos x - 1 = -2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ *ergibt sich weiterhin*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Es folgt $f_2'(0) = 0$ *für* $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \cos x$.

Beispiel 4.5 *Nach Beispiel 3.24 ist* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$. *Es folgt* $\lim\limits_{x\to+0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ *und*

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e\,,$$

also auch $\lim\limits_{x\to-0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. *Somit ist* $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, *woraus*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

folgt. Betrachten wir nun die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \ln x$, *so erhalten wir für alle* $x_0 \in \mathbb{R}_+$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}\,.$$

Folgerung 4.6 *Ist* $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ *im Punkt* $z_0 \in G$ *differenzierbar, so ist* f *in* z_0 *stetig.*

Folgerung 4.7 (Differentiationsregeln) *Es seien* $f_1, f_2 : G \longrightarrow \mathbb{K}$ *im Punkt* $z_0 \in G$ *differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen* $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ *für beliebige* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ *und* $f_1 f_2$ *in* z_0 *differenzierbar, wobei*

$$(\alpha_1 f + \alpha_2 f_2)'(z_0) = \alpha_1 f_1'(z_0) + \alpha_2 f_2'(z_0)$$

und

$$(f_1 f_2)'(z_0) = f_1'(z_0) f_2(z_0) + f_1(z_0) f_2'(z_0) \quad \text{(Produktregel)}$$

gilt. Ist $f_2(z_0) \neq 0$, *so ist* $\dfrac{f_1}{f_2}$ *in einer Umgebung von* z_0 *definiert und in* z_0 *differenzierbar, wobei*

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(z_0) = \frac{f_1'(z_0) f_2(z_0) - f_1(z_0) f_2'(z_0)}{[f_2(z_0)]^2}\,. \quad \text{(Quotientenregel)}$$

Sind $f_1 : G \longrightarrow G_1$ *in* $z_0 \in G$ *und* $f_2 : G_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ *in* $f_1(z_0) \in G_1$ *differenzierbar* ($G_1 \subset \mathbb{K}$ *offen*), *so ist* $f_2 \circ f_1 : G \longrightarrow \mathbb{K}$ *in* z_0 *differenzierbar, wobei*

$$(f_2 \circ f_1)'(z_0) = f_2'(f_1(z_0)) f_1'(z_0) \quad \text{(Kettenregel)}$$

gilt.

Zum Beweis der Kettenregel verwende man die Formel

$$f_2(f_1(z)) = f_2(f_1(z_0)) + [f_1(z) - f_1(z_0)] g_2(f_1(z)) = f_2(f_1(z_0)) + (z - z_0) g_1(z) g_2(f_1(z))\,,$$

wobei $f_1(z) = f_1(z_0) + (z - z_0) g_1(z)$ und $f_2(w) = f_2(w_0) + (w - w_0) g_2(w)$ mit in z_0 bzw. $w_0 := f_1(z_0)$ stetigen Funktionen g_1 bzw. g_2 gilt.

Beispiel 4.8 *Bezüglich der beiden Funktionen* $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ *und* $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$ *wissen wir bereits, dass* $f_1'(0) = 1$ *und* $f_2'(0) = 0$ *gilt (vgl. Beispiel 4.4). Unter Verwendung von Folgerung 4.7 erhalten wir damit aus*

$$\sin x = \sin(x - x_0 + x_0) = \sin(x - x_0)\cos x_0 + \cos(x - x_0)\sin x_0$$

und aus $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ *die Formeln*

$$f_1'(x_0) = \cos x_0 \quad \text{und} \quad f_2'(x_0) = -\sin x_0 \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Satz 4.9 *Es seien* $f : G \longrightarrow G_1$ $(G, G_1 \subset \mathbb{K}$ *offen) eine bijektive und in* $z_0 \in G$ *differenzierbare Funktion mit* $f'(z_0) \neq 0$ *sowie* $g = f^{-1} : G_1 \longrightarrow G$ *in* $w_0 = f(z_0)$ *stetig. Dann ist* $g = f^{-1}$ *in* w_0 *differenzierbar, und es gilt*

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}\,.$$

Beispiel 4.10 *Die Umkehrfunktion der Funktion* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$ *ist die stetige Funktion* $g = f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $y \mapsto e^y$. *Für* $y_0 \in \mathbb{R}$ *und* $x_0 = e^{y_0}$ *folgt nun aus Satz 4.9*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = x_0 = e^{y_0}\,.$$

Wir schreiben das auch in der Form $(e^x)' = e^x \;\forall\, x \in \mathbb{R}$. *Nun können wir auch* $(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, *und* $(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = \alpha\, x^{\alpha - 1}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *berechnen.*

Satz 4.11 (Differentiation von Potenzreihen) *Es seien* $r \in (0, +\infty]$ *der Konvergenzradius der Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in U_r(z_0)$ $(U_\infty(z_0) := \mathbb{C})$. *Dann ist* $f : U_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ *differenzierbar, und es gilt*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \forall\, z \in U_r(z_0)\,.$$

Beispiel 4.12 *Für* $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$ *(vgl. Beispiel 3.61), erhalten wir*

$$s'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = s(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Beispiel 4.13 *Für die Summe* $f(z)$ *der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ *ergibt sich*

$$f(z) = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z \left(\frac{1}{1 - z}\right)' = \frac{z}{(1 - z)^2} \quad \forall z \in U_1(0)\,.$$

Beispiel 4.14 *Die Funktion* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ *ist in* **keinem** *Punkt* $z_0 \in \mathbb{C}$ *differenzierbar.*

4.2 Mittelwertsätze und Taylorreihenentwicklung

Definition 4.15 *Einen Punkt $x^* \in G$ nennt man einen* **globalen Extremalpunkt** *und $f(x^*)$ ein* **globales Minimum** *bzw.* **Maximum** *der Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn $f(x) \geq f(x^*)$ bzw. $f(x) \leq f(x^*)$ für alle $x \in G$ gilt. Man nennt $x^* \in G$ einen* **lokalen Extremalpunkt** *und $f(x^*)$ ein* **lokales Minimum** *bzw.* **Maximum** *dieser Funktion, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(x^*)$ globales Minimum bzw. Maximum der Funktion $f : U_\varepsilon(x^*) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ ist.*

Satz 4.16 (Satz von Fermat) *Sind $x^* \in (a,b)$ ein Extremalpunkt der Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und f in x^* differenzierbar, so gilt $f'(x^*) = 0$.*

Satz 4.17 (Satz von Rolle) *Sind $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(a) = f(b)$, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Satz 4.18 (Allg. Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Sind $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi)\,.$$

Folgerung 4.19 (Spez. Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Sind $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$[f(b) - f(a)] = f'(\xi)(b - a)\,.$$

Folgerung 4.20 *Es seien $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) \geq 0$ $(= 0\,,\ \leq 0)$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist die Funktion f monoton nicht fallend (konstant, monoton nicht wachsend). Gilt $f'(x) > 0$ (< 0) für alle $x \in (a,b)$, so ist f monoton wachsend (fallend).*

Beispiel 4.21 *Für die Abbildung $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$ gilt $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. Mit $g(y) = f^{-1}(y) = \arctan y$, $y \in \mathbb{R}$, und $\tan x_0 = y_0$ folgt*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}\,.$$

Beispiel 4.22 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_0 e^{\alpha x}$ ist die einzige Lösung des Problems*

$$f'(x) = \alpha f(x)\,, \quad f(0) = x_0\,,$$

denn aus diesen beiden Gleichungen und mit der Definition $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\alpha x} f(x)$ folgt $g'(x) = e^{-\alpha x} f'(x) - \alpha e^{-\alpha x} f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $g(x) = x_0$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, woraus sich $f(x) = x_0 e^{\alpha x}$ ergibt. Mit Beispiel 4.12 erhalten wir

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

und man definiert deshalb

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,,$$

was wegen Beispiel 3.50 erlaubt ist.

Satz 4.23 *Es seien $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $a < x_1 < x_2 < b$ und $f'(x_1) < \lambda < f'(x_2)$ oder $f'(x_1) > \lambda > f'(x_2)$. Dann existiert ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $f'(\xi) = \lambda$.*

Folgerung 4.24 *Ist $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so hat $f' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$* **keine** *Unstetigkeitsstellen 1. Art.*

Beispiel 4.25 *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & : \quad x \neq 0\,, \\ 0 & : \quad x = 0\,, \end{cases}$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Ableitung

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & : \quad x \neq 0\,, \\ 0 & : \quad x = 0\,, \end{cases}$$

hat in $x_0 = 0$ eine Unstetigkeit 2. Art.

Beispiel 4.26 *In Beispiel 4.22 haben wir die Exponentialfunktion $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ z \mapsto e^z$ mit*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

definiert. Nach Beispiel 3.61 gilt $e^z e^w = e^{z+w}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Daraus folgt insbesondere $e^z e^{-z} = 1$ und somit $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt offenbar $e^x > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, d.h. $x^n e^{-x} < \dfrac{(n+1)!}{x}$, woraus

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

folgt.

Satz 4.27 (Die l'Hospital'sche Regel) *Es seien $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ($a = -\infty$ bzw. $b = +\infty$ sind zugelassen), $g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in (a,b)$ und $\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Ferner sei die Bedingung $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$ erfüllt. Dann gilt*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A\,.$$

Eine analoge Aussage gilt für $x \to b-0$ und somit natürlich auch für $x \to x_0 \in (a,b)$.

Beispiel 4.28 *Die L'Hospital'sche Regel liefert*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\,.$$

Ausdrücke der Form $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞, $0 \cdot \infty$, ∞^0 sind unbestimmte Ausdrücke. So ist z.B. $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{x}{x} \neq \lim_{x \to +0} \frac{x^2}{x}$ $\left(\text{zwei Ausdrücke der Form } \dfrac{0}{0}\right)$. Dagegen ist 0^∞ kein unbestimmter Ausdruck.

Ableitungen höherer Ordnung: Sind $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ differenzierbar und $g = f' : G \longrightarrow \mathbb{C}$ in $z_0 \in G$ differenzierbar, so nennt man $g'(z_0)$ die **zweite Ableitung** der Funktion f im Punkt z_0 und bezeichnet sie mit $f''(z_0)$. Induktiv definiert man nun die k**-te Ableitung** (bzw. die **Ableitung der Ordnung** k) $f^{(k)}(z_0)$ als (erste) Ableitung von $f^{(k-1)}(z_0)$, $k = 1, 2, \ldots$ Wir vereinbaren $f^{(0)} = f$.

Beispiel 4.29 *Da der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit dem Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ übereinstimmt, ergibt sich für $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ induktiv aus Satz 4.11*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}\,, \quad z \in U_r(z_0)\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Es folgt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Für jedes Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ mit $\alpha_k \in \mathbb{C}$ und jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt die **Taylorsche Formel**

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!}\,(z-z_0)^k\,.$$

Satz 4.30 (Taylorentwicklung) *Die Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ besitze Ableitungen bis zur Ordnung $n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x_0, x \in (a,b)$ schreiben wir*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + R_n(f;x_0,x)\,.$$

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert dann ein $\vartheta = \vartheta(f;x_0,x,j) \in (0,1)$, so dass

$$R_n(f;x_0,x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{n!j}\,(x-x_0)^{n+1}(1-\vartheta)^{n-j+1}$$

gilt (Restglieddarstellung nach **Schlömilch***). In den Spezialfällen $j=1$ und $j=n+1$ erhält man die Restglieddarstellungen nach* **Cauchy** *und* **Lagrange***:*

$$R_n(f;x_0,x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{n!}\,(x-x_0)^{n+1}(1-\vartheta)^n\,.$$

$$R_n(f;x_0,x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\,,$$

Beispiel 4.31 *Mit Satz 4.30 haben wir eine weitere Möglichkeit zum Beweis der Formel*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

zur Verfügung. Unter Verwendung der Restglieddarstellung nach Lagrange erhalten wir nämlich für $x \in \mathbb{R}$ und ein gewisses $\vartheta \in (0,1)$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{\left|e^{\vartheta x}\right|}{(n+1)!}\,|x|^{n+1} \le e^{|x|}\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty\,.$$

Beispiel 4.32 *Satz 4.30 liefert auch die Formeln*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \quad \textit{und} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Diese Formeln führen zu den Definitionen

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \quad \textit{und} \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Hieraus folgt die **Eulersche Formel**

$$e^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i} \sin z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Insbesondere lassen sich also die komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis in der Form $e^{\mathbf{i}t}$ *mit* $t \in \mathbb{R}$ *schreiben (vgl. Abschnitt 1.6), genauer gilt*

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \left\{ e^{\mathbf{i}t} : -\pi < t \le \pi \right\}\,.$$

Weiterhin zeigt sich, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ z \mapsto e^z$ *genau die Perioden* $2k\pi\mathbf{i}\,,\ k \in \mathbb{Z}\,,$ *hat, d.h., es gilt* $f(z+w) = f(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *genau dann, wenn* $w = 2k\pi\mathbf{i}$ *mit einem* $k \in \mathbb{Z}$ *ist. Die Funktionen* $\sin z$ *bzw.* $\cos z$ *haben genau die Perioden* $2k\pi\,,\ k \in \mathbb{C}\,,$ *und die Nullstellen* $k\pi$ *bzw.* $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$

Beispiel 4.33 *Für* $x \in (-1, 1]$ *gilt*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n\,.$$

Insbesondere erhalten wir also für die Leibniz-Reihe die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2\,.$$

Satz 4.34 (Abelscher Grenzwertsatz) *Die Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *habe den Konvergenzradius* $r \in (0, \infty)$ *und sei auch für* $z^* = z_0 + re^{\mathbf{i}\varphi^*}$ *konvergent. Dann ist die Funktion* $f : U_r(z_0) \cup \{z^*\} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *stetig, wobei die Stetigkeit im Punkt* z^* *so zu verstehen ist, dass für jedes* $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *gilt*

$$\lim_{z \to z^* :\, z \in U_r(z_0),\, |\arg(z^*-z) - \arg(z^*-z_0)| \le \varphi_0} f(z) = f(z^*)\,.$$

Mittels vollständiger Induktion lässt sich die **Leibnizsche Formel** (Verallgemeinerung der Produktregel, vgl. Folgerung 4.7)

$$(fg)^{(n)}(z_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(z_0) g^{(k)}(z_0)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

beweisen, die für zwei Funktionen $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ und $g : G \longrightarrow \mathbb{K}$ gilt, die in $z_0 \in G \subset \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) n-mal differenzierbar sind.

Beispiel 4.35 *Für $x \in [-1,1]$ gilt*

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}\,.$$

Es folgt $(x=1)$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Beispiel 4.36 (binomische Reihe) *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $-1 < x < 1$ gilt*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\,.$$

4.3 Übungsaufgaben

1. Verwenden Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ zur Berechnung folgender Grenzwerte:
   (ohne Verwendung der l'Hospital'schen Regel)

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ (b) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$ (c) **(HA)** $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^2}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2}$

2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte der Gestalt 1^{∞}:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan x)^{\cot x}$ (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ $(a \in \mathbb{R})$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\cot x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$ (e) **(HA)** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$ (f) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} (\cot x)^{\frac{1}{x}}$

   (g) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

3. Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ die Beziehungen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \tag{4.2}$$

   gelten, und verwenden Sie diese zur Berechnung von

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$, (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\log_{10} x - 1}{x - 10}$, (d) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{a}{1+\ln x}}$,

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a,b,c > 0)$.

4. Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x^2} & : \ x \neq 0\,, \\ 0 & : \ x = 0\,, \end{cases}$, (b) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} a^{\frac{1}{x}} & : & x \neq 0\,, \\ 1 & : & x = 0\,, \end{array} \right\}$ $(a > 0)$

   (c) $f(x) = \lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$, (d) **(HA)** $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$

5. Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit:

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$, $I = [-1,1]$, (b) $f(x(= \ln x$, $I = (0,\infty)$,

   (c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $I = (0,\pi)$, (d) $f(x) = x \sin x$, $I = [0,\infty)$,

   (e) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $I = (0,1)$.

6. Beweisen Sie: Wenn f auf $[a,\infty)$ definiert und stetig ist und weiterhin $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert und endlich ist, dann ist f auf $[a,\infty)$ gleichmäßig stetig.

7. Besitzt die Gleichung $2^x = 4x$ außer der Lösung $x_0 = 4$ noch weitere reelle Lösungen?

8. Gegeben sei eine beliebige, beschränkte, ebene Figur mit Flächeninhalt F . Zeigen Sie, dass eine Gerade existiert, die diese Figur in zwei flächengleiche Teile zerlegt.

9. Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Differenzierbarkeit über dem Intervall I . Skizzieren Sie den Graphen der Funktion. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung der Funktion f .

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & : \; x \neq 0\,, \\ 0 & : \; x = 0\,, \end{cases}$ $I = (-1,1)$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : \; x \neq 0\,, \\ 1 & : \; x = 0\,, \end{cases}$ $I = \mathbb{R}$

   (c) $f(x) = \ln x$, $I = (0,\infty)$ (d) $f(x) = x\, \sin x$, $I = (0,\infty)$

   (e) **(HA)** $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$, $I = (-1,1)$ (f) **(HA)** $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $I = (0,1)$

   (g) **(HA)** $f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x} & : \; x \neq 0\,, \\ 0 & : \; x = 0\,, \end{cases}$ $I = \mathbb{R}$ bzw. $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

10. Beweisen Sie: Wenn f über dem Intervall I differenzierbar und f' auf I beschränkt sind, so ist f auf I gleichmäßig stetig. (Gilt auch die Umkehrung, d.h., wenn f differenzierbar und gleichmäßig stetig auf I ist, so ist f' dort beschränkt?)

11. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der Definition:

    (a) $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ (b) $f(x) = a^x$ $(a > 0)$

12. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen (im natürl. Definitionsgebiet):

    (a) $f(x) = 2^{\sin(3x)}$ (b) $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $x \in [-1,1)$

    (c) $f(x) = \ln \left[x + \sqrt{x^2+a^2}\right]$ (d) $f(x) = x^{\sin x}$ $(x > 0)$ (e) $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

    (f) $f(x) = a^{(a^x)}$ $(a > 0)$ (g) $f(x) = x^{x^x}$ $(x > 0)$ (h) **(HA)** $f(x) = a^{(x^a)}$ $(a, x > 0)$

    (i) $f(x) = \log_{\varphi(x)} \psi(x)$ $(\varphi, \psi > 0$ differenzierbar)

13. Ermitteln Sie die erste Ableitung von $y(x) = u(x)^{v(x)}$, wobei u und v differenzierbare Funktionen mit $u(x) > 0$ sind.

14. Ermitteln Sie die 1., 2. und 3. Ableitung der Funktion $f(x) = |x|^3$ und zeigen Sie, dass $f'''(0)$ nicht existiert.

15. Sind folgende Funktionen im Punkt $x = 0$ differenzierbar? (Wenn ja, ist f' in $x = 0$ stetig?)

    (a) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$

    (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$ (d) **(HA)** $f(x) = \begin{cases} x \arctan \dfrac{1}{x} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$

    (e) **(HA)** $f(x) = 2^{|x|}$

16. Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital folgende Grenzwerte:

    (a) Die beiden Grenzwerte aus (4.2) von Aufgabe 3.

    (b) $\lim\limits_{x \to +0} x^\alpha \ln x \quad (\alpha > 0)$ (c) $\lim\limits_{x \to +0} x^x$ (d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

    (e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$ (f) **(HA)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$ (g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^x}$

4.4 Lokale und globale Extremwerte, Kurvendiskussion

Folgerung 4.37 *Sind $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar ($n \geq 2$), $x^* \in (a, b)$ und*

$$f'(x^*) = \ldots = f^{(n-1)}(x^*) = 0\,,$$

so folgt aus Satz 4.30

$$f(x) = f(x^*) + \frac{f^{(n)}(x^* + \vartheta(x - x^*))}{n!} (x - x^*)^n\,, \quad x \in (a, b)\,,$$

mit $\vartheta \in (0, 1)$. Ist also n eine gerade Zahl, so ist $f(x^*)$ ein lokales Minimum (bzw. Maximum), wenn $f^{(n)}(x^*) > 0$ (bzw. $f^{(n)}(x^*) < 0$) gilt. Sind dagegen n ungerade und $f^{(n)}(x^*) \neq 0$, so liegt in x^* kein Extremum der Funktion f vor.

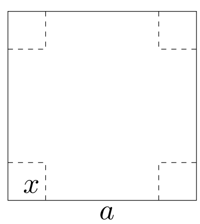
Wir betrachten folgende Aufgabenstellung: Man finde den kleinsten und den größten Funktionswert der stetigen Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Nach obigen Überlegungen sind die Punkte

- $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$,
- $x \in (a, b)$, in denen f nicht differenzierbar ist,
- $x = a$ und $x = b$

extremwertverdächtig. Minimum und Maximum von f findet man dann durch Vergleich aller Funktionswerte in den extremwertverdächtigen Punkten.

Beispiel 4.38 *Minimum und Maximum der Funktion $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $x \mapsto |x| + \sin x$ sind gleich 0 bzw. $\frac{3\pi}{2} - 1$.*

Beispiel 4.39 *Aus einem quadratischen Blech der Seitenlänge a ist eine oben offene Schachtel mit größtmöglichem Volumen herzustellen:*

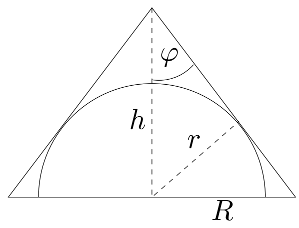


Es sei $x > 0$ die Seitenlänge der an den vier Ecken auszuschneidenden Quadrate. Das Volumen der Schachtel ist dann gleich $V(x) = (a-2x)^2 x$, $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$. Es folgt

$$V'(x) = (a-2x)^2 - 4(a-2x)x = (a-2x)(a-6x)\,.$$

Also ist $V'(x) = 0$, $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right) \iff x = x_0 = \frac{a}{6}$. Somit ist $V(x_0) = \frac{4}{54}\,a^3$ globales Maximum, da $V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ gilt.

Beispiel 4.40 *Um eine Halbkugel vom Radius $r > 0$ ist ein gerader Kreiskegel kleinsten Volumens zu beschreiben:*



Es seien $R > 0$ der Radius der Grundfläche des gesuchten Kreiskegels, $h > 0$ seine Höhe und $\varphi > 0$ der Winkel (in der Spitze des Kreiskegels) zwischen Höhe und Seitenlinie. Dann gilt $R = \frac{r}{\cos\varphi}$, $h = \frac{r}{\sin\varphi}$, und das Volumen des Kreiskegels ist gleich

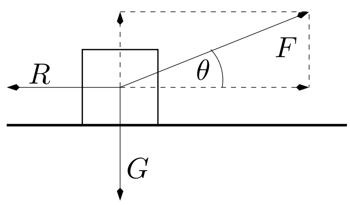
$$\frac{1}{3}\,\pi R^2 h = \frac{1}{3}\,\pi \frac{r^3}{\cos^2\varphi\,\sin\varphi} =: V(\varphi)\,, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Es ist also die Funktion $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \cos^2\varphi\,\sin\varphi$ zu maximieren. Nun gilt

$$f'(\varphi) = -2\cos\varphi\sin^2\varphi + \cos^3\varphi = 2\cos^3\varphi\left(\frac{1}{2} - \tan^2\varphi\right)\,,$$

d.h. $\varphi_0 = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist extremwertverdächtiger Punkt. Wegen $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $f(\varphi_0) > 0$ ist $f(\varphi_0)$ wirklich globales Maximum von $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel 4.41 *Eine Last vom Gewicht G, die auf einer horizontalen Ebene liegt, soll durch Einwirkung einer Kraft verschoben werden. Unter welchem Winkel $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zur Horizontalen muss diese Kraft angreifen, wenn sie möglichst klein sein soll? Gegeben sei dabei der Reibungskoeffizient μ.*



Es sei F der Betrag der angreifenden Kraft. In Richtung der Horizontalen wirkt dann die Kraft $F\cos\theta$, welche die Reibungskraft $R = \mu(G - F\sin\theta)$ zu überwinden hat. Um die Last fortzubewegen, ist also die Bedingung

$$F\cos\theta > \mu(G - F\sin\theta)\,, \quad \text{d.h.} \quad F > \frac{\mu G}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

zu erfüllen. Dies bedeutet, dass die Funktion $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \cos\theta + \mu \sin\theta$ *zu maximieren ist. Aus der Gleichung* $f'(\theta) = \mu\cos\theta - \sin\theta = 0$ *erhalten wir den Winkel* $\theta_0 = \arctan\mu$, *der wegen* $f''(\theta_0) = -(\mu\sin\theta_0 + \cos\theta_0) < 0$ *auch wirklich das Maximum liefert. Für einen Stein, der auf einem Holzbrett zu bewegen ist, gilt* $\mu \approx 0.4$ *und somit* $\theta_0 \approx 22^o$.

Beispiel 4.42 *Sind* $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto p(z)$ *ein nicht konstantes Polynom,* $z_0 \in \mathbb{C}$ *und* $p(z_0) \neq 0$, *so hat die Funktion* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto |p(z)|$ *in* z_0 *kein lokales Minimum.*

Satz 4.43 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes nicht konstante Polynom* $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *hat wenigstens eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$. *(D.h., es existiert ein* $z^* \in \mathbb{C}$ *mit* $p(z^*) = 0$.*)*

Bemerkung 4.44 *Man nennt eine Funktion* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ **streng konvex**, *wenn aus* $x_1, x_2 \in (a,b)$ *und* $\lambda \in (0,1)$ *folgt, dass* $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. *Die Funktion* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* **streng konkav**, *wenn* $-f : (a,b)$, $x \mapsto -f(x)$ *streng konvex ist. Ist die Funktion* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *zweimal differenzierbar, so ist sie streng konvex (bzw. konkav), falls* $f''(x) > 0$ *(bzw.* $f''(x) < 0$*) für* $x \in (a,b)$ *gilt. Punkte, in denen das Krümmungsverhalten wechselt, nennt man* **Wendepunkte**.

Beispiel 4.45 *Wir wollen uns eine möglichst genaue Vorstellung vom Graphen der Funktion*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$$

erarbeiten (Kurvendiskussion). Wir berechnen dazu

$$f'(x) = \frac{-7x^2 + 2x + 17}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

und erhalten als Nullstellen der Ableitung (d.h. als Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$*) die Zahlen*

$$x_{1,2} = \frac{1}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{30},$$

die also extremwertverdächtige Punkte sind. Aus $5 < \sqrt{30} < 6$ *folgt*

$$\frac{11}{7} < x_1 < \frac{13}{7} \quad \text{und} \quad -\frac{11}{7} < x_2 < -\frac{9}{7}.$$

Als weitere Hilfsmittel benutzen wir

- *die Grenzwerte im Unendlichen*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1,$$

- *das Verhalten an den Polstellen* $x_{P1} = 1$ *und* $x_{P2} = 3$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 3+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 3-0} f(x) = -\infty,$$

- *die Nullstellen, d.h. die Lösungen der Gleichung* $f(x) = 0$,

$$x_{N1} = -1, \quad x_{N2} = -2,$$

- *den Schnittpunkt* $(0, f(0))$ *des Graphen mit der y-Achse, also*

$$\left(0, \frac{2}{3}\right).$$

- *Gegebenenfalls kann man noch die Funktionswerte in den extremwertverdächtigen Punkten berechnen oder auch mittels der zweiten Ableitung das Krümmungsverhalten bestimmen.*

4.5 Der Banach'sche Fixpunktsatz und das Newton-Verfahren

Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) nennt man **kontrahierend**, wenn ein $q \in (0,1)$ existiert, so dass

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le q\, d_X(x_1, x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in X$$

gilt.

Satz 4.46 (Fixpunktsatz von Banach) *Es seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \longrightarrow X$ eine kontrahierende Abbildung mit der Kontraktionskonstanten q. Dann besitzt f in X genau einen* **Fixpunkt** *x^*, d.h. eine Lösung der Gleichung $x = f(x)$. Dabei gilt für jedes $x_0 \in X$ und*

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

die Beziehung $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ mit der a-priori Abschätzung

$$d(x_n, x^*) \le \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Das durch (4.3) beschriebene Verfahren zur näherungsweisen Berechnung einer Lösung der Gleichung $x = f(x)$ nennt man **Methode der sukzessiven Approximation**.

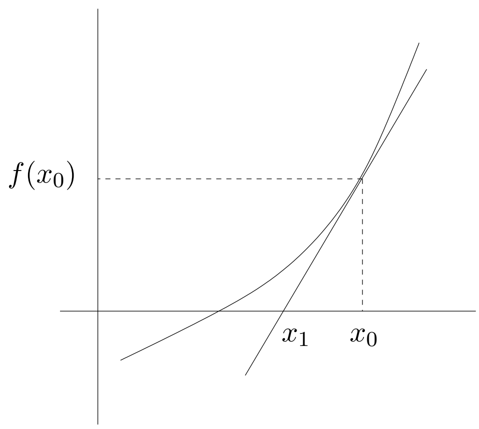
Beispiel 4.47 *Unter Verwendung des spez. MWS der Differentialrechung zeigt man, dass die Abbildung $f : [1,2] \longrightarrow [1,2]$, $x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ kontrahierend mit der Kontraktionskonstanten $\frac{1}{2}$ ist. Für $x_0 \in [1,2]$ konvergiert also die durch $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$ definierte Zahlenfolge gegen $\sqrt{2}$. Dabei folgt aus (4.4) für $x_0 = 1$ die Abschätzung $\left|x_n - \sqrt{2}\right| \le 2^{-n}$.*

Bemerkung 4.48 *Ist $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ eine stetige Funktion, so folgt aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen (angewandt auf $G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - f(x)$), dass f auf $[a,b]$ mindestens einen Fixpunkt besitzt.*

Für eine gegebene Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ suchen wir Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0, \tag{4.5}$$

d.h. **Nullstellen** der Funktion f. Wir setzen voraus, dass f zweimal stetig differenzierbar ist, wobei $f'(x) \ne 0 \;\forall\, x \in (a,b)$ gelte, und verwenden folgende geometrische Überlegung. Es sei $x_0 \in (a,b)$ eine gewisse Näherung für eine Lösung von (4.5).



Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ hat die Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Diese Tangente schneidet die x-Achse im Punkt $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, den wir als neue Näherung für eine Lösung von (4.5) ansehen. Durch wiederholte Anwendung dieser Überlegungen erhalten wir das **Newtonsche Interationsverfahren**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{4.6}$$

die der Methode der sukzessiven Approximation (4.3) für die Funktion

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

entspricht.

(a) **Anwendbarkeit und lokale Konvergenz des Newtonverfahrens**

Es gilt

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}\,,$$

woraus man schließen kann, dass für eine hinreichend gute Näherung x_0 an eine Nullstelle von f eine Umgebung existiert, sagen wir $U = [x_0 - r, x_0 + r] \subset (a, b)$ mit einem $r > 0$, so dass die Ungleichung

$$|g'(x)| \le q < 1\,, \quad x \in U\,, \tag{4.7}$$

gilt. Es muss aber auch $g(x) \in U$ für alle $x \in U$ gelten. Aus dem spez. MWS der Differentialrechnung und der Definition von $g(x)$ folgt aber nun für $x \in U$

$$|g(x) - x_0| \le |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - x_0| \le q|x - x_0| + \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|\,.$$

Setzen wir also voraus, dass

$$\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \le (1 - q)r \tag{4.8}$$

gilt, so erhalten wir, dass das Newtonverfahren (4.6) für eine Anfangsnäherung $x_0 \in (a, b)$, die (4.7) und (4.8) erfüllt, gegen eine Lösung $x^* \in U$ der Gleichung (4.5) konvergiert. Die Bedingung (4.8) besagt dabei, dass die Startnäherung x_0 hinreichend gut sein muss, und zwar um so besser, je größer die Zahl q in (4.7) ist. Man sagt deshalb, dass das Newtonverfahren i.a. lediglich **lokal konvergent** ist.

(b) **Quadratische Konvergenz des Newtonverfahrens**

Ist $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sogar dreimal stetig differenzierbar, so existiert eine Zahl $c_0 > 0$ mit der Eigenschaft $|g''(x)| \le 2c_0\ \forall\, x \in U$. Es folgt wegen

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g(x^*) + g'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{1}{2}g''(x^* + \theta(x_n - x^*))(x_n - x^*)^2 \\ &= x^* + \frac{1}{2}g''(x^* + \theta(x_n - x^*))(x_n - x^*)^2\,, \quad \theta \in (0, 1)\,, \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$|x_{n+1} - x^*| \le c_0|x_n - x^*|^2\,,$$

weshalb man das Newtonverfahren (4.6) in diesem Fall **quadratisch konvergent** nennt.

(c) **Das Newtonverfahren für konvexe Funktionen**

Wir beschreiben hier eine Situation, in der das Newtonverfahren auch global konvergent ist. Die stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ habe die Eigenschaften

1. $f'(x) > 0 \; \forall \, x \in (a,b]$,
2. $f(a)f(b) < 0$,
3. $f''(x) > 0 \; \forall \, x \in (a,b)$ (Konvexität).

Dann existiert offenbar genau ein $x^* \in (a,b)$ mit $f(x^*) = 0$. Wir setzen $x_0 = b$. Es folgt

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$$

und

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= x_0 - x^* - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= -\frac{1}{f'(x_0)} \left[f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) \right] \\ &= -\frac{1}{f'(x_0)} \left[f(x^*) - \frac{1}{2} f''(x_0 + \theta(x^* - x_0))(x^* - x_0)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2f'(x_0)} \, f''(x_0 + \theta(x^* - x_0))(x^* - x_0)^2 > 0 \, , \end{aligned}$$

d.h. $x^* < x_1 < x_0$ und $f(x_1) > 0$. Induktiv schließt man also auf $x^* < x_{n+1} < x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Somit folgt die Existenz des Grenzwertes

$$\overline{x} = \lim_{n \to \infty} x_n \, ,$$

wobei aus (4.6) für $n \longrightarrow \infty$ die Beziehung

$$\overline{x} = \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})} \, ,$$

d.h. $f(\overline{x}) = 0$, und somit $\overline{x} = x^*$ folgt.

Beispiel 4.49 *Wir suchen die Nullstellen der Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{2} - \sin x$, *d.h. die Lösungen der Gleichung*

$$\frac{x}{2} - \sin x = 0 \quad \textit{bzw.} \quad x = 2 \sin x =: g(x) \, .$$

Aus $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$ *ergibt sich das Newtonverfahren*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2 \sin x_n}{1 - 2 \cos x_n} = 2 \, \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{1 - 2 \cos x_n} \, . \tag{4.9}$$

In den folgenden Tabellen vergleichen wir die Ergebnisse des Newtonverfahrens (4.9) mit denen der sukzessiven Approximation

$$x_{n+1} = 2 \sin x_n \, . \tag{4.10}$$

für zwei verschiedene Startwerte x_0 .

	Sukz. Appr. (4.10)	Newtonverfahren (4.9)
x_0	3.0000000000000000	3.0000000000000000
x_1	0.2822400161197344	2.0879954127013778
x_2	0.5570154662136501	**1.**9122292580258147
x_3	**1.**0573103488340820	**1.895**6526275469130
x_4	**1.**7420748663201644	**1.8954942**815405740
x_5	**1.**9707353101974190	**1.89549426703398**12
x_6	**1.8**421695065410935	**1.8954942670339809**

	Sukz. Appr. (4.10)	Newtonverfahren (4.9)
x_0	0.5000000000000000	**0.**5000000000000000
x_1	0.9588510772084060	**-0.**1076168810751763
x_2	**1.**6370641951729958	**0.000**8396553633925
x_3	**1.**9956101764404637	**-0.000000000**3946501
x_4	**1.8**222309416572313	**0.0000000000000000**

Man sieht die bedeutend schnellere Konvergenz des Newtonverfahrens, welches für verschiedene Startwerte auch verschiedene Lösungen approximieren kann. Die Methode der sukzessiven Approximation kann für $x_0 \neq 0$ die Lösung $x = 0$ nicht approximieren, was auf die Ungleichung $|g'(0)| > 1$ zurückzuführen ist.

Beispiel 4.50 *Wir wollen die m-te Wurzel ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$) aus einer positiven Zahl A ziehen. Die Funktion $f(x) = x^m - A$ ist auf $[0, \infty)$ konvex, und es gilt $f'(x) > 0$ für $x > 0$. Wir haben also auf jedem Intervall $(0, b]$ mit $0 < A^{\frac{1}{m}} < b$ eine Situation vorliegen, wie sie oben unter (c) betrachtet wurde. Mit $f'(x) = mx^{m-1}$ liefert das Newtonverfahren die Iterationsvorschrift*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - A}{m\, x_n^{m-1}} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) x_n + \frac{A}{m\, x_n^{m-1}}\,,$$

im Spezialfall $m = 2$ also

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

(vgl. Bsp. 4.47).

Das Hornerschema

Zur Durchführung des Newtonverfahrens hat man im n-ten Schritt sowohl den Funktionswert $f(x_n)$ als auch den Wert der ersten Ableitung $f'(x_n)$ zu berechnen. In dem Fall, dass $f(x)$ ein Polynom ist, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

läßt sich diese Berechnung sehr effektiv realisieren. Zur Berechnung von $f(x_0)$ geht man wie folgt vor. Es ist

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f_1(x) =: (x - x_0)(b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$$

mit

$$a_m = b_{m-1}\,,\ a_{m-1} = b_{m-2} - b_{m-1} x_0\,,\ \ldots\ a_1 = b_0 - b_1 x_0\,,\ a_0 = f(x_0) - b_0 x_0$$

bzw.

$$b_{m-1} = a_m\,,\ b_{m-2} = a_{m-1} + b_{m-1} x_0\,,\ \ldots\ b_0 = a_1 + b_1 x_0\,,\ f(x_0) = a_0 + b_0 x_0\,.$$

Wir erhalten das (kleine) **Hornerschema**

1. $b_{m-1} := a_m$,
2. for $k := m-1$ to 0 step -1 do $b_{k-1} := a_k + b_k * x_0$,
3. $f(x_0) := b_{-1}$,

welches tabellarisch auch in der Form

$$\begin{array}{cccccc} a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & + & + & & + & + \\ & x_0 b_{m-1} & x_0 b_{m-2} & \cdots & x_0 b_1 & x_0 b_0 \\ = & = & = & & = & = \\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \cdots & b_0 & f(x_0) \end{array}$$

geschrieben werden kann. Aus der Beziehung $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f_1(x)$ folgt nun

$$f'(x) = f_1(x) + (x - x_0)f_1'(x) ,$$

d.h. $f'(x_0) = f_1(x_0)$. Zur Berechnung von $f'(x_0)$ hat man also nur das Hornerschema auf das Polynom $f_1(x)$ anzuwenden.

Attraktoren und Repeller
Es seien $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $x^* \in \mathbb{R}$ ein Fixpunkt dieser Abbildung, d.h. $x^* = f(x^*)$.

(a) Es sei $|f'(x^*)| < 1$. Wegen der Stetigkeit von f' existieren ein $\varepsilon > 0$ und ein $q > 0$, so dass

$$|f'(x)| \le q < 1 \quad \forall\, x \in I_\varepsilon^* := [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] .$$

Für $x_0 \in I_\varepsilon^*$ und $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, folgt dann unter der Annahme, dass $x_{m-1} \in I_\varepsilon^*$ gilt,

$$|x_m - x^*| = |f(x_{m-1}) - f(x^*)| = |f'(x_{m-1}) + \vartheta(x^* - x_{m-1}))|\, |x_{m-1} - x^*| \le q|x_{m-1} - x^*| < \varepsilon ,$$

also auch $x_m \in I_\varepsilon^*$ und somit $x_n \in I_\varepsilon^*$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Außerdem folgt

$$|x_n - x^*| \le q^n |x_0 - x^*| .$$

Der Fixpunkt heißt in diesem Fall **Attraktor**. (Die Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ wird von x^* angezogen.)

(b) Ist $|f'(x^*)| > 1$, so existieren ein $\varepsilon > 0$ und ein $q \in \mathbb{R}$ mit

$$|f'(x)| \ge q > 1 \quad \forall\, x \in I_\varepsilon^* := [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] .$$

Sei $x_0 \in I_\varepsilon^* \setminus \{x^*\}$. Solange $x_n = f(x_{n-1}) \in I_\varepsilon^*$ gilt, erhalten wir wie im Fall (a)

$$|x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)| \ge q|x_n - x^*| \ge \ldots \ge q^{n+1}|x_0 - x^*| .$$

Es gibt also auf jeden Fall einen Index n mit $x_{n+1} \notin I_\varepsilon^*$. Man nennt den Fixpunkt x^* einen **Repeller**. (Die Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ verlässt jede hinreichend kleine Umgebung von x^* .)

(c) Wir wenden (a) und (b) auf die **logistische Iteration**

$$x_n = f_k(x_{n-1}) \quad \text{mit} \quad f_k(x) = x + kx(1-x) ,\ k > 0 ,$$

an. Die Abbildung $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hat zwei Fixpunkte $x_1^* = 0$ und $x_2^* = 1$. Wegen $f_k'(x) = 1 + k(1-2x)$ gilt $f'(x_1^*) = 1 + k$ und $f_k'(x_2^*) = 1 - k$, so dass x_1^* für alle $k > 0$

Repeller ist, x_2^* dagegen für $0 < k < 2$ Attraktor und für $k > 2$ Repeller. Fixpunkte der zweiten Iterierten $g(x) = f_k^2(x) := f(f(x))$ entsprechen offenbar 2-periodischen Folgen der logistischen Iteration. Diese Fixpunkte genügen also der Gleichung

$$x = g(x) = x + kx(1-x) + k[x + kx(1-x)][1 - x - k(1-x)]\,.$$

Man erhält $x_1^{**} = x_1^* = 0\,,\ x_2^{**} = x_2^* = 1$ und

$$x_{3/4}^{**} = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{k}{2} \mp \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}\right) \in \mathbb{R}$$

für $k > 2$. Es entstehen also “im Parameterwert $k = 2$” zwei neue Fixpunkte von f_k^2. Gleichzeitig wird der Attraktor x_2^* zum Repeller. Dabei gilt $x_4^{**} = f(x_3^{**})$ und $x_3^{**} = f(x_4^{**})$. Die Fixpunkte $x_{3/4}^{**}$ von f_k^2 sind attraktiv für $2 < k < \sqrt{6}$, weil

$$g'(x_3^{**}) = g'(x_4^{**}) = f'(x_3^{**})f'(x_4^{**}) = 5 - k^2$$

gilt.

4.6 Übungsaufgaben

1. Geben Sie für folgende Funktionen die Potenzreihenentwicklung im Punkt z_0 und den Konvergenzbereich an. Verwenden Sie dazu bekannte Taylorreihen!

   (a) $f(z) = e^{-z^2}\,,\ z_0 = 0$ (b) $f(z) = a^z := e^{z \ln a}\,,\ z_0 = 0\,,\ z_0 = \pi\ (a > 0)$

   (c) $f(z) = \sinh z := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}\,,\ z_0 = 0\,,\ z_0 = \pi$ (d) $f(z) = \dfrac{1}{z-1}\,,\ z_0 = 2$

   (e) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}\,,\ z_0 = 0\,,$ **(HA)** $z_0 = 1$ (f) **(HA)** $f(z) = \sin z\,,\ z_0 = \pi$

2. Man berechne die Summe folgender Potenzreihen mittels bekannter Taylorreihen:

   (a) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ (b) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$

3. Beweisen Sie folgende Version der l'Hospitalschen Regel: Es seien $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ($a = -\infty$ ist zugelassen), $g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in (a,b)\,,\ \displaystyle\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ und $\displaystyle\lim_{x\to a+0} g(x) = \infty$. Dann gilt

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A\,.$$

4. Bestimmen Sie die Ableitungen der Umkehrfunktionen folgender Funktionen:

   (a) $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]\,,\ x \mapsto \sin x$ (b) **(HA)** $f : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]\,,\ x \mapsto \cos x$

   (c) $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \tan x$ (d) **(HA)** $f(0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \cot x$

5. Man zeige: Ist $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}\,.$$

6. Man gebe für folgende Funktionen die Taylorentwicklung bis $(x-x_0)^n$ und das Restglied $R_n(f;x_0,x)$ nach Lagrange und Cauchy an:

   (a) $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 3$ (b) $f(x) = x^x - 1$, $x_0 = 1$, $n = 3$

   (Z) $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, $x_0 = 0$, $n = 3$

7. Man schätze den Fehler ab, der bei folgenden Näherungen entsteht:

   (a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$, $0 \le x \le 1$ (b) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

(Z) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & : \ x = 0 \\ e^{-x^{-2}} & : \ x \neq 0 \end{cases}$$

im Punkt $x = 0$ ein Minimum hat, die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & : \ x = 0 \\ xe^{-x^{-2}} & : \ x \neq 0 \end{cases}$$

bei $x = 0$ dagegen kein Extremum besitzt, obwohl $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

8. Man zeige, dass $x = 0$ die einzige reelle Lösung der Gleichung $e^x = 1 + x$ ist.

9. Wenden Sie auf die Funktion $f(x) = x^2$ und das Intervall $[a,b]$ den speziellen Mittelwertsatz $f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b-a))(b-a)$ an und bestimmen Sie ein $\vartheta \in (0,1)$.

10. Beweisen Sie unter Verwendung des speziellen Mittelwertsatzes

    (a) $|\arctan x - \arctan y| \le |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, (b) $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$.

11. Es seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Welches in die Ellipse $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ einbeschriebene achsenparallele Rechteck besitzt den größten Flächeninhalt?

12. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f : [2, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

13. Bestimmen Sie für folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Unstetigkeitsstellen, Nullstellen, Nichtdifferenzierbarkeitspunkte, Extremwerte, Wendepunkte, Monotonieintervalle, Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle und Intervalle mit Vorzeichenkonstanz sowie evtl. Asymptoten, das Periodizitäts- und Symmetrieverhalten:

    (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-1} & : \ |x| \neq 1 \\ 1 & : \ |x| = 1 \end{cases}$

    (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \in (0,a] \\ \sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}} & : \ \text{sonst} \end{cases} \qquad (a > 0)$

    (c) $f(x) = \begin{cases} 0 & : \ x = \dfrac{(2k+1)\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\cos x}{\cos 2x} & : \ \text{sonst} \end{cases}$

(d) **(HA)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2} & : \quad x \neq 1 \\ 0 & : \quad x = 1 \end{cases}$

14. Es seien $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ und $g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei konvexe Funktionen. Man zeige: Ist g monoton wachsend, so ist auch die Funktion $g \circ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex.

    (Z) Ist die Monotoniebedingung an g wesentlich? Wenn ja, ist sie notwendig?

15. Es seien $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(0) = 0$ und $f' : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass dann auch $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ monoton wachsend ist.

16. Bestimmen Sie im Intervall $[0,\pi]$ alle Teilintervalle, in denen $f(x) = \frac{1}{8}\cos^2 x$ konvex ist.

(Z1) Die sog. Legendre'schen Polynome $P_n(x)$ kann man über die Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\, f_n^{(n)}(x) \quad \text{mit} \quad f_n(x) = (x^2-1)^n$$

definieren.

(a) Zeigen Sie, dass $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $P_n(x)$ nur reelle und einfache Nullstellen besitzt, die sämtlich im Intervall $(-1,1)$ liegen.

(Z2) Man zeige, dass die Funktion $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ streng monoton wachsend ist.

Kapitel 5

Integration

5.1 Funktionenfolgen

Auch in diesem Kapitel sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sind X eine nicht leere Menge und $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion, so nennt man diese Funktion **beschränkt**, wenn das Bild $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ in $\mathbb{K}$ beschränkt ist, d.h., wenn eine Zahl $M > 0$ existiert, so dass $|f(x)| \le M \ \forall\, x \in X$ gilt.

Definition 5.1 *Sind* $\mathbf{V}$ *ein linearer Raum über* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-*Vektorraum*) *und* $\|.\| : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Abbildung, so nennt man* $(\mathbf{V}, \|.\|)$ *einen* **normierten Raum**, *wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

(N1) $\|x\| \ge 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{V}$ *und* $\|x\| = 0 \iff x = \Theta$,

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\| \quad \forall\, x \in \mathbf{V}, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,

(N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in \mathbf{V}$.

Wie gewöhnlich definieren wir für zwei Funktionen $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ die Linearkombination dieser beiden Funktionen $\alpha f + \beta g$ durch

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \quad \forall\, x \in X\,.$$

Mit $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten Funktionen $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Versehen mit obiger Vorschrift zum Bilden der Linearkombination und $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ ist $(\mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ ein normierter Raum. Im Fall $X = \mathbb{N}_0$ erhalten wir $B(X, \mathbb{C}) = \ell^\infty$ (vgl. Beispiel 2.28).

Satz 5.2 *Ist* $(\mathbf{V}, \|.\|)$ *ein normierter Raum, so ist* $(\mathbf{V}, d)$ *mit* $d(x, y) = \|x - y\|$ *ein metrischer Raum.*

Man nennt $(\mathbf{V}, \|.\|)$ einen **Banachraum**, wenn der entsprechende metrische Raum vollständig ist. Da $(\mathbb{K}^n, d_1)$, $(\mathbb{K}^n, d_2)$ und $(\mathbb{K}^n, d_\infty)$ vollständige metrische Räume sind (vgl. Aufgabe 2, Abschnitt 2.5, Beispiele 2.19, 2.21) und Folg. 3.33, sind $(\mathbb{K}^n, \|.\|_1)$, $(\mathbb{K}^n, \|.\|_2)$ und $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ mit

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|\,, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty = \max\{|\xi_k| : k = 1, \ldots, n\}\,,$$

$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, Banachräume.

Beispiel 5.3 *Der Raum* $(\mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ *ist ein Banachraum, insbesondere also auch der Raum* $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ (*vgl. Beispiel 2.28*).

Wir betrachten eine Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ von Funktionen $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Man sagt, die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ **konvergiert punktweise** gegen die Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Die **Funktionenfolge** $(f_n)_{n=1}^\infty$ heißt **gleichmäßig konvergent** gegen f, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in X$$

gilt. Offenbar folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von f_n gegen f die punktweise Konvergenz von f_n gegen f. Die gleichmäßige Konvergenz von Funktionen aus $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ ist äquivalent zur Konvergenz in der $\|.\|_\infty$-Norm.

Beispiel 5.4 *Die Funktionen*

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} 2nx & : \quad 0 \le x < (2n)^{-1} \\ 2(1-nx) & : \quad (2n)^{-1} \le x < n^{-1} \\ 0 & : \quad n^{-1} \le x \le 1 \end{cases}$$

konvergieren punktweise, aber **nicht** *gleichmäßig gegen die Funktion* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$. *Die Folge* $(g_n)_{n=1}^\infty$ *mit* $g_n(x) = n^{-1} f_n(x)$ *konvergiert gleichmäßig.*

Satz 5.5 *Es seien* (X, d) *ein metrischer Raum und* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen* $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$. *Dann ist auch* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *stetig.*

Der Beweis von Satz 5.5 zeigt, dass dieser auch wie folgt formuliert werden kann: Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Sind die Funktionen f_n in $x_0 \in X$ stetig, so ist auch f in x_0 stetig.

Beispiel 5.6 *Die stetigen Funktionen* $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ *konvergieren* **nicht** *gleichmäßig gegen die unstetige Funktion* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & : \quad 0 \le x < 1\,, \\ 1 & : \quad x = 1\,. \end{cases}$

Satz 5.7 *Es seien* $X_0 \subset X$ *eine nichtleere Teilmenge des metrischen Raumes* (X, d), $x_0 \in X$ *ein Häufungspunkt von* X_0 *und* $f_n : X_0 \longrightarrow \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, *auf* X_0 *gleichmäßig gegen* $f : X_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ *konvergierende Funktionen. Existiert* $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) =: \gamma_n \in \mathbb{K}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, *so existiert auch* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =: \gamma \in \mathbb{K}$, *und es gilt* $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$.

Hier noch eine unmittelbare Folgerung aus Satz 5.5.

Folgerung 5.8 *Es sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Die Menge* $\mathcal{BC}(X, \mathbb{K})$ *der beschränkten und stetigen Funktionen* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *(vgl. auch Folgerung 3.35) ist ein abgeschlossener Teilraum von* $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ *und somit ebenfalls ein Banachraum (vgl. Satz 3.8).*

Die Begriffe der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz lassen sich auch auf **Funktionenreihen** $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n$ mit $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ übertragen, indem man die entsprechende Folge $(s_n)_{n=1}^\infty$ der Partialsummen $s_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^n f_k(x)$ betrachtet. Insbesondere ist also die Summenfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionenreihe stetiger Funktionen stetig.

Satz 5.9 *Ist die Zahlenreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *konvergent und gilt* $|f_n(x)| \leq \alpha_n \ \forall\, x \in X\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, *so ist die Funktionenreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *auf* X *gleichmäßig konvergent.*

Beispiel 5.10 *Ist* $r > 0$ *der Konvergenzradius der Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, *so konvergiert diese Reihe gleichmäßig auf* $K_\rho(z_0)$ *für jedes* $\rho \in (0, r)$.

5.2 Integrierbare Funktionen

Im Weiteren sei $-\infty < a < b < \infty$. Unter einer **Zerlegung** Z des Intervalls $[a, b]$ verstehen wir eine Menge von Punkten $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ mit $a = x < x_1 < \ldots < x_m = b$. Die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}[a, b]$. Man nennt die Zerlegung $Z_1 \in \mathcal{Z}[a, b]$ **feiner** als die Zerlegung $Z_2 \in \mathcal{Z}[a, b]$, wenn $Z_2 \subset Z_1$ gilt.

Definition 5.11 *Eine Funktion* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *nennen wir* **Treppenfunktion**, *wenn eine Zerlegung* $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \in \mathcal{Z}[a, b]$ *und Zahlen* $\gamma_k \in \mathbb{C}$ *existieren, so dass* $f(x) = \gamma_k$ $\forall\, x \in (x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \ldots, m$, *gilt. In diesem Fall nennen wir* Z *eine* **geeignete Zerlegung** *für die Treppenfunktion* f *und definieren*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (x_k - x_{k-1})\,. \tag{5.1}$$

Die Menge aller Treppenfunktionen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}[a, b]$. Ist $Z \in \mathcal{Z}[a, b]$ eine geeignete Zerlegung für $f \in \mathcal{T}[a, b]$, so ist auch jede feinere Zerlegung geeignet für f . Bezeichnen wir also mit $\mathcal{Z}_f$ die Menge der für $f \in \mathcal{T}[a, b]$ geeigneten Zerlegungen, so folgt aus $Z \in \mathcal{Z}_f$, $Z_1 \in \mathcal{Z}[a, b]$ und $Z \subset Z_1$ stets $Z_1 \in \mathcal{Z}_f$.

Ein lineares Funktional $F : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ auf dem normierten Raum $(\mathbf{V}, \|.\|)$ nennt man beschränkt, wenn eine Konstante $\gamma > 0$ existiert, so dass $|F(x)| \leq \gamma\, \|x\| \quad \forall\, x \in \mathbf{V}$ gilt.

Satz 5.12 *Die Menge* $\mathcal{T}[a, b]$ *ist ein linearer Teilraum des Banachraumes* $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{C})$. *Die Definition des Integrals* (5.1) *ist korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der Zerlegung* $Z \in \mathcal{Z}_f$. *Ferner beschreibt* $\int_a^b : \mathcal{T}[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *ein lineares und beschränktes Funktional, d.h., für* $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g\,, \tag{5.2}$$

wobei

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (b - a)\, \|f\|_\infty \ . \tag{5.3}$$

Definiert man $|f| : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$, *so ist mit* $f \in \mathcal{T}[a, b]$ *auch* $|f| \in \mathcal{T}[a, b]$ *und es gilt*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \quad \forall\, f \in \mathcal{T}[a, b]\,. \tag{5.4}$$

Definition 5.13 *Die Abschließung der Menge* $\mathcal{T}[a, b] \subset (\mathcal{B}([a, b], \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ *bezeichnen wir mit* $\mathcal{R}[a, b]$, *und ihre Elemente nennen wir* **integrierbare Funktionen**.

Eine Funktion $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{C})$ ist also genau dann integrierbar, wenn eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ von Treppenfunktionen $f_n \in \mathcal{T}[a,b]$ existiert, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ gilt. Aus (5.3) folgt, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n =: \int_a^b f \tag{5.5}$$

existiert. Die Schreibweise $f \le g$ werden wir für reellwertige Funktion $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ verwenden, und zwar in dem Sinne, dass $f(x) \le g(x)\ \forall\, x \in X$ gilt.

Satz 5.14 *Die Definition* (5.5) *des Integrals einer Funktion $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ist korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge von Treppenfunktionen f_n. Die Menge $\mathcal{R}[a,b]$ ist ein linearer Teilraum von $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{C})$ und die Abbildung $\int_a^b : \mathcal{R}[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein lineares beschränktes Funktional. Dabei gilt*

(a) $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *und* $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \quad \forall\, f \in \mathcal{R}[a,b]$,

(b) $\left|\int_a^b f\right| \le (b-a)\, \|f\|_\infty \quad \forall\, f \in \mathcal{R}[a,b]$,

(c) $\int_a^b f \le \int_a^b g \quad \forall\, f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *mit* $f \le g$,

(d) $f \in \mathcal{R}[a_1, b_1]$ *für alle* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *und* $a \le a_1 < b_1 \le b$,

(e) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *und* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ *für* $a < c < b$ *und* $f \in \mathcal{R}[a,c] \cap \mathcal{R}[c,b]$,

(f) $fg \in \mathcal{R}[a,b] \quad \forall\, f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, *wobei* $(fg)(x) := f(x)g(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$.

Für $b \le a$ definiert man $\int_a^b f = -\int_b^a f$. Dann gilt $\int_a^a f = 0$ und

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 5.15 *Aus $f = u + \mathbf{i}v \in \mathcal{R}[a,b]$ mit $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ folgt $u, v \in \mathcal{R}[a,b]$ und*

$$\int_a^b f = \int_a^b u + \mathbf{i} \int_a^b v \quad \textit{sowie} \quad \int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f}\,.$$

Satz 5.16 *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann integrierbar, wenn die einseitigen Grenzwerte $f(x \pm 0)$ für alle $x \in (a,b)$ und die einseitigen Grenzwerte $f(a+0)$ sowie $f(b-0)$ existieren.*

Folgerung 5.17 *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist integrierbar, ebenso jede monotone Funktion $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Folgerung 5.18 *Ist $f : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ eine stetige Funktion, die nicht identisch verschwindet, so gilt $\int_a^b f > 0$.*

Satz 5.19 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)\,.$$

5.3 Stammfunktionen

Die Differenzierbarkeit einer Funktion $f = u + \mathbf{i}v : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ (mit $u, v : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$) in $x_0 \in (a,b)$ ist äquivalent zur Differenzierbarkeit von u und v in x_0, wobei $f'(x_0) = u'(x_0) + \mathbf{i}v'(x_0)$ gilt. (Man vergleiche dazu die Definition 4.1.) Insbesondere folgt aus $f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$, dass $f \equiv \mathrm{const}$ auf (a,b).

Satz 5.20 *Ist $f \in \mathcal{R}[a,b]$, so ist $\Phi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_a^x f$ stetig. Falls f in $x_0 \in (a,b)$ stetig ist, so ist Φ in x_0 differenzierbar und es gilt $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.*

Beispiel 5.21 *Für die Treppenfunktion $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & : & x \le 1 \\ 2 & : & x > 1 \end{array} \right\}$ gilt*

$$\int_0^x f = \left\{ \begin{array}{ccc} x & : & 0 \le x \le 1\,, \\ 2x - 1 & : & 1 < x \le 2\,. \end{array} \right.$$

Definition 5.22 *Eine stetige Funktion $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion der Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn $F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.*

Folgerung 5.23 *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine Stammfunktion auf $[a,b]$.*

Folgerung 5.24 *Ist $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion der Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$, so ist die Menge aller Stammfunktionen der Funktion f gleich $\{F + c : c \in \mathbb{C}\}$.*

Die Menge aller Stammfunktionen der Funktion f wird auch mit $\int f(x)\,dx$ bezeichnet. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so schreibt man abkürzend für die Menge der Stammfunktionen von f

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,,$$

z.B. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$. Die Bestimmung einer Stammfunktion $F(x)$ auf einem gewissen Intervall (a,b) zu einer gegebenen Funktion $f(x)$, d.h. das Auffinden einer Funktion $F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$, nennt man auch **unbestimmte Integration**.

Satz 5.25 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechung) *Sind $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f, so gilt*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

5.4 Integrationsmethoden

Hier soll noch auf eine andere Schreibweise der Ableitung einer Funktion eingegangen werden. Nach Definiton 4.1 ist $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ genau dann in $z_0 \in G$ differenzierbar, wenn

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)\,, \quad z \in G\,,$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion $g : G \longrightarrow \mathbb{K}$ gilt. Das ist äquivalent dazu, dass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z_0) + h(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \to z_0} \frac{h(z)}{z - z_0} = 0$$

gilt oder, einfach anders geschrieben (mit $\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0)$ und $\Delta z = z - z_0$)

$$\Delta f(z_0) = g(z_0)\Delta z + o(\Delta z)\,.$$

Dabei versteht man unter $o(\Delta z)$ eine (unendlich kleine) Größe mit der Eigenschaft

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} = 0\,.$$

Die Größe $df(z_0) := g(z_0)\Delta z = f'(z_0)\Delta z$ nennt man **Differential** der Funktion f an der Stelle z_0. Offenbar ist das Differential der Funktion $z \mapsto z$ gleich $dz = \Delta z$, so dass $df(z_0) = f'(z_0)dz$, und man erhält

$$f'(z_0) = \frac{df(z_0)}{dz} \quad \text{bzw.} \quad f'(z) = \frac{df(z)}{dz}\,.$$

Kurz schreibt man auch nur $f' = \dfrac{df}{dz}$. Die Kettenregel für die Funktion $w \mapsto f(z(w))$ lässt sich nun in der Form

$$\frac{df}{dw} = \frac{df}{dz}\frac{dz}{dw}$$

schreiben. Ist die Abbildung $x \mapsto y(x)$ umkehrbar, so ist die Ableitung der Umkehrfunktion $y \mapsto x(y)$ gleich $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ (vgl. Satz 4.9).

5.4.1 Grundintegrale

(a) Aus $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\alpha+1}\right) = (\alpha+1)x^\alpha$ folgt für $\alpha \neq -1$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\,,$$

wobei

$$x \in [a,b] \subset \begin{cases} \mathbb{R} & : \quad \alpha \in \{0,1,2,\ldots\}\,, \\ (-\infty,0)\cup(0,\infty) & : \quad \alpha \in \{-2,-3,-4,\ldots\}\,, \\ [0,\infty) & : \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

(b) Für $x \in (-\infty,0)\cup(0,\infty)$ gilt $\dfrac{d\ln|x|}{dx} = \dfrac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x = \dfrac{1}{x}$, also $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ für $x \in [a,b] \subset (-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

(c) Aus $\dfrac{d\sin x}{dx} = \cos x$ und $\dfrac{d\cos x}{dx} = -\sin x$ folgt

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad \text{und} \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad \text{für} \quad x \in [a,b] \subset \mathbb{R}\,.$$

Ebenso erhalten wir

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c\,,\ \ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}\,,$

und

(e) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c\,,\ \ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}\,.$

5.4.2 Einfachste Integrationsregeln

(a) $\alpha \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\int \alpha\, f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$

(b) $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\; dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

(c) Sind $\displaystyle\int f(x)\, dx = F(x) + c$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\frac{d\,F(\alpha x + \beta)}{dx} = \alpha F'(\alpha x + \beta) = \alpha f(\alpha x + \beta)\,,$$

also, falls $\alpha \neq 0$,

$$\int f(\alpha x + \beta)\, dx = \frac{1}{\alpha}\, F(\alpha x + \beta) + c$$

(vgl. auch Abschnitt 5.4.3).

Beispiel 5.26

(a) $\displaystyle\int \left(x^{\frac{1}{3}} + 2\right)^2\, dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}} + 4\,x^{\frac{1}{3}} + 4\right)\, dx = \frac{3}{5}\,x^{\frac{5}{3}} + 3\,x^{\frac{4}{3}} + 4\,x + c$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + c$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\,\arctan\frac{x}{2} + c$

(d) $\displaystyle\int \frac{2\,x^2 - 3\,x + 1}{x+1}\, dx = \int \left(2\,x - 5 + \frac{6}{x+1}\right)\, dx = x^2 - 5\,x + 6\ln|x+1| + c$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\int \left(\frac{1}{x-\sqrt{5}} - \frac{1}{x+\sqrt{5}}\right)\, dx = \frac{1}{2\sqrt{5}}\,\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + c$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 5\,x + 6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c$

(g) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

5.4.3 Die Substitutionsregel

Es seien $\displaystyle\int f(x)\, dx = F(x) + c$ und $x(y)$ eine reellwertige differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\frac{d\,F(x(y))}{dy} = F'(x(y))x'(y) = f(x(y))x'(y)\,,$$

d.h.

$$\int f(x(y))x'(y)\, dy = F(x(y)) + c\,.$$

Ist $y \mapsto x(y)$ umkehrbar, so gewinnt man aus $F(x(y))$ die gesuchte Funktion $F(x)$. Man substituiere also $x = x(y)$ und ersetze dx durch $x'(y)\, dy$.

Merke: $x = u(y)$ **impliziert** $dx = u'(y)\, dy$, **bzw.** $y = v(x)$ **impliziert** $dy = v'(x)\, dx$.

Beispiel 5.27

(a) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos x\,dx = \left|\begin{array}{rcl} y &=& \sin x \\ dy &=& \cos x\,dx \end{array}\right| = \int y^2\,dy = \frac{y^3}{3} + c = \frac{1}{3}\,\sin^3 x + c$

(b) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \left|\begin{array}{rcl} y &=& \cos x \\ dy &=& -\sin x\,dx \end{array}\right|$

$$= -\int (1-y^2)\,dy = \frac{z^3}{3} - y + c = \frac{1}{3}\,\cos^3 x - \cos x + c$$

(c) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left|\begin{array}{rcl} y &=& f(x) \\ dy &=& f'(x)\,dx \end{array}\right| = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c = \ln|f(x)| + c$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \left|\begin{array}{rcl} x &=& \tan y \\ dx &=& (1+\tan^2 y)\,dy = (1+x^2)\,dy \end{array}\right| = \int \frac{dy}{1+\tan^2 y} = \int \cos^2 y\,dy$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2y)\,dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\,\sin 2y + c = \frac{1}{2}(y + \sin y\cos y + c)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + c$$

5.4.4 Partielle Integration

Aus der Produktregel für die Differentiation folgt

$$u\,v' = (u\,v)' - u'\,v\,,$$

also

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx\,.$$

Beispiel 5.28

(a) $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$

(b) $\displaystyle\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - \int dx = x\ln|x| - x + c$

(c) *Mittels partieller Integration ergibt sich* $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx = \sin^2 x - \int \cos x\sin x\,dx$ *und somit*

$$\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c\,.$$

(d) *Durch zweimalige partielle Integration folgt*

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx\,,$$

also

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\,e^x(\sin x + \cos x) + c\,.$$

(e) *Wir setzen* $J_n(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ *Dann gilt*

$$J_1(x) = \arctan x + c$$

und nach Beispiel 5.27,(d)

$$J_2(x) = \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + c\,.$$

Mit $u(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$ *und* $v(x) = x$ *erhalten wir*

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \int u(x)v'(x)dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + \int \frac{2n\,x^2\,dx}{(x^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\Big[J_n(x) - J_{n+1}(x)\Big] \end{aligned}$$

und somit die Rekursionsformel

$$J_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,J_n(x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

5.4.5 Integration rationaler Funktionen

Unter einer rationalen Funktion verstehen wir eine Funktion

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,,$$

die sich als Quotient zweier Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ (mit reellen Koeffizienten) schreiben lässt. Ein solcher Quotient kann immer in der Form

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

mit Polynomen $P_0(x)$ und $P_1(x)$ dargestellt werden, wobei der Grad des Polynoms $P_1(x)$ kleiner als der Grad des Polynoms $Q(x)$ ist. Jedes Polynom $Q(x)$ gestattet eine Zerlegung in lineare und quadratische Faktoren der Gestalt

$$Q(x) = a(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}\,,$$

wobei $a, a_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$ und $p_i^2 - 4\,q_i < 0$ gilt. Damit lässt sich die **Partialbruchzerlegung**

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{n_i}\frac{A_{i\ell}}{(x-a_i)^\ell} + \sum_{i=1}^{j}\sum_{\ell=1}^{m_i}\frac{B_{i\ell}x + C_{i\ell}}{(x^2+p_ix+q)^\ell}$$

mit gewissen reellen Zahlen $A_{i\ell}$, $B_{i\ell}$, $C_{i\ell}$ gewinnen.

Folgerung 5.29 *Die Integration rationaler Funktionen kann stets auf Integrale der Form*

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} \quad \textit{und} \quad \int \frac{B\,x + C}{(x^2+p\,x+q)^n}\,dx\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \; p^2 - 4\,q < 0\,,$$

zurückgeführt werden. Dabei gilt

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c$

und

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + c$ *für* $n = 2, 3, \ldots$

(c) *Unter Verwendung von*

$$x^2 + p\,x + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\left[\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{B\,x + C}{x^2 + p\,x + q}\,dx &= \frac{B}{2}\int \frac{2\,x + p}{x^2 + p\,x + q}\,dx + \int \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{x^2 + p\,x + q}\,dx \\
&= \frac{B}{2}\,\ln(x^2 + p\,x + q) + \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{q - \frac{p^2}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{B}{2}\,\ln(x^2 + p\,x + q) + \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\,\arctan\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + c\,.
\end{aligned}$$

(d) *Für* $n = 2, 3, \ldots$ *erhalten wir*

$$\begin{aligned}
\int \frac{B\,x + C}{(x^2 + p\,x + q)^n}\,dx &= \frac{B}{2}\int \frac{2\,x + p}{(x^2 + p\,x + q)^n}\,dx + \int \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{(x^2 + p\,x + q)^n}\,dx \\
&= \frac{B}{2(1-n)}\,(x^2 + p\,x + q)^{1-n} + \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^n}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]^n} \\
&= \frac{B}{2(1-n)}\,(x^2 + p\,x + q)^{1-n} + \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n-\frac{1}{2}}}\,J_n(y)
\end{aligned}$$

mit $y = \dfrac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}$ *(vgl. Bsp. 5.28,(e)).*

Beispiel 5.30 *Wir berechnen* $\displaystyle\int \frac{2\,x^2 + 2\,x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx\,.$ *Der Ansatz*

$$\frac{2\,x^2 + 2\,x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B\,x + C}{x^2 + 1} + \frac{D\,x + E}{(x^2+1)^2}$$

liefert $A=1$, $B=-1$, $C=-2$, $D=-3$, $E=-4$ *und somit*

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\,x^2+2\,x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx - \int \frac{3\,x+4}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\int \frac{2\,x}{x^2+1}\,dx - 2J_1(x) - \frac{3}{2}\int \frac{2\,x}{(x^2+1)^2} - 4J_2(x) \\
&= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\,\ln|x^2+1| - 2\,\arctan x + \frac{3}{3}\,\frac{1}{x^2+1} \\
&\qquad\qquad -2\left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right) + c \\
&= \ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}} - 4\,\arctan x - \frac{2\,x-\frac{3}{2}}{x^2+1} + c\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 5.31 *Wir haben*

$$\int \frac{x^5}{x^4+1}\,dx = \int \frac{x(x^4+1)-x}{x^4+1}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{x^4+1}\,dx\,.$$

Es gilt

$$x^4+1 = x^4+2\,x^2+1-2\,x^2 = (x^2+1)^2 - \left(\sqrt{2}\,x\right)^2 = \left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)\,.$$

Damit kann man die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{x}{x^4+1}$ *finden. Hier kommt man aber schneller mittels Substitution zum Ziel. Es ist nämlich*

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \left|\begin{array}{rcl} x^2 &=& y \\ 2\,x\,dx &=& dy \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{2}\,\arctan y + c = \frac{1}{2}\,\arctan(x^2) + c\,.$$

5.4.6 Integration trigonometrischer Funktionen

Eine Funktion der Gestalt

$$R(x,y) = \frac{\displaystyle\sum_{i,j=0}^{m} \alpha_{ij} x^i y^j}{\displaystyle\sum_{i,j=0}^{n} \beta_{ij} x^i y^j}$$

mit $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ nennt man rationale Funktion in den Veränderlichen x und y . Wir betrachten Integranden der Form $R(\cos x, \sin x)$. Mittels der Substitution $t = \tan\dfrac{x}{2}$ transformieren wir das Integral $\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ in ein Integral mit rationalem Integranden. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{1}{2}(1+t^2)\,dx\,, \\
\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\,\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,t}{1+t^2}\,, \\
\cos x &= 2\,\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

und somit

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = 2 \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2\,t}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Folgende Spezialfälle sind von Interesse. Dabei bezeichnen $R_j(x,y)$ rationale Funktionen in x und y.

(a) $R(x,y) = R_1(x^2, y)x$:

$$\begin{aligned}\int R(\cos x, \sin x)\, dx &= \int R_1(1-\sin^2 x, \sin x) \cos x\, dx \\ &= \left| \begin{array}{rcl} t &=& \sin x \\ dt &=& \cos x\, dx \end{array} \right| = \int R_1(1-t^2, t)\, dt\end{aligned}$$

(b) $R(x,y) = R_2(x, y^2)y$: analog zu (a) mit $t = \cos x$

(c) $R(x,y) = R_3(x^2, x^{-1}y)$:

$$\begin{aligned}\int R(\cos x, \sin x)\, dx &= \int R_3(\cos^2 x, \tan x)\, dx = \int R_3\left(\frac{1}{1+\tan^2 x}, \tan x\right) dx \\ &= \left| \begin{array}{rcl} t &=& \tan x \\ dt &=& (1+t^2)\, dx \end{array} \right| = \int R_3\left(\frac{1}{1+t^2}, t\right) \frac{dt}{1+t^2}\end{aligned}$$

Beispiel 5.32

(a) $$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\tan^4 x \cos^6 x} = \left| \begin{array}{rcl} t &=& \tan x \\ dt &=& (1+t^2)\, dx \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\, dt = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3\,t^3} + c = \tan x - 2\, \cot x - \frac{1}{3}\, \cot^3 x + c$$

(b) $$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{rcl} t &=& \tan \frac{x}{2} \\ \cos x &=& \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dt &=& \dfrac{1}{2}(1+t^2)\, dx \end{array} \right| = \int \frac{2}{2 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= 2 \int \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} z = \dfrac{t}{\sqrt{3}} \\ dz = \frac{dt}{\sqrt{3}} \end{array} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2}\right) + c$$

(c) $$\int \frac{dx}{1+2\,\cos x} = \left| \begin{array}{rcl} t &=& \tan\frac{x}{2} \\ \cos x &=& \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dt &=& \dfrac{1}{2}(1+t^2)\,dx \end{array} \right| = 2\int \frac{dt}{3-t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{3}-t} + \frac{1}{\sqrt{3}+t} \right) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t} \right| + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\tan\frac{x}{2}} \right| + c$$

(d) $$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - 2\int x\,\sin x\,dx$$

$$= x^2 \sin x + 2\,x\cos x - 2\textstyle\int \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2\,x\,\cos x - 2\,\sin x + c$$

(e) *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ ergibt zweimalige partielle Integration*

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha\,x} \cos\beta\,x\,dx &= \frac{1}{\beta}\,e^{\alpha\,x} \sin\beta\,x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha\,x} \sin\beta\,x\,dx \\ &= \frac{1}{\beta}\,e^{\alpha\,x} \sin\beta\,x + \frac{\alpha}{\beta^2}\,e^{\alpha\,x} \cos\beta\,x - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha\,x} \cos\beta\,x\,dx\,, \end{aligned}$$

so dass

$$\int e^{\alpha\,x} \cos\beta\,x\,dx = \frac{e^{\alpha\,x}(\beta\,\sin\beta\,x + \alpha\,\cos\beta\,x)}{\alpha^2+\beta^2} + c\,.$$

5.4.7 Zur bestimmten Integration

Die Formel der partiellen Integration schreibt sich für bestimmte Integrale in der Form

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx\,.$$

Sind $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ eine stetige, monotone und auf (c,d) differenzierbare Funktion mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, $\psi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ die entsprechende Umkehrfunktion und $F : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, so folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Anwendung der Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(\psi(x))]_a^b = F(\psi(b)) - F(\psi(a)) = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Die Monotonie der Funktion φ ist hierbei eine wesentliche Voraussetzung, um die Existenz ihrer Umkehrfunktion ψ zu sichern. Eine formale Anwendung obiger Formel kann zu falschen Resultaten führen. So ist offenbar

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{2}\,,$$

aber

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx = \left| \begin{array}{rcl} t &=& \sin x \\ dt &=& \cos x\,dx \\ &=& \sqrt{1-t^2}\,dx \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\,.$$

Dabei hat man nicht beachtet, dass $dt = \sqrt{1-t^2}\,dx$ nur auf dem Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt, auf $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ aber $dt = -\sqrt{1-t^2}\,dx$ ist. Richtig ist

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^1 + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

Ohne Monotonievoraussetzung an $\varphi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ lässt sich die Substitutionsregel in der Form

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx$$

verwenden.

Ferner kann eine formale Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bei Nichtbeachtung von singulären Stellen (z.B. Polstellen) des Integranden zu Fehlern führen. So liefert zwar

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \left[2\sqrt{|x|}\,\operatorname{sgn} x\right]_{-1}^1 = 2 - (-2) = 4$$

ein richtiges Ergebnis, aber

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2$$

offenbar ein falsches. Im ersten Fall ist die "Stammfunktion" stetig, obwohl der Integrand in $x = 0$ eine Unstetigkeit aufweist. Im zweiten Fall dagegen hat auch die "Stammfunktion" in $x = 0$ eine Unstetigkeit.

5.5 Übungsaufgaben

1. Man bestimme mit Hilfe (elementarer) Zurückführung auf Grundintegrale

   (a) $\displaystyle\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$, (c) $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$,

   (d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$, (e) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$, (f) **(HA)** $\displaystyle\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx$,

   (g) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$, (h) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$, (i) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$.

2. Man bestimme mit Hilfe geeigneter Substitutionen

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x\ln x)\,\ln(\ln x)}$,

   (e) $\displaystyle\int \tan x\,dx$, (f) $\displaystyle\int \sin^5 x\cos x\,dx$, (g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ (h) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$,

   (i) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}$, (j) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$, (k) **(HA)** $\displaystyle\int x\,e^{-x^2}\,dx$,

   (l) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh x}$.

3. Man bestimme mittels partieller Integration

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx\,,$ (c) $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx\,,$

(d) $\displaystyle\int \sin x\,\ln(\tan x)\,dx\,,$ (e) $\displaystyle\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx\,,$ (f) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx\,,$

(g) **(HA)** $\displaystyle\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx\ (\alpha,\beta\in\mathbb{R}\,,\ \beta\neq 0)\,,$ (h) **(HA)** $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\,dx\,,$

(i) **(HA)** $\displaystyle\int x^2\sin 2x\,dx\,,$ (j) **(HA)** $\displaystyle\int \arctan x\,dx\,,$ **(Z)** $\displaystyle\int x^n e^x\,dx\,.$

4. Man berechne mittels Partialbruchzerlegung

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}\,,$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}\,,$

(d) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2+3x+2}\right)^2 dx\,,$ (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}\,,$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}\,,$

(g) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,,$ (h) **(HA)** $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx\,,$

(i) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}\,,$ (j) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}\,.$

5. Man berechne

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}\,,$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2+1)}\,,$

(d) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1-x}\,dx\,,$ (e) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+4x+5}\,dx\,,$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\,dx\,,$ (l) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin 2x}\,,$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,,$ (h) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx\,,$ (i) **(HA)** $\displaystyle\int (\arcsin x)^2\,dx\,,$

(j) **(HA)** $\displaystyle\int x\,(\arctan x)^2\,dx\,,$ (k) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}\,.$

6. Entwickeln Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung von

(a) $\displaystyle I_n(x)=\int \frac{dx}{\cos^n x}\,,$ (b) **(HA)** $\displaystyle S_n(x)=\int \sin^n x dx\,.$

(Z1) Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \frac{x\,\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,$ (c) $\displaystyle\int (\tan x)\,\tan(x+a)\,dx\,,$

(d) $\displaystyle\int x f''(x)\,dx\,,$ (e) $\displaystyle\int \frac{(9\sin^2 x-3\sin^3 x)\cos x-5\sin 2x+10\cos x}{\sin^4 x-2\sin^3 x+2\sin x-1}\,dx\,,$

(f) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx\,,$ (g) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}\,.$

7. Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x)=2-x^2$ und $g(x)=x^2-2x+\frac{3}{2}$ eingeschlossen wird.

8. Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x|x|\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,,$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{a+bx}\,,$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\,\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx\,.$

9. Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ gilt

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx\,.$

10. Beweisen Sie folgende Abschätzungen:

    (a) $\displaystyle\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6}$ (b) $\displaystyle\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{\sqrt{2}}{2}$

    (**Z**) $\displaystyle 0 < \int_{100\,\pi}^{200\,\pi} \frac{\cos x}{x}\,dx < \frac{1}{100\,\pi}$

11. Bestimmen Sie

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_a^x \arctan y\,dy\,,$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}\,,$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt\,.$

12. Sei $f:[0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ stetig. Man zeige, dass die Funktion

$$\varphi:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}\,,\quad x\mapsto\frac{\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt}$$

    monoton wachsend ist.

(**Z2**) Es sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ beschränkt und konkav. Man zeige, dass dann

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

gilt.

5.6 Das Riemann-Stieltjes-Integral

In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit $\mu:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ eine monoton nicht fallende Funktion. Für eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z=\{x_0,x_1,\ldots,x_m\}\in\mathcal{Z}[a,b]$ definieren wir die Größen

$$m_k(f;Z):=\inf\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}\;,\quad M_k(f;Z):=\sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}\;,$$

die **Schwankung** $\omega_k(f;Z)=M_k(f;Z)-m_k(f;Z)$ der Funktion f auf dem Teilintervall $[x_{k-1},x_k]$ und die **Darbouxsche Unter-** und **Obersumme**

$$S_u(f;Z,\mu):=\sum_{k=1}^m m_k(f;Z)\,[\mu(x_k)-\mu(x_{k-1})]\;,\;S_o(f;Z,\mu):=\sum_{k=1}^m M_k(f;Z)\,[\mu(x_k)-\mu(x_{k-1})]\;.$$

Offenbar gilt

$$-\|f\|_\infty\,[\mu(b)-\mu(a)]\le S_u(f;Z,\mu)\le S_o(f;Z,\mu)\le\|f\|_\infty\,[\mu(b)-\mu(a)]\quad\forall\,Z\in\mathcal{Z}[a,b]\,,$$

so dass sie folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 5.33 *Das* **untere** *und das* **obere Darbouxsche Integral** *der Funktion f bzgl. μ sind definiert als*

$$\underline{\int_a^b} f\,d\mu := \sup\left\{S_u(f;Z,\mu) : Z \in \mathcal{Z}[a,b]\right\} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\int_a^b} f\,d\mu := \inf\left\{S_o(f;Z,\mu) : Z \in \mathcal{Z}[a,b]\right\}.$$

Sind diese beiden Zahlen gleich, so nennt man f **Riemann-Stieltjes-integrierbar** *bzgl. μ und verwendet die Bezeichnung*

$$\int_a^b f\,d\mu = \int_a^b f(x)\,d\mu(x) := \underline{\int_a^b} f\,d\mu = \overline{\int_a^b} f\,d\mu$$

für das **Riemann-Stieltjes-Integral** *der Funktion f bzgl. μ.*

Ist $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{C})$, so sagen wir genau dann, dass f bzgl. μ Riemann-Stieltjes-integrierbar ist, wenn $\mathsf{Re}\,f$ und $\mathsf{Im}\,f$ diese Eigenschaft haben, und setzen

$$\int_a^b f\,d\mu := \int_a^b \mathsf{Re}\,f\,d\mu + \mathbf{i}\int_a^b \mathsf{Im}\,f\,d\mu\,.$$

Die Menge der auf $[a,b]$ bzgl. μ Riemann-Stieltjes-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}_\mu[a,b]$. Im Fall $\mu(x) = x$ sprechen wir von **Riemann-integrierbaren Funktionen** und bezeichnen die entsprechende Menge mit $\mathbb{R}[a,b]$.

Folgerung 5.34 *Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.*

(a) *Ist die Zerlegung $Z_1 \in \mathcal{Z}[a,b]$ feiner als die Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}[a,b]$, so gilt*

$$S_u(f;Z,\mu) \le S_u(f;Z_1,\mu) \le S_o(f;Z_1,\mu) \le S_o(f;Z,\mu)\,.$$

Insbesondere ist eine beliebige Untersumme nicht größer als eine beliebige Obersumme, so dass

$$\underline{\int_a^b} f\,d\mu \le \overline{\int_a^b} f\,d\mu\,.$$

(b) *Die Funktion f ist genau dann bzgl. μ Riemann-Stieltjes-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \in \mathcal{Z}[a,b]$ existiert, so dass*

$$S_o(f;Z) - S_u(f;Z) = \sum_{k=1}^m \omega_k(f)[\mu(x_k) - \mu(x_{k-1})] < \varepsilon$$

gilt.

(c) *Die Funktion f ist genau dann bzgl. μ Riemann-Stieltjes-integrierbar, wenn eine Zahl I existiert, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \in \mathcal{Z}[a,b]$ gibt mit*

$$\left| I - \sum_{k=1}^m f(\xi_k)[\mu(x_k) - \mu(x_{k-1})]\right| < \varepsilon \quad \forall\, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\,,\ k = 1, \ldots, m\,.$$

In diesem Fall ist dann $I = \int_a^b f\,d\mu$.

(d) *Es seien $f \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$, $f([a,b]) \subset [c,d]$, $\Phi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(x) = \Phi(f(x))$, $x \in [a,b]$. Dann ist $g \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$.*

Beispiel 5.35 *Ist* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \gamma$ *konstant, so gilt* $\int_a^b f\,d\mu = \gamma[\mu(b) - \mu(a)]$. *Die Funktion* $r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & x \text{ rational} \\ 1 & : & x \text{ irrational} \end{array} \right\}$ *ist nicht Riemann-integrierbar.*

Satz 5.36 *Die Menge* $\mathbb{R}_\mu[a,b]$ *ist ein linearer Teilraum des Raumes* $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{C})$. *Das Funktional* $\int_a^b d\mu : \mathbb{R}_\mu[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist linear und beschränkt. Dabei gilt*

(a) $\int_a^b f\,d\mu \le \int_a^b g\,d\mu \quad \forall\, f,g \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$ *mit* $f \le g$,

(b) $|f| \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$ *und* $\left|\int_a^b f\,d\mu\right| \le \int_a^b |f|\,d\mu \le \|f\|_\infty\,[\mu(b) - \mu(a)] \quad \forall\, f \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$,

(c) $\int_a^b f\,d(\alpha\mu) = \alpha \int_a^b f\,d\mu \quad \forall\, f \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$, $\forall \alpha >\ge 0$,

(d) $\int_a^b f\,d(\mu+\delta) = \int_a^b f\,d\mu + \int_a^b f\,d\delta \quad \forall\, f \in \mathbb{R}_\mu[a,b] \cap \mathbb{R}_\delta[a,b]$,

(e) $f \in \mathbb{R}_\mu[a_1,b_1]$ *für alle* $f \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$ *und* $a \le a_1 < b_1 \le b$,

(f) $\int_a^b f\,d\mu = \int_a^c f\,d\mu + \int_c^b f\,d\mu \quad \forall\, f \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$ *und* $a < c < b$,

(g) $f\,g \in \mathbb{R}_\mu[a,b] \quad \forall\, f,g \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$.

Folgerung 5.37 *Sind* $f_n \in \mathbb{R}_\mu[a,b] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{C})$ *und* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, *so folgt* $f \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,d\mu = \int_a^b f\,d\mu\,.$$

Somit ist $\mathbb{R}_\mu[a,b]$ *ein abgeschlossener Teilraum von* $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$.

Satz 5.38 *Die Funktion* $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{C})$ *habe nur endlich viele Unstetigkeitsstellen auf* $[a,b]$ *und* μ *sei an diesen Stellen stetig. Dann gilt* $f \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$.

Folgerung 5.39 *Jede stetige Funktion* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *gehört zu* $\mathbb{R}_\mu[a,b]$. *Ist* $\mu : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, so gilt* $\mathcal{R}[a,b] \subset \mathbb{R}_\mu[a,b]$. *Insbesondere gilt* $\mathcal{R}[a,b] \subset \mathbb{R}[a,b]$, *und auf* $\mathcal{R}[a,b]$ *fallen das in Definition 5.13 erklärte Integral und das Riemann-Integral zusammen.*

Beispiel 5.40 *Die Funktion* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \sin\frac{1}{x} & : & x > 0 \\ 0 & : & x = 0 \end{array} \right\}$ *ist Riemann-integrierbar über* $[0,1]$, *aber nicht integrierbar im Sinne von Definition 5.13.*

Beispiel 5.41 *Es seien* $h(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & x \le 0 \\ 1 & : & x > 0 \end{array} \right\}$ *und* $\mu_s(x) = h(x-s)$. *Ist* $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{C})$ *in* $s \in (a,b)$ *stetig, so gilt*

$$\int_a^b f\,d\mu_s = f(s)\,.$$

Sind außerdem $\gamma_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ *konvergent,* $s_n \in (a,b)$ *und* $\gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n h(x - s_n)$ *sowie* $f[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig, so gilt*

$$\int_a^b f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f(s_n)\,.$$

Satz 5.42 *Es seien* $\mu' \in \mathbb{R}[a,b]$ *und* $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{C})$. *Dann gilt* $f \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$ *genau dann, wenn* $f\,\mu' \in \mathbb{R}[a,b]$ *erfüllt ist. In diesem Fall gilt dann*

$$\int_a^b f\,d\mu = \int_a^b f(x)\mu'(x)\,dx = \int_a^b f\mu'\,.$$

Satz 5.43 (Substitutionsregel) *Die Funktion* $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ *sei monoton wachsend, stetig und surjektiv (und damit bijektiv). Ferner seien* $f \in \mathbb{R}_\mu[a,b]$, $\delta(y) = \mu(\varphi(y))$ *und* $g(y) = f(\varphi(y))$. *Dann ist* $g \in \mathbb{R}_\delta[c,d]$, *und es gilt*

$$\int_c^d g\,d\delta = \int_a^b f\,d\mu\,.$$

5.7 Funktionenfolgen (Fortsetzung)

5.7.1 Vertauschen von Grenzübergängen

Wir waren bereits in Abschnitt 5.1 auf die Begriffe der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen bzw. -reihen eingegangen. Die Aussagen des Satzes 5.5 und der Folgerung 5.37 lassen sich auch in der Form

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

bzw.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_a^b f_n\,d\mu = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

schreiben. Für beide Aussagen wurde jeweils die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge vorausgesetzt. Dass solche Vertauschungen von Grenzübergängen auch in anderen Zusammenhängen keineswegs ohne zusätzliche Voraussetzungen möglich sind, sollen folgende Beispiele zeigen.

Beispiel 5.44 *Die Funktionen* $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto nx(1-x^2)^n$ *konvergieren punktweise gegen die Funktion* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$. *Es gilt aber*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n\,.$$

Beispiel 5.45 *Die Funktionen* $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ *konvergieren auf jedem Intervall* $[a,b]$ *gleichmäßig gegen Null, ihre Ableitungen* $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$ *aber nicht (auch nicht punktweise).*

Satz 5.46 *Die Funktionen* $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *seien differenzierbar. Es existiere ein* $x_0 \in (a,b)$, *so dass* $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert. Die Folge* $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ *konvergiere gleichmäßig auf* (a,b). *Dann konvergiert* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *gleichmäßig auf* (a,b) *gegen eine differenzierbare Funktion* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, *und es gilt*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \forall\, x \in (a,b)\,.$$

5.7.2 Fourier-Reihen

Eine Funktion $p : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ der Gestalt

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{\mathbf{i}kx}, \tag{5.6}$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma_k \in \mathbb{C}$, nennt man **trigonometrisches Polynom** n-ten Grades, falls $\gamma_n \neq 0$ oder $\gamma_{-n} \neq 0$. Die Koeffizienten γ_k in der Darstellung (5.6) genügen wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathbf{i}mx}\, dx = \begin{cases} 2\pi & : \quad m = 0 \\ 0 & : \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases} \tag{5.7}$$

der Beziehung

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{-\mathbf{i}kx}\, dx. \tag{5.8}$$

Die Formel (5.7) besagt, dass das Funktionensystem $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mathbf{i}nx} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ bezüglich des inneren Produktes $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$ ein **orthonormales Funktionensystem** ist. Ist nun die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige 2π-periodische Funktion mit der Eigenschaft $f \in \mathbb{R}[-\pi, \pi]$, so sind die $\gamma_k =: \widehat{f}_k$ in (5.8) für alle $k \in \mathbb{Z}$ erklärt, und man kann sich die Frage stellen, ob

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k e^{\mathbf{i}kx} =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{\mathbf{i}kx} \tag{5.9}$$

gilt. Die Reihe in (5.9) heißt **Fourier-Reihe** der Funktion f. Die Koeffizienten

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\mathbf{i}kx}\, dx$$

nennt man die **Fourier-Koeffizienten** der Funktion f. Die n-te Partialsumme der Fourier-Reihe in (5.9) bezeichnen wir mit $S_n(f; x)$,

$$S_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k e^{\mathbf{i}kx}.$$

Satz 5.47 *Ist $f \in \mathbb{R}[-\pi, \pi]$, so gilt*

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f; x)|^2\, dx \le \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{\mathbf{i}kx} \right|^2 dx \quad \forall\, \gamma_k \in \mathbb{C}$,

wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $\gamma_k = \widehat{f}_k \ \forall\, k = -n, \ldots, n$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_n|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx$ *(Bessel'sche Ungleichung),*

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}_n = 0$.

Es gilt (unter Berücksichtigung der Periodizität von $f(x)$)

$$S_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x - t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) D_n(t)\, dt.$$

Dabei bezeichnet $D_n(x)$ den sogenannten **Dirichlet-Kern**

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathbf{i}kx} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,, \tag{5.10}$$

wobei offenbar $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 2\pi$ gilt.

Satz 5.48 *Die 2π-periodische Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ sei stetig differenzierbar mit eventueller Ausnahme endlich vieler Punkte auf einem Intervall der Länge 2π. In diesen Punkten mögen die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f und f' existieren. Ferner sei in einem solchen Ausnahmepunkt $\widetilde{x}$ stets*

$$f(\widetilde{x}) = \frac{1}{2}\left[f(\widetilde{x}+0)+f(\widetilde{x}-0)\right].$$

Dann konvergiert die Fourier-Reihe punktweise gegen $f(x)$ und auf jedem Intervall $[\alpha,\beta]$, $-\infty<\alpha<\beta<\infty$, welches keine Unstetigkeitspunkte von f enthält, gleichmäßig.

Ist $f\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]$ **reellwertig**, so folgt $\widehat{f}_{-n}=\overline{\widehat{f}_n}$ und somit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_n e^{\mathbf{i}nx} = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\Big]$$

mit

$$a_n=a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{und} \quad b_n=b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx\,.$$

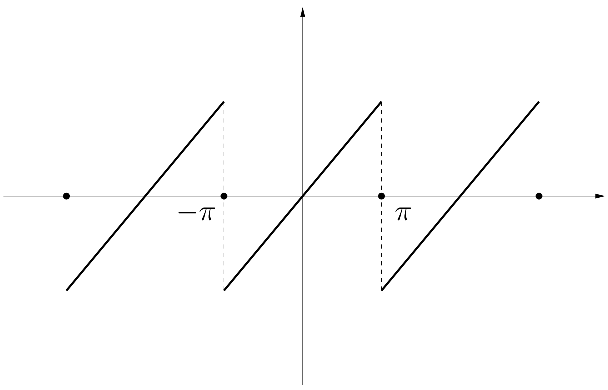
Gilt $f'\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]$, so zeigt die Beziehung

$$\widehat{f}_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-\mathbf{i}nx}dx=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}n}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-\mathbf{i}nx}dx=\frac{1}{\mathbf{i}n}\widehat{f'}_n\,,$$

dass höhere Glattheit der Funktion zu schnellerem Fallen der Fourierkoeffizienten führt.

Beispiel 5.49 (Sägezahnkurve) *Es seien $a>0$ gegeben und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die $2\pi-$periodische Funktion mit*

$$f(x)=\begin{cases} ax & : \quad -\pi<x<\pi\,,\\ 0 & : \quad x=\pi\,.\end{cases}$$



Sägezahnkurve

Die Fourierreihe dieser Funktion ist gleich

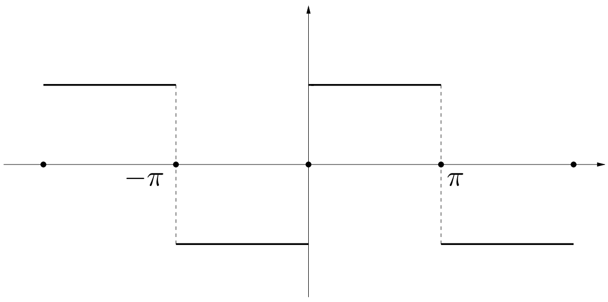
$$2a\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right)=2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\,.$$

Für $a=\frac{1}{2}$ *und* $x=\frac{\pi}{2}$ *erhalten wir die Zahlenreihe (vgl. Beispiel 4.35)*

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\,. \tag{5.11}$$

Beispiel 5.50 (Rechteckfunktion) *Es seien* $a>0$ *und* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π*-periodisch mit*

$$f(x)=\begin{cases} a & : \quad 0<x<\pi\,,\\ 0 & : \quad x=0,\, x=\pi\,,\\ -a & : \quad -\pi<x<0\,.\end{cases}$$



Rechteckfunktion

Die Fourierreihe dieser Funktion hat die Gestalt

$$\frac{4a}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right)=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\,.$$

Für $a=\frac{\pi}{4}$ *und* $x=\frac{\pi}{2}$ *erhalten wir wieder die Reihe* (5.11)*.*

Beispiel 5.51 *Für* $-\pi\le x\le\pi$ *gilt*

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{\cos(2x)}{2^2}+\frac{\cos(3x)}{3^2}-\cdots\right)=\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(nx)\,.$$

Es folgt für $x=\pi$ *bzw.* $x=0$

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\quad \textit{und}\quad \frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\,.$$

Beispiel 5.52 *Für* $-\pi\le x\le\pi$ *gilt*

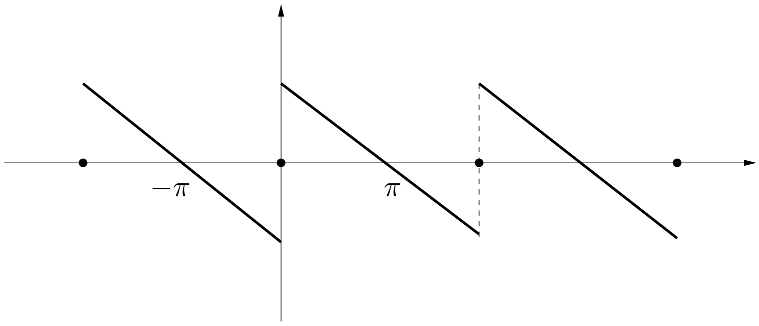
$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\,,$$

woraus mit $x=0$

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

folgt.

Beispiel 5.53



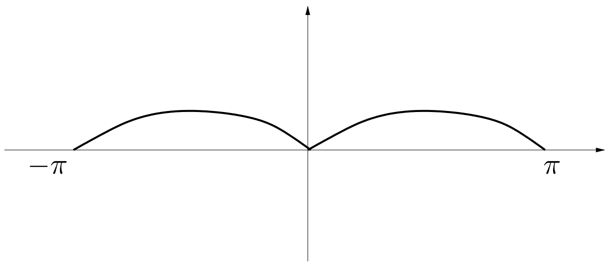
rückwärtige Sägezahnkurve

Für $x \in (0, 2\pi)$ *gilt*

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\,.$$

Beispiel 5.54 *Für* $x \in \mathbb{R}$ *ist*

$$|\sin x| = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}\right].$$



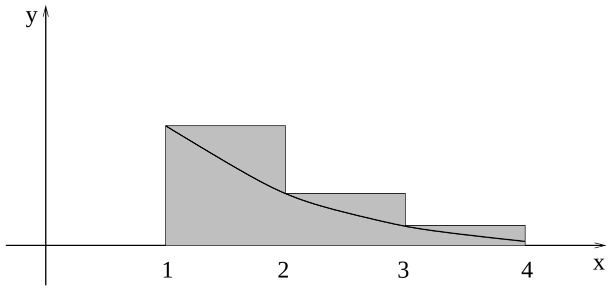
$f(x) = |\sin x|$

5.8 Uneigentliche Integrale

Ist $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ eine stetige Funktion, so ist die Frage, ob der Flächeninhalt unter dem Graphen dieser Funktion endlich ist, äquivalent zu der Frage, ob der Grenzwert $\lim\limits_{A\to\infty} \int_0^A f$ endlich ist. Betrachten wir z.B. die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-2}$, so müsste diese auf jeden Fall kleiner als (siehe Abb.)

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

sein. Da diese Zahlenreihe bekanntlich konvergiert, d.h. eine endliche Summe besitzt, ist dieser Flächeninhalt also auch endlich. Ein völlig analoger Sachverhalt liegt vor, wenn man z.B. die Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf dem Intervall $(0,1]$ betrachtet.



Definition 5.55 *Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathbb{R}[a, A]$ für alle $A > a$. Dann definieren wir das* **uneigentliche Integral**

$$\int_a^\infty f := \lim_{A\to\infty} \int_a^A f \,,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Ist dieser unendlich oder existiert er überhaupt nicht, so nennt man das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **divergent**, *sonst heißt es* **konvergent**. *Analog definiert man*

$$\int_{-\infty}^a f \,.$$

Ferner definiert man unter Verwendung eines beliebigen $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^\infty f := \int_{-\infty}^a f + \int_a^\infty f \,.$$

Bemerkung 5.56 *Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ auf $[a, \infty)$, so gilt*

$$\int_a^\infty f = \lim_{A\to\infty} F(A) - F(a) = F(\infty) - F(a)\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Beispiel 5.57 *Wir betrachten folgende uneigentlichen Integrale:*

(a) $\displaystyle \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi\,.$

(b) $\alpha \in \mathbb{R}$: $\displaystyle \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha}$

$$= \lim_{A\to\infty} \left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} & : & \alpha \neq 1\,, \\ \ln A & : & \alpha = 1\,, \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{lcl} \infty & : & \alpha \leq 1\,, \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & : & \alpha > 1\,. \end{array} \right.$$

(c) *Das Integral* $\displaystyle \int_0^\infty \sin x\,dx$ *divergiert, da* $\displaystyle \int_0^A \sin x\,dx = 1 - \cos A\,.$

(d) $\displaystyle \int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to\infty} \left[-\sin\frac{1}{x}\right]_{2/\pi}^A = 1\,.$

Die Anwendung der folgenden Definition eines uneigentlichen Integrals macht sich z.B. dann erforderlich, wenn die Funktion $f(x)$ im Punkt a eine Polstelle hat.

Definition 5.58 *Es seien* $-\infty < a < b < \infty$ *und* $f \in \mathbb{R}[a+\eta, b] \quad \forall \eta \in (0, b-a)$. *Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\eta\to+0} \int_{a+\eta}^b f =: \int_a^b f\,,$$

so nennt man diesen **uneigentliches Integral** *der Funktion* $f(x)$ *über dem Intervall* $[a,b]$. *Ist dieser Grenzwert endlich, so heißt das Integral* **konvergent**, *sonst* **divergent**.

Auch andere Situationen sind denkbar. Ist z.B. $c \in (a,b)$ eine Polstelle der Funktion $f(x)$, so definiert man

$$\int_a^b f := \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{c-\varepsilon} f + \lim_{\delta\to+0} \int_{c+\delta}^b f\,.$$

Bemerkung 5.59 *Ist* $F(x)$ *eine Stammfunktion zu* $f(x)$ *auf* $(a,b]$, *so gilt*

$$\int_a^b f = \lim_{\eta\to+0}[F(b) - F(a+\eta)] = F(b) - F(a+0)\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Bemerkung 5.60 *Ist* $f \in \mathbb{R}[a,b]$, *so gilt* $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{\eta\to+0}\int_{a+\eta}^b f\,.$

Beispiel 5.61 *Wir betrachten folgende uneigentlichen Integrale:*

(a) $\alpha \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\eta\to+0}\int_\eta^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

$$= \lim_{\eta\to+0}\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{1-\alpha} - \dfrac{\eta^\alpha}{1-\alpha} & : & \alpha \neq 1\,, \\ -\ln\eta & : & \alpha = 1\,, \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{1-\alpha} & : & \alpha < 1\,, \\ \infty & : & \alpha \geq 1\,. \end{array}\right.$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to+0}\int_0^{1-\delta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to+0}\arcsin(1-\delta) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\,.$

Beispiel 5.62 *Das Integral* $\displaystyle\int_{-3}^2 \frac{dx}{x}$ *divergiert, der sogenannte* **Cauchy'sche Hauptwert**

$$\text{v.p.} \int_{-3}^2 \frac{dx}{x} := \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-3}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^2 \frac{x}{dx}\right)$$

existiert aber. Ebenso definiert man den **Cauchyschen Hauptwert**

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^\infty f := \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^A f\,.$$

Satz 5.63 (Integralkriterium für Reihen) *Sei* $m \in \mathbb{N}$. *Ist die Funktion*

$$f : [m,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$$

monoton nicht wachsend, so sind

$$\sum_{n=m}^\infty f(n) \quad \text{und} \quad \int_m^\infty f$$

gleichzeitig konvergent bzw. divergent. Im Falle der Konvergenz gilt

$$\sum_{n=m+1}^\infty f(n) \leq \int_m^\infty f \leq \sum_{n=m}^\infty f(n)\,. \tag{5.12}$$

Beispiel 5.64 *Wir wenden Satz 5.63 an:*

(a) *Mit* $f(x) = x^{-\alpha}$ *folgt aus Bsp. 5.57,(b) die Konvergenz der Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

für $\alpha > 1$ *und ihre Divergenz für* $0 < \alpha \leq 1$. *Aus* (5.12) *folgt für* $\alpha > 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

und somit

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

(b) *Mittels der Subsitution* $x = \ln t$ *erhalten wir für* $\alpha > 1$

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_2^{\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha},$$

woraus die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

folgt.

Satz 5.65 *Sei* $m \in \mathbb{N}$. *Ist die Funktion* $f : [m, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ *monoton nicht wachsend, so konvergiert die Zahlenfolge* $(\gamma_n)_{n=m}^{\infty}$ *mit*

$$\gamma_n = \sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f,$$

wobei außerdem

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \gamma_n \leq f(m)$$

gilt.

Beispiel 5.66 *Für* $f(x) = \frac{1}{x}$ *und* $m = 1$ *erhalten wir aus Satz 5.65 die Konvergenz der Reihe* $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ *mit*

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Dabei gilt

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = \gamma = 0.5772156649015329\ldots \quad \text{(Eulersche Konstante)}.$$

Beispiel 5.67 *Für* $0 < A < B$ *gilt*

$$\int_A^B \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_A^B - \int_A^B \frac{\cos x}{x^2}\, dx,$$

also

$$\left|\int_A^B \frac{\sin x}{x}\, dx\right| \leq \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \int_A^B \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{A}.$$

Hieraus folgt die Konvergenz des Integrals $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, *da mittels obiger Abschätzung gezeigt werden kann, dass für jede Folge* $(A_n)_{n=1}^\infty$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \infty$ *die Folge* $\displaystyle\left(\int_0^{A_n} \frac{\sin x}{x}\,dx\right)_{n=1}^\infty$ *eine Cauchy-Folge ist. Wir berechnen den Wert des Integrals* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. *Dazu sei*

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t} & , \quad 0 < |t| \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad t = 0\,. \end{cases}$$

Es gilt für ein $\theta \in (0,1)$

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{\sin t - t}{t^2 \sin t} = \frac{-\dfrac{t^3}{3!} + \sin(\theta t)\,\dfrac{t^4}{4!}}{t^2 \sin t} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{3!}\,,$$

also $f'(0) = -\frac{1}{6}$. *Ähnlich zeigt man, dass*

$$f'(t) = \frac{\cos t}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 \cos t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)}{t^2 \sin^2 t}$$

für $0 < |t| \leq \frac{\pi}{2}$ *beschränkt bleibt. Für beliebiges* $n \in \mathbb{N}$ *erhält man mittels partieller Integration*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(n\,t)\,dt = -\frac{1}{n}\Big[f(t)\cos(n\,t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos(n\,t)\,dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

also

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n\,t)}{t}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n\,t)}{\sin t}\,dt\right) = 0\,.$$

Unter Verwendung der Substitution $x = n\,t$ *folgt*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n\,t)}{t}\,dt = \int_0^{n\cdot\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,,$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n\,t)}{\sin t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

Aus (vgl. (5.10)*)*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} D_n(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi D_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$$

folgt nun

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Bemerkung 5.68 *Konvergiert ein uneigentliches Integral auch über* $|f(x)|$, *so nennt man es* **absolut konvergent**. *Gilt z.B.* $|f(x)| \leq g(x)$ *für alle* $x \in [a,\infty)$ *und ist* $\displaystyle\int_a^\infty g$ *konvergent, so ist* $\displaystyle\int_a^\infty f$ *absolut konvergent.*

Beispiel 5.69 *Die* **Gammafunktion** $\Gamma(x)$ *ist wie folgt definiert. Für* $x > 0$ *setzt man*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt\,.$$

Wegen

$$0 \le e^{-t} t^{x-1} \le t^{x-1}\,, \quad t, x > 0\,,$$

konvergiert das Integral $\displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt$ *für jedes* $x > 0$. *Da* $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow \infty} e^{-t} t^m = 0$ *für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *gilt, konvergiert das Integral* $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$ *sogar für jedes* $x \in \mathbb{R}$. *Für* $x > 0$ *ist*

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x\, dt = \Big[- e^{-t} t^x \Big]_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = x\Gamma(x)\,. \tag{5.13}$$

Ferner gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1\,.$$

Es folgt

$$\Gamma(n+1) = n!\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Aus (5.13) *folgt für* $x > 0$ *und* $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdots (x+2)(x+1)x\Gamma(x)\,.$$

Diese Beziehung kann man zur Definition von $\Gamma(x)$ *für negative, nicht ganzzahlige* x *benutzen: Für* $-n < x < -n+1$ *definiert man*

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\,.$$

5.9 Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie folgende Riemann-Stieltjes-Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^3 x\, d\mu(x)$, wobei $\mu(x) = \begin{cases} -1 & : \quad x = -1 \\ 0 & : \quad -1 < x < 2 \\ 1 & : \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$

   (b) **(HA)** $\displaystyle\int_0^2 x\, d\mu(x)$, wobei $\mu(x) = \begin{cases} -1 & : \quad 0 \le x < \frac12 \\ 0 & : \quad \frac12 \le x < \frac32 \\ 1 & : \quad x = \frac32 \\ 2 & : \quad \frac32 < x \le 2 \end{cases}$

   (c) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^2\, d\mu(x)$, wobei $\mu(x) = \begin{cases} x+2 & : \quad -2 \le x \le -1 \\ 2 & : \quad -1 < x < 0 \\ x^2+3 & : \quad 0 \le x \le 2 \end{cases}$

2. Man untersuche die Funktionenfolgen (f_n) auf gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $-\infty < x < \infty$, (b) $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}$, $-\infty < x < \infty$,

   (c) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $x \in [0,1]$, (d) **(HA)** $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$,

   (e) **(HA)** $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x}$, $x \in [0,1]$.

3. Man untersuche folgende Reihen auf gleichmäßige Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,,\ x \in (-q,q)\,,\ 0<q<1\,,$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,,\ x \in (-1,1)\,,$

   (c) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\,,\ x \in [-1,1]\,,$ (d) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})\,,\ x \in [0,1]\,,$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,\ x \in [a,b]\,,\ -\infty < a < b < \infty\,,$ bzw. **(Z)** $x \in \mathbb{R}\,,$

   (f) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$

4. Man stelle durch eine Reihe dar:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,dt\,,$ (b) **(HA)** $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\,,$ (c) **(HA)** $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\,.$

5. **(HA)** Zeigen Sie, dass für eine 2π-periodische, auf $[-\pi,\pi]$ Riemann-integrierbare Funktion $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f\,.$$

6. Zeigen Sie: Bei einer π-periodischen Funktion verschwinden die Fourier-Koeffizienten mit ungeraden Indizes.

7. Seien $f,g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-periodische Funktionen. In welchem Zusammenhang stehen die Fourier-Koeffizienten von f und g, wenn

   (a) $g(x) = f(-x)\,,$ (b) $g(x) = f(x+h)$ $(h = \text{const} \in \mathbb{R})$?

8. Geben Sie, ausgehend von dem trigonometrischen System $\left\{e^{\mathbf{i}nx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$, ein Orthonormalsystem (ONS) zur Entwicklung von Funktionen der Periode $2\ell \neq 2\pi$ an, d.h. ein ONS bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overline{g(x)}\,dx\,.$$

   Wie berechnen sich die entsprechenden Fourier-Koeffizienten?

9. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Fourier-Reihe und geben Sie die Summe dieser Fourier-Reihe an:

   (a) $f(x) = |\cos x|\,,$ (b) **(HA)** $f(x) = \begin{cases} \pi + x & : \ -\pi \le x \le 0\,, \\ \pi - x & : \ 0 < x \le \pi\,, \end{cases}$

   (c) $f(x) = x\cos x\,,\ -\pi \le x \le \pi\,,$ (d) **(HA)** $f(x) = x \sin x\,,\ -\pi \le x \le \pi\,.$

10. Zeigen Sie: Ist $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und 2π-periodisch, so gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n|+1)^2 |\widehat{f}_n|^2 < \infty\,,$$

   und die Fourier-Reihe $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{\mathbf{i}nx}$ ist absolut konvergent.

11. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. zeigen Sie deren Divergenz:

    (a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ (b) $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx \quad (\alpha > 0)$

    (d) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx \quad (\alpha < 0,\ \beta \in \mathbb{R})$ (e) **(HA)** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$

    (f) **(HA)** $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ (h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ (i) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$

    (j) **(HA)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$ (k) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ **(Z)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

12. Zeigen Sie:

    (a) Konvergiert $\int_a^\infty |f|$, so konvergiert auch $\int_a^\infty f$. (Man sagt , $\int_a^\infty f$ konvergiert **absolut**.)

    (b) Sind $|f(x)| \leq g(x)\ \forall\, x \in [a,\infty)$ und $\int_a^\infty g$ konvergent, so konvergiert $\int_a^\infty f$ absolut.

13. Untersuchen Sie folgende Integrale auf Konvergenz:

    (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x}\,dx$ (b) **(HA)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ (c) **(HA)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$

    (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty x^\mu e^{-\alpha x}\,dx \quad (\alpha,\mu \in \mathbb{R})$

14. Berechnen Sie die Mantelfläche F und das Volumen V des Rotationskörpers, der bei Rotation des Graphen der Funktion $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ um die x-Achse entsteht.

15. Berechnen Sie die folgenden Cauchyschen Hauptwerte:

    (a) v.p. $\displaystyle\int_{-1}^e \frac{dx}{x}$ (b) v.p. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x\ln x}$ (c) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}$

    (d) **(HA)** v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ (e) **(HA)** v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin x\,dx$

Kapitel 6

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

6.1 Bezeichnungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Matrizen $A = \left[\ \alpha_{jk}\ \right]_{j=1,k=1}^{m\ \ n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, die wir ja bekanntlich als lineare Abbildungen

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m\,, \quad x = \left[\ \xi\ \right]_{k=1}^{n} \mapsto Ax := \left[\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k\ \right]_{j=1}^{m}$$

interpretieren können. Den linearen Raum $\mathbb{R}^n$ versehen wir mit dem **inneren Produkt**

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k\,,$$

wobei $x = \left[\ \xi_k\ \right]_{k=1}^{n}$, $y = \left[\ \eta_k\ \right]_{k=1}^{n}$, und mit der Norm

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2} = \|x\|_2$$

(vgl. Abschnitt 5.1). Mit $\ker A$ bezeichnen wir den Kern der Matrix A und mit $\operatorname{im} A$ ihr Bild,

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \Theta\}\,, \quad \operatorname{im} A = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}\,.$$

Das **Spektrum** $\sigma(A)$ einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Menge ihrer **Eigenwerte**

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \dim\ker(A - \lambda I) > 0\}\,.$$

Wir definieren nun die Norm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ als

$$\|A\| := \sup\{|Ax| : x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1\}\,.$$

Mit $\mathcal{G}\mathbb{R}^{n\times n}$ sei die Menge der invertierbaren Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnet.

Satz 6.1 *Es gilt:*

(a) $|Ax| \le \|A\|\ |x|\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,,\ \forall\, A \in \mathbb{R}^{m\times n}\,.$

(b) $\|A\|$ *ist die kleinste Zahl* M , *für die* $|Ax| \le M|x| \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ *gilt, d.h.*

$$\|A\| = \inf\left\{M \in \mathbb{R} : |Ax| \le M|x| \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\right\} .$$

(c) $\|A\| = \sup\left\{|Ax| : x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \le 1\right\}$.

(d) $\|A\| = \left\{ \dfrac{|Ax|}{|x|} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\Theta\} \right\}$.

(e) $(\mathbb{R}^{m\times n}, \|.\|)$ *ist ein normierter Raum. Dabei gilt*

$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\| \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times k} .$$

(f) *Aus* $A \in \mathcal{G}\mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und* $\|A - B\|\,\left\|A^{-1}\right\| < 1$ *folgt* $B \in \mathcal{G}\mathbb{R}^{n\times n}$.

(g) $\mathcal{G}\mathbb{R}^{n\times n}$ *ist eine offene Menge in* $(\mathbb{R}^{n\times n}, \|.\|)$, *und die Abbildung*

$$\mathcal{G}\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathcal{G}\mathbb{R}^{n\times n} , \quad A \mapsto A^{-1}$$

ist stetig.

Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, so existiert eine orthonormale Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ aus Eigenvektoren der Matrix A zu den (reellen) Eigenwerten $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ folgt

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, b_k\rangle\, b_k \quad \text{und somit} \quad Ax = \sum_{k=1}^{n} \langle x, b_k\rangle\, Ab_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,\langle x, b_k\rangle\, b_k .$$

Satz 6.2 *Für eine symmetrische Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gilt*

$$\min \sigma(A) = \min\left\{R(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\Theta\}\right\} \quad \textit{und} \quad \max \sigma(A) = \max\left\{R(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\Theta\}\right\} ,$$

wobei $R(x) = \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$ *einen sogenannten* **Rayleigh-Quotienten** *bezeichnet.*

Folgerung 6.3 *Für* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *gilt*

$$\|A\| = \max\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(A^T A)\right\} .$$

6.2 Differenzierbarkeit

Wir betrachten im Weiteren Funktionen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(x)$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die über die Bezeichnungen

$$f(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) \\ \varphi_2(\xi_1, \ldots, \xi_n) \\ \vdots \\ \varphi_m(\xi_1, \ldots, \xi_n) \end{bmatrix}$$

durch m reellwertige Funktionen $\varphi_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ von n reellen Veränderlichen gegeben sind.

Definition 6.4 *Die Abbildung* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *heißt* **differenzierbar** *im Punkt* $x_0 \in \Omega$, *wenn eine Matrix* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *existiert, so dass*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0 \tag{6.1}$$

gilt. Im Falle ihrer Existenz ist die Matrix A *eindeutig bestimmt, wird* **Ableitung** *der Funktion* f *im Punkt* x_0 *genannt und mit* $f'(x_0)$ *bezeichnet.*

Die Bedingung (6.1) kann auch in der Form

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+r(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h\to\Theta}\frac{|r(h)|}{|h|}=0$$

($h\in\mathbb{R}^n$) geschrieben werden.

Folgerung 6.5 *Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.*

Bemerkung 6.6 *Offenbar ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn alle φ_j , $j=1,\ldots,m$, in x_0 differenzierbar sind. Ist $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ in jedem Punkt $x\in\Omega$ differenzierbar, so ist die Abbildung $f':\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^{m\times n}$, $x\mapsto f'(x)$ erklärt.*

Beispiel 6.7 *Sind $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ und $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $x\mapsto Ax$, so gilt $f'(x)=A$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$.*

Beispiel 6.8 *Die Funktion $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto\left\{\begin{array}{ccc}\dfrac{\xi_1^2\xi_2^2}{\xi_1^2+\xi_2^2} & : & x\neq\Theta\\ 0 & : & x=\Theta\end{array}\right\}$ ist in $x_0=\Theta$ differenzierbar, wobei $f'(\Theta)=\left[\begin{array}{cc}0 & 0\end{array}\right]$ gilt.*

Satz 6.9 (Kettenregel) *Es seien $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ in $x_0\in\Omega$ und $g:\Omega_1\longrightarrow\mathbb{R}^k$ in $y_0=f(x_0)$ differenzierbar, wobei auch $\Omega_1\subset\mathbb{R}^m$ eine offene Menge sei und $f(\Omega)\subset\Omega_1$ gelte. Dann ist die verkettete Funktion $H:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^k$, $x\mapsto g(f(x))$ in x_0 differenzierbar, wobei*

$$H'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

gilt.

Es ist leicht einzusehen, dass die Differenzierbarkeit von $f_1,f_2:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ in $x_0\in\Omega$ die Differenzierbarkeit von $\alpha_1f_1+\alpha_2f_2$ in x_0 für beliebige $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ impliziert, wobei gilt

$$(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2)'(x_0)=\alpha_1f_1'(x_0)+\alpha_2f_2'(x_0)\,.$$

Wir bezeichnen mit $\{e_1^n,\ldots,e_n^n\}$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$.

Definition 6.10 *Existiert für $x_0\in\Omega$, $k\in\{1,\ldots,n\}$ und $j\in\{1,\ldots,m\}$ der endliche Grenzwert*

$$\lim_{t\to0}\frac{\varphi_j(x_0+te_k^n)-\varphi_j(x_0)}{t}\,,$$

so nennen wir diesen **partielle Ableitung** *der Funktion $\varphi_j:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ nach ξ_k im Punkt x_0 und bezeichnen diesen mit $\dfrac{\partial\varphi_j(x_0)}{\partial\xi_k}$ oder $D_k\varphi_j(x_0)$.*

Satz 6.11 *Ist $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ im Punkt x_0 differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial\varphi_j(x_0)}{\partial\xi_k}$, $j=1,\ldots,m$, $k=1,\ldots,n$, und es gilt*

$$f'(x_0)=\left[\begin{array}{c}\dfrac{\partial\varphi_j(x_0)}{\partial\xi_k}\end{array}\right]_{j=1,k=1}^{m\quad n}.$$

Spezialfälle:

(a) $n = 1$, d.h. $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1'(x) \\ \vdots \\ \varphi_m'(x) \end{bmatrix}$$

(b) $m = 1$, d.h. $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial \xi_1} & \ldots & \frac{\partial f(x)}{\partial \xi_n} \end{bmatrix}$$

Man nennt $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial \xi_1} & \ldots & \frac{\partial f(x)}{\partial \xi_n} \end{bmatrix}^T$ den **Gradienten** von f im Punkt x.

Definition 6.12 *Es seien $e \in \mathbb{R}^n$ eine* **Richtung**, *d.h. $|e| = 1$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und $x_0 \in \Omega$. Existiert der endliche Grenzwert*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\,e) - f(x_0)}{t},$$

so heißt dieser **Richtungsableitung** *von f im Punkt x_0 in Richtung e und wird mit $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial e}$ bezeichnet.*

Man beachte, dass die partiellen Ableitungen spezielle Richtungsableitungen sind. Nehmen wir an, dass $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist, und definieren wir für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Funktion $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x_0 + t\,e)$, so folgt aus Satz 6.9

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial e} = g'(0) = f'(x_0)e = \langle \nabla f(x_0), e \rangle \ .$$

Ist also der Gradient von f im Punkt x_0 ungleich dem Nullvektor, so gibt $\nabla f(x_0)$ die Richtung an, in der f von x_0 ausgehend sich am schnellsten ändert.

Beispiel 6.13 *Die partiellen Ableitungen der Funktion*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{2\xi_1\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} & : & x \neq \Theta \\ 0 & : & x = \Theta \end{array} \right\}$$

sind für $x \neq \Theta$ gleich

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \xi_1} = \frac{2\xi_2^3}{\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial \xi_2} = \frac{2\xi_1^3}{\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

für $x = \Theta$ sind beide gleich Null. Im Punkt $x_0 = \Theta$ existieren außer den Ableitungen in Koordinatenrichtung keine weiteren Richtungsableitungen. Somit ist f in $x_0 = \Theta$ auch nicht differenzierbar.

Beispiel 6.14 *Für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{\xi_1^2\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} & : & x \neq \Theta \\ 0 & : & x = \Theta \end{array} \right\}$ existieren in $x_0 = \Theta$ alle Richtungsableitungen, obwohl sie in diesem Punkt nicht differenzierbar ist.*

Beispiel 6.15 *Es seien* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *in* $x_0 \in \Omega$ *differenzierbar,* $b \in \mathbb{R}^m$ *und* $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^1$, $x \mapsto \langle f(x), b\rangle$ *. Dann ist* g *in* x_0 *differenzierbar, wobei* $g'(x_0) = b^T f'(x_0)$ *. Dies folgt aus der Kettenregel und Beispiel 6.7, aber auch direkt aus*

$$\begin{aligned} |g(x_0+h) - g(x_0) - b^T f'(x_0)h| &= \big|\big\langle f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h, b\big\rangle\big| \\ &= |\,\langle r(h), b\rangle\,| \\ &\le |r(h)|\,|b|\,. \end{aligned}$$

Man nennt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine **konvexe Menge**, wenn

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Omega \quad \forall\, x_1, x_2 \in \Omega\,,\ \forall\, \lambda \in (0,1)$$

gilt.

Satz 6.16 *Es seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *konvex und* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *differenzierbar mit beschränkter Ableitung, d.h., es ist* $\|f'(x)\| \le M$ *für alle* $x \in \Omega$ *und ein* $M \in \mathbb{R}$*. Dann gilt*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le M|x_1 - x_2| \quad \forall\, x_1, x_2 \in \Omega\,.$$

Ist also $f'(x) = \Theta$ *für alle* $x \in \Omega$*, so ist* f *auf* Ω *konstant.*

Mit $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ bezeichnen wir die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, d.h., es existiert $f'(x)$ für alle $x \in \Omega$ und für jedes $x_0 \in \Omega$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $\|f'(x) - f'(x_0)\| < \varepsilon\ \forall\, x \in U_\delta(x_0)$.

Satz 6.17 *Es gilt* $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *genau dann, wenn alle partiellen Ableitungen* $D_k\varphi_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, *existieren und stetig sind.*

6.3 Extremwerte

Wir betrachten hier reellwertige Abbildungen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Existiert die partielle Ableitung nach ξ_j von $D_k f = \dfrac{\partial f}{\partial \xi_k}$, so bezeichnen wir diese mit $D_{jk}f$ oder $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_k}$. Es gilt also

$$D_{jk}f = D_j(D_k f) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right).$$

Satz 6.18 *Es seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *und* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion. Die partiellen Ableitungen* $D_1 f, D_2 f, D_{21} f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *mögen existieren. Ist* $D_{21}f$ *in* $x_0 \in \Omega$ *stetig, so existiert auch* $D_{12}f(x_0)$*, und es gilt* $D_{12}f(x_0) = D_{21}f(x_0)$*.*

Ist $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und ist x_0 ein Extremalpunkt von f, so ist $t_0 = 0$ Extremalpunkt von $g_k(t) = f(x_0 + t\,e_k^n)$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Also gilt dann $0 = g_k'(0) = f'(x_0)e_k^n = D_k f(x_0)$, $k = 1, \ldots, n$.

Sind nun $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ von x_0 zweimal differenzierbar, $x \in U_\varepsilon(x_0)$ und $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x_0 + t(x - x_0))$, so gilt

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}\, g''(\vartheta)$$

für ein $\vartheta \in (0,1)$ und nach Satz 6.9 und Beispiel 6.15

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} f'(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) \\ &= \frac{d}{dt} \langle \nabla f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle \\ &= (x - x_0)^T D\nabla f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) \\ &= \langle A(t)(x - x_0), x - x_0 \rangle \end{aligned}$$

mit $A(t) = D\nabla f(x_0 + t(x - x_0)) = \left[\; D_{kj} f(x_0 + t(x - x_0)) \;\right]_{j,k=1}^{n}$. Es folgt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{1}{2} \langle A(\vartheta)(x - x_0), x - x_0 \rangle \; .$$

Satz 6.19 *Sind* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *in* $x_0 \in \Omega$ *differenzierbar und* x_0 *ein Extremalpunkt von* f *, so gilt* $\nabla f(x_0) = \Theta$ *. (Man sagt,* x_0 *ist* **stationärer Punkt** *von* f *.) Ist* f *außerdem in einer Umgebung von* x_0 *zweimal differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in* x_0 *stetig, so ist* $f(x_0)$ *ein lokales Maximum (bzw. Minimum) von* f *, wenn die Matrix* $A = \left[\; D_{kj} f(x_0) \;\right]_{j,k=1}^{n}$ *negativ (bzw. positiv) definit ist.*

Folgerung 6.20 *Es seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *und* $x_0 \in \Omega$ *ein stationärer Punkt der Funktion* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *, die den Bedingungen des Satzes 6.19 genügen möge. Wir setzen*

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial \xi_1^2}\,, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\,, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial \xi_2^2}\,.$$

Gilt $AC - B^2 > 0$ *, so liegt im Punkt* x_0 *ein Extremum von* f *vor, und zwar ein lokales Minimum, falls* $A > 0$ *, bzw. ein lokales Maximum, falls* $A < 0$ *. Ist* $AC - B^2 < 0$ *, so liegt in* x_0 *kein Extremum vor.*

Beispiel 6.21 *Für* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit* $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2 + 2\xi_1 - 10\xi_2 + 5$ *liegt im Punkt* $x_0 = (-3, 2)$ *liegt ein lokales Minimum vor.*

Suchen wir von einer stetigen Funktion $f : \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ den größten und kleinsten Funktionswert, so kommen als extremwertverdächtige Punkte

- die Punkte $x \in \Omega$, in denen f differenzierbar ist und für die $\nabla f(x) = \Theta$ gilt,
- die Punkte $x \in \Omega$, in denen f nicht differenzierbar ist,
- die Randpunkte $x \in \partial\Omega$

in Frage. Ist dann $\overline{\Omega}$ kompakt, so sind Maximum und Minimum der Funktionswerte von f auf allen extremwertverdächtigen Punkten zugleich globales Maximum bzw. Minimum von f auf $\Omega \cup \partial\Omega$.

Beispiel 6.22 *Der größte Wert der Funktion*

$$f(\xi_1, \xi_2) = \sin \xi_1 + \sin \xi_2 - \sin(\xi_1 + \xi_2)$$

auf der Menge $\overline{\Omega} = \left\{ (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \geq 0\,,\ \xi_2 \geq 0\,,\ \xi_1 + \xi_2 \leq 2\pi \right\}$ *ist gleich*

$$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,.$$

Beispiel 6.23 *Wir betrachten $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^4 + \xi_2^2$ und $g(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^3 + \xi_2^2$. Der Punkt $(0,0)$ ist stationärer Punkt für beide Funktionen. Für f liegt in $(0,0)$ ein (globales) Minimum vor, für g dagegen kein Extremum. Die Folgerung 6.20 liefert hier keine Aussage, da in beiden Fällen $AC - B^2 = 0$ gilt.*

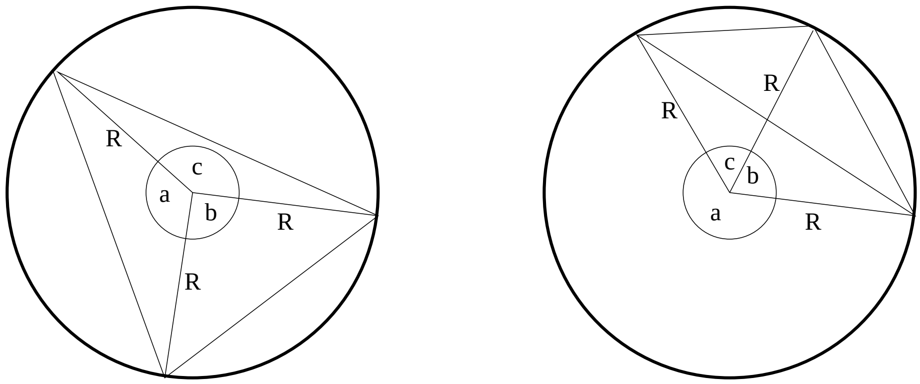
Wenden wir im Beispiel 6.22 auf den einzigen stationären Punkt $(\xi_1^0, \xi_2^0) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ die Folgerung 6.20 an, so erhalten wir $A < 0$ und $AC - B^2 > 0$. Könnte man daraus bereits schlussfolgern, dass in diesem Punkt der größte Funktionswert angenommen wird? Das folgende Beispiel zeigt, dass man diese Frage mit **nein** beantworten muss. (Im Gegensatz zum Fall reellwertiger Funktionen, die nur von einer reellen Veränderlichen abhängen!)

Beispiel 6.24 *Auf $\overline{\Omega} = [-5, 5] \times [-1, 1]$ betrachten wir die Funktion*

$$f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^3 - 4\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 .$$

Der Punkt $(0,0)$ ist einziger stationärer Punkt in $\Omega = (-5,5) \times (-1,1)$, und dort gilt $A < 0$ sowie $AC - B^2 > 0$, wobei $f(0,0) = 0$ ist. Die Funktion f nimmt aber auf dem Rand von Ω auch positive Werte an, z.B. ist $f(5,1) = 34$.

Beispiel 6.25 *Unter allen Dreiecken, die einem Kreis mit dem Radius $R > 0$ einbeschrieben sind, bestimme man das Dreieck mit dem größten Flächeninhalt.*



Lösung: *Wir verwenden die Formel für den Flächeninhalt F eines Dreiecks, die besagt, dass F gleich dem halben Produkt aus den Längen zweier Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels ist. Es folgt*

$$F = \frac{1}{2}R^2(\sin a + \sin b + \sin c) = \frac{1}{2}R^2 \left[\sin a + \sin b - \sin(a+b)\right] ,$$

$a > 0$, $b > 0$, $a + b < 2\pi$. Aus Beispiel 6.22 folgt, dass F für $a = b = \dfrac{2\pi}{3}$ $\left(\Rightarrow c = \dfrac{2\pi}{3}\right)$ maximal wird.

Satz 6.26 (Umkehrabbildung) *Es seien $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \Omega$, $f'(x_0) \in \mathcal{G}\mathbb{R}^{n\times n}$ und $y_0 = f(x_0)$. Dann existieren offene Mengen $U \subset \Omega$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in U$ und $y_0 \in V$, so dass die Abbildung $f : U \longrightarrow V$ bijektiv ist. Die Abbildung $f^{-1} : U \longrightarrow V$ gehört zu $\mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^n)$, und es gilt*

$$(f^{-1})'(y) = \left[f'(f^{-1}(y))\right]^{-1}$$

für alle $y \in V$.

Beweis. Wir setzen $A = f'(x_0)$ und $\rho = \dfrac{1}{2\,\|A^{-1}\|}$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\left\|f'(x) - A\right\| < \rho \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0)$$

gilt. Für festes $y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $\varphi_y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + A^{-1}[y - f(x)]$. Somit gilt $f(x) = y$ genau dann, wenn $\varphi_y(x) = x$ erfüllt ist. Wir haben $\varphi_y'(x) = I - A^{-1}f'(x) = A^{-1}[A - f'(x)]$, so dass

$$\left\|\varphi_y'(x)\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \left\|A - f'(x)\right\| < \left\|A^{-1}\right\| \rho = \frac{1}{2} \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0)\,.$$

Aus Satz 6.16 folgt

$$|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)| \le \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \quad \forall\, x_1, x_2 \in U_\delta(x_0)\,. \tag{6.2}$$

Also hat φ_y in $U_\delta(x_0)$ höchstens einen Fixpunkt, so dass $f : U_\delta(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist. Wir setzen $U = U_\delta(x_0)$ und $V = f(U)$. Sei $y^* \in V$ beliebig. Dann existieren ein $x^* \in U$ mit $f(x^*) = y^*$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x^*) \subset U$. Sei nun $y \in U_{\varepsilon\rho}(y^*)$. Dann folgt

$$|\varphi_y(x^*) - x^*| = |A^{-1}(y - y^*)| < \left\|A^{-1}\right\| \varepsilon\rho = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ist $x \in K_\varepsilon(x^*)$, so gilt

$$|\varphi_y(x) - x^*| \le |\varphi_y(x) - \varphi_y(x^*)| + |\varphi_y(x^*) - \varphi_y(x)| \le \frac{1}{2}|x - x^*| + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon\,,$$

d.h. $\varphi(x) \in K_\varepsilon(x^*)$. Somit ist $\varphi : K_\varepsilon(x^*) \longrightarrow K_\varepsilon(x^*)$ eine kontraktive Abbildung, auf die der Banachsche Fixpunktsatz angewendet werden kann. Es existiert also ein $x \in K_\varepsilon(x^*)$ mit $\varphi(x) = x$, was gleichbedeutend mit $f(x) = y$ ist. Dabei gilt $y \in f(K_\varepsilon(x^*)) \subset f(U) = V$, d.h., V ist offen und $f : U \longrightarrow V$ ist bijektiv.

Seien nun $y, y + k \in V$. Dann existieren $x, x + h \in U$ mit $y = f(x)$ und $y + k = f(x + h)$. Dann ist

$$\varphi_y(x + h) - \varphi(x) = h + A^{-1}[f(x) - f(x + h)] = h - A^{-1}k\,.$$

Hieraus folgt $|A^{-1}k| \ge \frac{1}{2}|h|$ wegen $|h - A^{-1}k| \le \frac{1}{2}|h|$ (siehe (6.2)) und $|h| \le |h - A^{-1}k| + |A^{-1}k|$. Somit ist $|h| \le 2\left\|A^{-1}\right\| |k| = \rho^{-1}|k|$, so dass $k \longrightarrow \Theta$ impliziert $h \longrightarrow \Theta$. Aus Satz 6.1,(f) und $\|f'(x) - A\| \left\|A^{-1}\right\| < \rho \left\|A^{-1}\right\| = \frac{1}{2}$ folgt, dass $[f'(x)]^{-1} =: B$ existiert. Damit ist

$$f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y) - Bk = h - Bk = -B[f(x + h) - f(x) - f'(x)h]\,,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{|f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y) - Bk|}{|k|} &\le \frac{\|B\|\,|h|}{|k|} \, \frac{|f(x + h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} \\ &\le \frac{\|B\|}{\rho} \, \frac{|f(x + h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|}\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $(f^{-1})'(y) = B = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$. Die Abbildung $(f^{-1})' : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ ist stetig, da f^{-1}, f' und $A \longrightarrow A^{-1}$ stetige Abbildungen sind (vgl. Satz 6.1,(g)).

□

Für die Formulierung des folgenden Satzes verwenden wir die Schreibweise $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$, wobei $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$ gelte. Für $A \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$ seien $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ die Matrizen mit $A = \left[\begin{array}{cc} A_1 & A_2 \end{array}\right]$. Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ und $A = f'(x_0, y_0)$, so bezeichnen wir A_1 mit $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ und A_2 mit $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$.

Satz 6.27 (Implizite Funktionen) *Es seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *eine offene Menge,* $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $f(x_0, y_0) = \Theta$ *und* $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \in \mathcal{G}\mathbb{R}^{m \times m}$. *Dann existieren offene Mengen* $U \subset \Omega$ *und* $W \subset \mathbb{R}^n$ *mit* $(x_0, y_0) \in U$ *und* $x_0 \in W$, *so dass zu jedem* $x \in W$ *genau ein* $y \in \mathbb{R}^m$ *mit* $(x, y) \in U$ *und* $f(x, y) = \Theta$ *existiert. Die so definierte Funktion* $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto y$ *gehört zu* $\mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^m)$ *und hat also die Eigenschaften*

$$g(x_0) = y_0 \quad \textit{sowie} \quad f(x, g(x)) = \Theta \quad \forall\, x \in W\,.$$

Ferner gilt

$$g'(x) = -\left[\frac{\partial f(x, g(x))}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial f(x, g(x))}{\partial x} \quad \forall\, x \in W\,. \tag{6.3}$$

Beweis. Wir definieren $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, $(x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ f(x, y) \end{bmatrix}$. Dann ist $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+m})$, wobei

$$F'(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} I_n & \Theta \\ \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}\mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}\,.$$

Nach Satz 6.26 existieren offene Mengen $U \subset \Omega$ und $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ mit $(x_0, y_0) \in U$ und $(x_0, \Theta) \in V$, so dass $F : U \longrightarrow V$ bijektiv ist und $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^{n+m})$ gilt, wobei

$$(F^{-1})'(x, y) = \left[F'(F^{-1}(x, y))\right]^{-1} \quad \forall\, (x, y) \in V\,.$$

Wir setzen $W = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \Theta) \in V\}$. Die Menge W ist offen, da V offen ist. Für alle $x \in W$ existiert genau ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $(x, y) \in U$ und $F(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ \Theta \end{bmatrix}$. Damit ist die Abbildung $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto y$ definiert, und es gilt dabei

$$(x, g(x)) \in U\,, \quad f(x, g(x)) = \Theta \quad \text{und} \quad F(x, g(x)) = \begin{bmatrix} x \\ \Theta \end{bmatrix} \quad \forall\, x \in W\,.$$

Also ist $\begin{bmatrix} x \\ g(x) \end{bmatrix} = F^{-1}(x, \Theta)$. Da nach Satz 6.26 $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^{n+m})$ gilt, folgt $g \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^m)$. Dabei gilt wegen $f(x, g(x)) = \Theta\ \forall\, x \in W$ und der Kettenregel

$$\Theta = f'(x, g(x)) \begin{bmatrix} I_n \\ g'(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial f(x, g(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, g(x))}{\partial y} g'(x)\,,$$

woraus (6.3) folgt. □

Wir suchen ein Extremum der differenzierbaren Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$ unter den m Nebenbedingungen

$$\Phi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\,. \tag{6.4}$$

Wir setzen voraus, dass $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $(x, y) \mapsto \left[\ \Phi_i(x, y)\ \right]_{i=1}^m$ stetig differenzierbar ist und dass die Matrix $\Phi'(x, y)$ für alle $(x, y) \in \Omega$, die (6.4) genügen, den Rang m hat. O.E.d.A. sei die Matrix

$$\left[\ \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial \eta_j}\ \right]_{i,j=1}^m$$

für alle $(x, y) \in \Omega$, die (6.4) erfüllen, regulär.

Es sei nun $(x_0, y_0) \in \Omega$ ein Extremalpunkt von f unter den Nebenbedingungen (6.4). Nach dem Satz 6.27 über implizite Funktionen existieren eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 und Funktionen $\varphi_j : W \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\eta_j = \varphi_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,, \quad j = 1, \ldots, m\,,$$

anstelle von (6.4). Damit ist x_0 ein Extremalpunkt von $F : W \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = f(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))\,,$$

wobei die $\lambda_i \in \mathbb{R}$ vorerst noch unbestimmte Faktoren sind. Es folgt

$$\frac{\partial F(x_0)}{\partial \xi_k} = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

also (für $(x, y) = (x_0, y_0)$)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial \xi_k} + \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}\right] + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}\right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial \xi_k} + \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial \eta_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta_j}\right] \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi_k}\,, \quad k = 1, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen existieren Zahlen λ_i^0, $i = 1, \ldots, m$, mit

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i(x_0, y_0)}{\partial \eta_j} \lambda_i^0 = -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \eta_j}\,, \quad j = 1, \ldots, m\,,$$

und wir erhalten die $n + m$ Gleichungen

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \xi_k} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial \xi_k} = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,, \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \eta_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial \eta_j} = 0\,, \quad j = 1, \ldots, m\,, \tag{6.6}$$

zusammen mit den m Nebenbedingungen (6.4) zur Bestimmung von

$$\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0, \eta_1^0, \ldots, \eta_m^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0\,.$$

Die Zahlen λ_i heißen **Lagrangesche Multiplikatoren**.

Es sei bemerkt, dass in (6.4) und (6.5), (6.6) die unabhängigen Veränderlichen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und $\eta_1, \ldots, \eta_m$ gleichberechtigt auftreten, obwohl dies in der Herleitung nicht der Fall war. Die Bedingungen (6.5), (6.6) sind lediglich notwendig für das Vorliegen eines lokalen Extremums in $(x_0, y_0) \in \Omega$ unter den Nebenbedingungen (6.4).

Beispiel 6.28 *Es seien $a > b > c > 0$ und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir schneiden das Ellipsoid*

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} + \frac{\xi_3^2}{c^2} = 1\right\}$$

mit der Ebene

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \alpha\,\xi_1 + \beta\,\xi_2 + \gamma\,\xi_3 = 0\right\}$$

und suchen die Längen der Halbachsen der Schnittellipse.

6.4 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass $\lim\limits_{\xi_1\to 0}\lim\limits_{\xi_2\to 0} f(\xi_1,\xi_2)$ und $\lim\limits_{\xi_2\to 0}\lim\limits_{\xi_1\to 0} f(\xi_1,\xi_2)$ existieren, $\lim\limits_{x\to\Theta} f(x)$ aber nicht:

   (a) $f(\xi_1,\xi_2) = \dfrac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1+\xi_2}$ (b) **(HA)** $f(\xi_1,\xi_2) = \dfrac{\xi_1^2\xi_2^2}{\xi_1^2\xi_2^2+(\xi_1-\xi_2)^2}$

2. Man zeige, dass für $f(\xi_1,\xi_2) = (\xi_1+\xi_2)\sin\dfrac{1}{\xi_1}\sin\dfrac{1}{\xi_2}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{\xi_1\to 0}\lim\limits_{\xi_2\to 0} f(\xi_1,\xi_2)$ und $\lim\limits_{\xi_2\to 0}\lim\limits_{\xi_1\to 0} f(\xi_1,\xi_2)$ nicht existieren, aber $\lim\limits_{x\to\Theta} f(x) = 0$ gilt.

3. **(HA)** Berechnen Sie

   (a) $\lim\limits_{x\to\Theta}\dfrac{\xi_1^2+\xi_2^2}{\xi_1^4+\xi_2^4}$, (b) $\lim\limits_{x\to(0,a)}\dfrac{\sin(\xi_1\xi_2)}{\xi_1}$ $(a\in\mathbb{R})$, (c) $\lim\limits_{x\to(\infty,a)}\left(1+\dfrac{1}{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_1^2}{\xi_1+\xi_2}}$.

4. **(HA)** Man zeige, dass $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{\xi_1^2\xi_2}{\xi_1^4+\xi_2^2} & : & x\neq\Theta \\ 0 & : & x=\Theta \end{array}\right\}$ in $x_0=\Theta$ nicht stetig ist, obwohl f in $x_0=\Theta$ längs jeder Halbgeraden $\{(t\cos\alpha, t\sin\alpha) : 0\le t<\infty\}$ stetig ist.

5. (a) Man bestimme $D_1 f(\xi_1,1)$ für $f(\xi_1,\xi_2) = \xi_1 + (\xi_2-1)\arcsin\sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_2}}$.

   (b) Sei $f(\xi_1,\xi_2) = \operatorname{sgn}(\xi_1\xi_2)\sqrt[3]{|\xi_1\xi_2|}$. Berechnen Sie $D_k f(\Theta)$ für $k=1,2$. Ist f in $x_0=\Theta$ differenzierbar?

6. **(HA)** Man zeige, dass für $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{\xi_1\xi_2(\xi_1^2-\xi_2^2)}{\xi_1^2+\xi_2^2} & : & x\neq\Theta \\ 0 & : & x=\Theta \end{array}\right\}$ die partiellen Ableitungen $D_{21}f(\Theta)$ und $D_{12}f(\Theta)$ existieren, aber nicht übereinstimmen.

7. Man leite $f(\xi_1,\xi_2) = \sqrt{\xi_1^2+2\xi_2^2}$ in Richtung der Geraden

   (a) $\xi_2=\xi_1$, (b) $\xi_2 = 2\xi_1+1$, (c) **(HA)** $\xi_2=0$, (d) **(HA)** $\xi_1=0$

   ab. Man gebe die Richtung der Geraden so vor, dass die Richtungsableitung im Punkt

   (a) $(1,1)$, (b) $(1,3)$, (c) $(1,0)$, (d) $(0,1)$

   positiv wird.

8. **(HA)** Es sei $f:\left\{x\in\mathbb{R}^3 : \xi_k>0,\ k=1,2,3\right\}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto \sqrt[\xi_2]{\xi_1\xi_2\xi_3}$. Man bestimme die Richtungsableitungen von f in die Richtungen, die durch die Vektoren $\begin{bmatrix} \frac12 & \frac12 & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}^T$ bzw. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$ gegeben sind.

9. Es sei $f(\xi_1,\xi_2) = \xi_1^2-\xi_1\xi_2+\xi_2^2$. In welche Richtung ist die Ableitung im Punkt $x_0=(1,1)$

   (a) gleich Null, (b) am größten, (c) am kleinsten?

10. Seien $\Omega = \left\{(r,\varphi,\xi_3)\in\mathbb{R}^3 : 0<r,\ 0\le\varphi<2\pi,\ \xi_3\in\mathbb{R}\right\}$ und

$$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3\setminus\Theta,\quad (r,\varphi,\xi_3)\mapsto(r\cos\varphi, r\sin\varphi,\xi_3).$$

    Man bestimme die Ableitung dieser Funktion und deren Determinante.

    (Z) Bestimmen Sie Umkehrabbildung f^{-1} und deren Ableitung.

11. **(HA)** Man bestimme die Ableitung und deren Determinante der Funktion

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \quad (r, \varphi, \theta) \mapsto (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\cos\theta)\,,$$

wobei $\Omega = \{(r, \varphi, \theta) : 0 < r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi\}$.

12. Man untersuche folgende Funktionen auf Extremwerte
    (a) $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^3 + 3\xi_1\xi_2^2 - 15\xi_1 - 12\xi_2$ (b) **(HA)** $f(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1 - \xi_2}(\xi_1^2 - 2\xi_2^2)$

13. Bestimmen Sie die Extremstellen von $f(\xi_1, \xi_2)$ unter den angegebenen Nebenbedingungen

    (a) $f(\xi_1, \xi_2) = 6 - 4\xi_1 - 3\xi_2$, wobei $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$,
    (b) $f(\xi_1, \xi_2) = \cos^2\xi_1 + \cos^2\xi_2$, wobei $\xi_2 - \xi_1 = \frac{\pi}{4}$.

14. Bestimmen Sie den größten und kleinsten Wert von $f(\xi_1, \xi_2)$ im angegebenen Gebiet:

    (a) $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_1\xi_2 + \xi_1 + \xi_2$, $\quad \xi_1 \le 0,\ \xi_2 \le 0,\ \xi_1 + \xi_2 \ge -3$
    (b) **(HA)** $f(\xi_1, \xi_2) = \sin\xi_1 + \sin\xi_2 + \sin(\xi_1 + \xi_2)$, $\quad 0 \le \xi_1 \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \xi_2 \le \frac{\pi}{2}$

15. Durch

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} + \frac{\xi_3^2}{c^2} = 1\,, \quad a, b, c > 0\,,$$

sei eine implizite Funktion $\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2)$ gegeben. Man bestimme ihre partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung!

16. Man bestimme von folgenden, implizit gegebenen Funktionen (a) $\xi_2 = f(\xi_1)$ bzw. (b) $\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2)$ die Extremstellen:

    (a) $\xi_1^3 + \xi_2^3 - 3a\xi_1\xi_2 = 0 \quad (a > 0)$
    (b) **(HA)** $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_1 + 4\xi_2 - 6\xi_3 - 11 = 0$

17. Man zerlege die Zahl $a > 0$ in drei nichtnegative Summanden, so dass deren Produkt möglichst groß wird. Man beweise mit dem gewonnenen Resultat, dass das arithmetische Mittel dreier Zahlen $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ge 0$ nicht kleiner ist als ihr geometrisches Mittel, d.h.

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3} \ge \sqrt[3]{\xi_1\xi_2\xi_3}\,.$$

18. **(HA)** Unter allen in eine Kugel einbeschriebenen Zylindern ist der Zylinder maximalen Volumens zu finden!

Kapitel 7

Anhang: Der Satz von Stone-Weierstraß

Satz 7.1 (Weierstraß) *Ist* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig, so existiert eine Folge* $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ *von Polynomen* $p_n(x)$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} \|p_n - f\|_\infty = 0$ *. Mit anderen Worten: Die Menge der Polynome* $\mathbb{C}[x]$ *mit komplexen Koeffizienten ist dicht im Banachraum* $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ *der komplexwertigen stetigen Funktionen über* $[a,b]$ *. (Ist* f *reellwertig, so können auch die* $p_n(x)$ *reell gewählt werden.)*

Folgerung 7.2 *Für jedes Intervall* $[-a,a]$ *existiert eine Folge* $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ *von reellen Polynomen* $p_n(x)$ *mit* $p_n(0) = 0$ *, die auf* $[-a,a]$ *gleichmäßig gegen* $|x|$ *konvergiert.*

Wir betrachten im weiteren Mengen $\mathcal{A}$ (auch Familien genannt) von Funktionen $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ auf einer Menge E mit Werten in einem der Zahlenkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 7.3 *Man nennt eine Familie* $\mathcal{A}$ *von Funktionen eine* **Algebra***, wenn mit* $f, g \in \mathcal{A}$ *und* $\gamma \in \mathbb{K}$ *auch* $f+g$ *,* γf *und* fg *zu* $\mathcal{A}$ *gehören. Man sagt, dass* $\mathcal{A}$ *die Punkte von* E **separiert***, wenn für zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte* $x_1, x_2 \in E$ *ein* $f \in \mathcal{A}$ *mit* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *existiert. Man sagt,* $\mathcal{A}$ **verschwindet nirgends auf** E *, wenn zu jedem* $x \in E$ *ein* $f \in \mathcal{A}$ *mit* $f(x) \neq 0$ *existiert.*

Folgerung 7.4 *Es sei* $\mathcal{A}$ *eine Algebra von Funktionen auf* E *, die die Punkte von* E *separiert und nirgends auf* E *verschwindet. Dann existiert zu beliebigen* $x_1, x_2 \in E$ *mit* $x_1 \neq x_2$ *und beliebigen* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{K}$ *ein* $f \in \mathcal{A}$ *, so dass* $f(x_j) = \gamma_j$ *,* $j = 1, 2$ *, gilt.*

Satz 7.5 (Stone-Weierstraß) *Es sei* $\mathcal{A}$ *eine Algebra reellwertiger und stetiger Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum* K *. Separiert* $\mathcal{A}$ *die Punkte von* K *und verschwindet nirgends auf* K *, so ist* $\mathcal{A}$ *dicht im Raum* $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ *der stetigen reellwertigen Funktionen auf* K*.*

Mit anderen Worten: Zu jeder stetigen Funktion $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{A}$, die auf K gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beispiel 7.6 *Die Algebra aller Funktionen* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ *der Gestalt* $f(e^{\mathbf{i}x}) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k e^{\mathbf{i}kx}$ *,* $n \in \mathbb{N}_0$ *,* $\gamma_k \in \mathbb{C}$ *, separiert die Punkte des Einheitskreises* $\mathbb{T} = \left\{ e^{\mathbf{i}x} : 0 \le x < 2\pi \right\}$ *und verschwindet nirgends auf* $\mathbb{T}$ *. Diese Algebra ist aber* **nicht** *dicht in* $(\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ *.*

Satz 7.7 *Es sei* $\mathcal{A}$ *eine Algebra komplexwertiger und stetiger Funktionen auf dem kompakten metrischen Raum* K *mit der Eigenschaft, dass aus* $f \in \mathcal{A}$ *auch* $\overline{f} \in \mathcal{A}$ *folgt, wobei* $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$ *,* $x \in K$ *. Separiert* $\mathcal{A}$ *die Punkte von* K *und verschwindet nirgends auf* K *, so ist* $\mathcal{A}$ *dicht im Raum* $(\mathcal{C}(K,\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ *.*

Index