Skript zur Vorlesung

Funktionentheorie

WS 2007/08

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] K. Burg, H. Haf, F. Wille, Höhere Mathematik für Ingenieure, Band IV, Vektoranalysis und Funktionentheorie, Teubner, Stuttgart.

[2] W. Fischer, I. Lieb, Funktionentheorie, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden.

[3] W. Forst, D. Hoffmann, Funktionentheorie erkunden mit Maple, Springer-Verlag, Berlin, ...

[4] A. Herz, M. Schalk, Repetitorium der Funktionentheorie, Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden.

[5] K. Jänich, Einführung in die Funktionentheorie, Springer-Verlag, Berlin, ...

[6] K. Jänich, Analysis für Physiker und Ingenieure, Funktionentheorie, Differentialgleichungen, spezielle Funktionen, Springer-Verlag, Berlin, ...

[7] K. Jänisch, Funktionentheorie, Eine Einführung, Springer-Verlag, Berlin, ...

[8] M. A. Lawrentjew, B. V. Schabat, Methoden der komplexen Funktionentheorie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[9] R. Remmert, Funktionentheorie, Springer-Verlag, Berlin, ...

[10] F. Rühs, Funktionentheorie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[11] S. Timmann, Repetitorium der Funktionentheorie, Verlag Binomi, Hannover.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Die stereografische Projektion

Die sogenannte Gaußsche Zahlenebene der komplexen Zahlen $z = x + \mathbf{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{C}$. Durch den Abstand $|z_1 - z_0|$ zweier komplexer Zahlen $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ ist uns eine Metrik gegeben und damit eine ganze Reihe von topologischen Grundbegriffen, wie z.B. der Begriff der konvergenten Zahlenfolge ($z_n \to z^* \iff |z_n - z^*| \to 0$) sowie die Begriffe der offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen. Neben den aus der reellen Analysis bekannten Regeln für konvergente Folgen gilt

$$z_n = x_n + \mathbf{i}y_n \longrightarrow z^* = x^* + \mathbf{i}y^* \Longleftrightarrow x_n \longrightarrow x^* \quad \text{und} \quad y_n \longrightarrow y^*$$

und

$$z_n \longrightarrow z^* \Longleftrightarrow \overline{z_n} \longrightarrow \overline{z^*}.$$

Dabei ist $\overline{z} = x - \mathbf{i}y$ die zu $z = x + \mathbf{i}y$ konjugiert komplexe Zahl. Man nennt $x = \mathsf{Re}\, z$ und $y = \mathsf{Im}\, z$ den Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Zahl $z = x + \mathbf{i}y$. Für $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir mit $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ die sogenannte ε-Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$. Ist $R > 0$, so nennen wir $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ eine Umgebung des unendlich fernen Punktes P_∞. Dass es natürlich ist, von genau einem unendlich fernen Punkt zu sprechen, zeigt die sogenannte **stereografische Projektion** der komplexen Zahlenebene auf die Oberfläche einer Kugel. Dazu legen wir eine Kugel vom Durchmesser 1 auf die komplexe Zahlenebene, und zwar im Nullpunkt. Der Bildpunkt P_z auf der Kugeloberfläche K der komplexen Zahl z ist der Durchstoßpunkt der Verbindungslinie von z zum Nordpol $P = (0, 0, 1)$ der Kugel. Für $z = x + \mathbf{i}y$ und $P_z = (\xi, \eta, \zeta)$ gilt also

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}$$

und

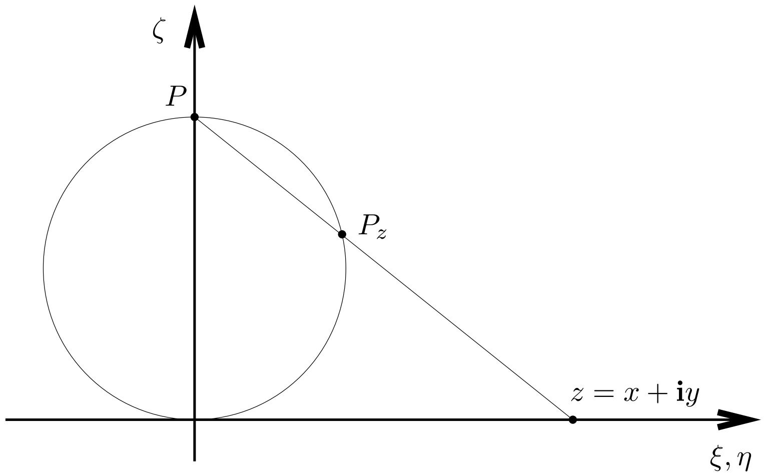
$$P_z \in K = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\} = \big\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta) \big\} \,.$$

Es folgt

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}\,, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{\zeta}{1 - \zeta}\,,$$

so dass

$$\zeta = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\,, \quad \xi = \frac{x}{x^2+y^2+1}\,, \quad \eta = \frac{y}{x^2+y^2+1}\,.$$



Satz 1.1. *Bei der stereografischen Projektion bestehen zwischen $z = x + \mathbf{i}y$ und $P_z = (\xi, \eta, \zeta)$ die Relationen*

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}\,, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}\,, \quad x^2+y^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta} \tag{1.1}$$

und

$$\xi = \frac{x}{x^2+y^2+1}\,, \quad \eta = \frac{y}{x^2+y^2+1}\,, \quad \zeta = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\,. \tag{1.2}$$

Dabei gehen Kreise (und Geraden, d.h. Kreise mit unendlichem Radius) in Kreise auf der Kugeloberfläche über und umgekehrt.

Das Urbild P_∞ des Punktes P bei der stereografischen Projektion nennen wir **unendlich fernen Punkt**. Die Menge $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$ heißt **abgeschlossene** bzw. **kompaktifizierte Zahlenebene**. Es gilt $z_n \longrightarrow P_\infty$ genau dann, wenn $|z_n| \longrightarrow \infty$. In $\overline{\mathbb{C}}$ kann auch ein Abstand definiert werden, und zwar durch

$$d(z_1, z_0) := |P_{z_1} - P_{z_0}|\,,$$

wobei $|\,.\,|$ die Euklidische Norm im dreidimensionalen Raum bezeichnet.

1.2 Holomorphe Funktionen

Eine zusammenhängende offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**. Im weiteren sei G stets ein Gebiet. Wir betrachten Funktionen $f : G \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ z \mapsto f(z)$. Manchmal schreiben wir für $f(z)$ auch $f(x,y)$, wobei $z = x + \mathbf{i}y$. Weiterhin kann f auch in der Form $f(x,y) = u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y)$ mit $u, v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden.

Definition 1.2. *Die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$* **(komplex) differenzierbar**, *wenn eine in z_0 stetige Funktion $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert, so dass*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z) \quad \forall\, z \in G \tag{1.3}$$

gilt. Die Zahl $f'(z_0) := g(z_0)$ heißt **Ableitung** *von f im Punkt z_0.*

Wir erinnern an den Begriff der Stetigkeit: Die Funktion g ist stetig in $z_0 \in G$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $g(z) \in U_\varepsilon(g(z_0))\ \forall\, z \in U_\delta(z_0)$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass aus $z_n \longrightarrow z_0$ stets $g(z_n) \longrightarrow g(z_0)$ folgt.

Bemerkung 1.3. *In (1.3) kann man sich auf $z \in U_\varepsilon(z_0) \subset G$ einschränken. Die Bedingung* (1.3) *ist äquivalent zu*

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \forall\, z \in G \setminus \{z_0\},$$

und die Stetigkeit von $g(z)$ im Punkt z_0 gleichbedeutend mit der Existenz des Grenzwertes dieses Differenzenquotienten für $z \longrightarrow z_0$.

Wir schreiben $f(z) = f(x,y)$ mit $z = x + \mathbf{i}y$ und erinnern an den Begriff der (reellen) Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : G \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in $z_0 = (x_0, y_0) \in G$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x,y) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

mit $A : G \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ stetig in (x_0, y_0) bzw.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)A_1(x,y) + (y - y_0)A_2(x,y)$$

mit $A_1, A_2 : G \to \mathbb{R}^2$ stetig in (x_0, y_0). Es sind dann

$$A_1(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = f_x(x_0,y_0) \qquad \text{und} \qquad A_2(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = f_y(x_0,y_0).$$

Schreibt man $f = u + \mathbf{i}v$ mit $u, v : G \longrightarrow \mathbb{R}$, so ist die reelle Differenzierbarkeit von f äquivalent zu der von u und v.

Satz 1.4. *$f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann reell im Punkt z_0 differenzierbar, wenn in z_0 stetige Funktionen $B_1, B_2 : G \to \mathbb{C}$ existieren, so dass*

$$f(z) = f(z_0) + B_1(z)(z - z_0) + B_2(z)(\overline{z} - \overline{z}_0) \quad \forall\, z \in G$$

gilt. Dabei ist

$$B_1(z_0) = \frac{1}{2}\left[f_x(z_0) - \mathbf{i}f_y(z_0)\right] \quad \textit{und} \quad B_2(z_0) = \frac{1}{2}\left[f_x(z_0) + \mathbf{i}f_y(z_0)\right].$$

Die Zahlen

$$f_z(z_0) := \frac{1}{2}\left[f_x(z_0) - \mathbf{i}f_y(z_0)\right] \quad \text{und} \quad f_{\overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left[f_x(z_0) + \mathbf{i}f_y(z_0)\right]$$

nennt man **Wirtinger-Ableitungen** von f im Punkt z_0.

Satz 1.5. *$f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in G$ (komplex) differenzierbar, wenn f in z_0 reell differenzierbar ist und $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ gilt.*

Beispiel 1.6. *Die Funktion $f(z) = \overline{z}$ ist wegen $f_{\overline{z}}(z) = 1$ nicht komplex differenzierbar.*

Folgerung 1.7. *Ist f in z_0 differenzierbar, so gilt $f'(z_0) = \frac{1}{2}[f_x(z_0) - \mathbf{i} f_y(z_0)] = f_z(z_0)$ und wegen*

$$0 = f_{\overline{z}}(z_0) = f_x(z_0) + \mathbf{i} f_y(z_0) = u_x(x_0, y_0) + \mathbf{i} v_x(x_0, y_0) + \mathbf{i} u_y(x_0, y_0) - v_y(x_0, y_0)$$

gelten die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)\,, \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)\,.$$

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) = 0 \ \forall\, z \in G$, so ist $f(z) \equiv \mathrm{const}$ auf G.

Man nennt eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ **holomorph** (in G), wenn f in jedem Punkt $z_0 \in G$ differenzierbar ist. f heißt **im Punkt** $z_0 \in G$ **holomorph**, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f : U_\varepsilon(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. $f : G_1 \longrightarrow G_2$ ($G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ - Gebiete) heißt **biholomorph**, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch $f^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ holomorph sind.

Satz 1.8. *Die Funktion $f : G_1 \longrightarrow G_2$ ist genau dann biholomorph, wenn f bijektiv ist, f^{-1} stetig ist und $f'(z) \neq 0 \ \forall\, z \in G_1$ gilt.*

1.3 Potenzreihen

Eine Folge von Funktionen $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ heißt **gleichmäßig konvergent** gegen $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \ \forall\, n \geq n_0$ und $\forall\, z \in G$ gilt. (In Zeichen: $f_n \rightrightarrows f$). Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ heißt gleichmäßig konvergent mit der Summe $s(z)$, wenn $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ gleichmäßig gegen s konvergiert.

Bemerkung 1.9. *(Wiederholung)*

1. *Sind $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $f_n \rightrightarrows f$, so ist $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig.*

2. *(Cauchysches Konvergenzkriterium) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf G, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} f_k(z) \right| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad m \geq n \geq n_0 \quad \text{und} \quad \forall\, z \in G\,.$$

3. *(Majorantenkriterium) Ist die Zahlenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ $(a_n \in \mathbb{R})$ konvergent und gilt $|f_n(z)| \leq a_n$ $\forall\, n \geq n_0$ und $\forall\, z \in G$, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ (absolut) gleichmäßig konvergent.*

4. *Ist $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, so sprechen wir von der* **Potenzreihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *mit dem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Zahl $r_0 := \left[\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right]^{-1}$ ist der sogenannte* **Konvergenzradius** *dieser Potenzreihe. Es gilt:*

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *konvergiert absolut gleichmäßig auf* $U_r(z_0)$ *für beliebiges* $r \in (0, r_0)$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *ist divergent für* $|z-z_0| > r_0$.

Satz 1.10. *Im Fall* $r_0 > 0$ *ist die Summenfunktion* $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *auf* $U_{r_0}(z_0)$ *holomorph, und es gilt*

$$p^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k} \quad \forall\, z \in U_{r_0}(z_0)\,,\ \forall\, k = 1, 2, \ldots$$

Insbesondere ist $a_n = \dfrac{p^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

1.4 Elementare Funktionen

1.4.1 Die Exponentialfunktion

Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,. \tag{1.4}$$

Offenbar ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe gleich ∞ und somit e^z auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph (solche Funktionen heißen **ganze Funktionen**, engl.: entire functions). Ferner gilt nach Satz 1.10

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z\,.$$

Es seien $w \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl, aber fest gewählt, und $f(z) = \exp(-z)\exp(w+z)$, $z \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$f'(z) = \exp(-z)\exp(w+z) - \exp(-z)\exp(w+z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

und somit $f(z) \equiv f(0) = \exp(w)$. Wir erhalten für alle $z \in \mathbb{C}$

$$e^{-z}e^{w+z} = e^w\,, \quad e^{-z}e^z = 1 \quad \text{und} \quad e^z \neq 0\,.$$

Also gilt $e^{w+z} = e^w e^z$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.

1.4.2 Trigonometrische Funktionen

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \quad \text{und} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}\,.$$

Dann folgt aus Satz 1.10

$$(\sin z)' = \cos z \quad \text{und} \quad (\cos z)' = -\sin z$$

sowie aus Formel (1.4)

$$\cos z + \mathbf{i}\sin z = e^{\mathbf{i}z}\,.$$

Dies führt mit $\cos(-z) + \mathbf{i}\sin(-z) = \cos(z) - \mathbf{i}\sin(z) = e^{-\mathbf{i}z}$ zu den **Eulerschen Formeln**

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z} + e^{\mathbf{i}z}\right) \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}\right)\,. \tag{1.5}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\cos(z_1 + z_2) &= \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}(z_1+z_2)} + e^{-\mathbf{i}(z_1+z_2)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_1}e^{\mathbf{i}z_2} + e^{-\mathbf{i}z_1}e^{-\mathbf{i}z_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_1} + e^{-\mathbf{i}z_2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_2} + e^{-\mathbf{i}z_2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_1} - e^{-\mathbf{i}z_1}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_2} - e^{-\mathbf{i}z_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_1} + e^{-\mathbf{i}z_2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_2} + e^{-\mathbf{i}z_2}\right) - \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(e^{\mathbf{i}z_1} - e^{-\mathbf{i}z_1}\right)\cdot\frac{1}{2\mathbf{i}}\left(e^{\mathbf{i}z_2} - e^{-\mathbf{i}z_2}\right)\\
&= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2\,.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man die Gültigkeit von $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2\,.$

1.4.3 Nullstellen und Perioden

Für $z = x + \mathbf{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, ist $e^z = e^x e^{\mathbf{i}y} = e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y)$, also $|e^z| = e^x$ und $\arg e^z = y = \operatorname{Im} z$. Die Funktion $e^{\mathbf{i}z}$ bildet das Intervall $z \in [0, 2\pi)$ eineindeutig auf den Einheitskreis

$$\mathbb{T} = \left\{e^{\mathbf{i}t} : t \in [0, 2\pi)\right\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

ab. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Offenbar ist $e^{2\pi\mathbf{i}} = 1$, also $e^{z+2\pi\mathbf{i}k} = e^z(e^{2\pi\mathbf{i}})^k = e^z$, d.h. $T_k = 2\pi\mathbf{i}k$ ist eine Periode von e^z , und zwar $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Ist umgekehrt $e^{z_1} = e^{z_2}$, so folgt für $z := z_1 - z_2 = x + \mathbf{i}y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ die Formel $1 = e^z = e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y)$. Also sind $e^x = 1$ (d.h $x = 0$) und $\cos y = 1$, $\sin y = 0$, d.h. $y = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Somit hat die Funktion e^z keine weiteren Perioden außer $T_k = 2\pi\mathbf{i}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Folgerung 1.11. *Für $a \in \mathbb{R}$ wird der Streifen $\{z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Im} z < a + 2\pi\}$ durch die Funktion $z \mapsto e^z$ bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet. Das ergibt sich aus der eben erkannten Periodizität von e^z und der Tatsache, dass die Gleichung $e^z = w$ für beliebiges $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Lösung besitzt, nämlich $z = x + \mathbf{i}y$ mit $x = \ln |w|$ und $y = \arg w$.*

Wir suchen die Nullstellen von $\sin z$ und $\cos z$. Unter Verwendung der Eulerschen Formeln (1.5) erhalten wir

$$0 = \sin z \Longleftrightarrow 0 = e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z} \Longleftrightarrow e^{2\mathbf{i}z} = 1 \Longleftrightarrow z = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

und

$$0 = \cos z \Longleftrightarrow 0 = e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z} \Longleftrightarrow e^{2\mathbf{i}z} = -1 \Longleftrightarrow z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Aus den Eulerschen Formeln folgt, dass $\cos z$ und $\sin z$ die Perioden $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, haben. Ist umgekehrt $w \in \mathbb{C}$ eine Periode von $\sin z$, so folgt $\sin w = \sin 0 = 0$, d.h. $w = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, da $\sin z$ nach den obigen Überlegungen nur diese Nullstellen hat. Also sind die reellen Perioden $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, auch die einzigen Perioden von $\sin z$. (Analog für $\cos z$.)

1.4.4 Weitere Beispiele für elementare Funktionen

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} \\
\cot z &= \frac{\cos z}{\sin z} \\
\cosh z &= \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-\mathbf{i}(\mathbf{i}z)} + e^{\mathbf{i}(\mathbf{i}z)}\right) = \cos(\mathbf{i}z) \\
\sinh z &= \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-\mathbf{i}(\mathbf{i}z)} - e^{\mathbf{i}(\mathbf{i}z)}\right) = -\mathbf{i}\sin(\mathbf{i}z)
\end{aligned}$$

1.5 Übungsaufgaben

1. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$ eine hermitesche Matrix. Man zeige, dass die Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} z & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \overline{z} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

   eine Kreislinie oder Gerade ist, falls $\det A < 0$ gilt.

2. Beweisen Sie mit Hilfe der Rechengesetze für komplexe Zahlen, dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck π beträgt.

3. Man zeige, dass für komplexe α und β ($\beta \neq 0$) das Gleichheitszeichen in $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ genau dann steht, wenn $\dfrac{\alpha}{\beta}$ reell und nichtnegativ ist.

4. Für welche $z \in \mathbb{C}$ existieren folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} nz^n$, (c) **(HA)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$.

5. Beweisen Sie (unter Verwendung der ε-δ-Definition) die Stetigkeit von $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$.

6. Man beweise unter Verwendung der Definition 1.2 die Summen-, Produkt-, **(HA)** Quotienten- und **(HA)** Kettenregel für die Differentiation von Funktionen.

7. Man untersuche folgende Funktionen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit Hilfe der Definition 1.2 auf Differenzierbarkeit:

   (a) **(HA)** $f(z) = 5\mathbf{i}$, (b) $f(z) = z$, (c) $f(z) = \overline{z}$, (d) **(HA)** $f(z) = 3\,\mathsf{Re}\, z$.

8. Man untersuche folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit und gebe gegebenenfalls die Ableitung $f'(z)$ an:

   (a) $f(z) = z\overline{z}$, (b) **(HA)** $f(z) = z^2\overline{z}$, (c) $f(z) = \mathsf{Im}\, z$,

   (d) **(HA)** $f(z) = e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y)$ $(z = x + \mathbf{i}y)$, (e) $f(z) = \sqrt{|xy|}$ $(z = x + \mathbf{i}y)$,

   (f) $f(z) = z\,\mathsf{Re}\, z$, (g) **(HA)** $f(z) = |z|$.

9. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z^{-4}} & : \quad z \neq 0 \\ 0 & : \quad z = 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt nicht stetig ist, aber in jedem Punkt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. In welchen Punkten ist f differenzierbar?

10. Bestimmen Sie reelle Konstanten a, b, c, für die die folgenden Funktionen ganze Funktionen sind ($z = x + \mathbf{i}y$):

    (a) $f(z) = x + ay + \mathbf{i}(bx + cy)$,

    (b) **(HA)** $f(z) = \cos x(\cosh y + \mathbf{i} \sinh y) + \sin x \cosh y + b\, \mathbf{i} \sinh y)$.

11. Man bestimme Gebiete, in denen die Funktion $f(z) = |x^2 - y^2| + 2\mathbf{i}|xy|$ analytisch ist ($z = x + \mathbf{i}y$).

12. Die Funktion $f(z) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y)$, $z = x + \mathbf{i}y$, genüge den Bedingungen

    (a) $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

    (b) $f(z)$ ist ganze Funktion,

    (c) $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$,

    (d) $f(0) = 0$,

    Man bestimme $v(x, y)$.

13. Sei $f(z) = u(z) + \mathbf{i}v(z) = \rho(z)e^{\mathbf{i}\varphi(z)}$ eine holomorphe Funktion im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Man beweise: Wenn eine der Funktionen $u, v, \rho, \varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ konstant ist in G , so ist auch $f(z)$ in G konstant.

14. Entwickeln Sie folgende Funktionen in $z_0 \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe:

    (a) $f(z) = e^z$, $z_0 = \pi\mathbf{i}$, (b) $f(z) = \dfrac{1}{z - \mathbf{i}}$, $z_0 = 0$,

    (c) $f(z) = \dfrac{1}{(z - \mathbf{i})^3}$, $z_0 = -\mathbf{i}$, (d) **(HA)** $f(z) = \dfrac{2z + 1}{(z^2 + 1)(z + 1)^2}$, $z_0 = 0$.

15. Für welche komplexen Zahlen z konvergieren die Reihen

    (a) $1 + (2z + 1) + (2z + 1)^2 + \ldots$, (b) $1 + 2\dfrac{z - 1}{z + 1} + 2\left(\dfrac{z - 1}{z + 1}\right)^2 + \ldots$

    Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz sie Summe der Reihe?

16. Man berechne die ersten drei Glieder der Potenzreihe von $f(z)$ in $z_0 = 0$ für

    (a) **(HA)** $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$, (b) $f(z) = \tan z$.

17. Entwickeln Sie $f(z) = \sin^2 z$ in $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe.

18. Man beweise die Gültigkeit der folgenden Beziehungen ($z = x + \mathbf{i}y$):

    (a) $\mathsf{Re}\, \sin z = \sin x \cdot \cosh y$, $\mathsf{Im}\, \sin z = \cos x \cdot \sinh y$,

(b) $|\sin z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$,

(c) **(HA)** $\cos z = \cos x \cosh y - \mathbf{i} \sin x \sinh y$.

19. Auf welchen Teilmengen der komplexen Zahlenebene sind die Funktionen $f_1(z) = e^z$, $f_2(z) = \cos z$, **(HA)** $f_3(z) = \sin z$ reellwertig? Berechnen Sie $f_1\left(\frac{\pi}{2}(1+\mathbf{i})\right)$, $f_2(\pi + \mathbf{i})$ und **(HA)** $f_3(2\mathbf{i})$.

20. Man bestimme alle Lösungen $w = u + \mathbf{i}v \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen:

    (a) $e^w = re^{\mathbf{i}\varphi}$ $(r, \varphi \in \mathbb{R})$, (b) $e^w = 1$, (c) $e^w = \mathbf{i}$,

    (d) $\sin w = \frac{1}{2}$, (e) **(HA)** $\cos w = \frac{1}{2}$, (f) $\sin w = \mathbf{i}$.

21. Man bestimme (für $k \in \mathbb{Z}$ fixiert) das Bild des Gebietes

$$G_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2}(2k-1) < \mathsf{Re}\, z < \frac{\pi}{2}(2k+1) \right\}$$

bei der Abbildung $w = f(z) = \sin z$. Ist $f(z)$ dort eineindeutig?

22. Man bestimme das Bild $f(D)$ des Gebietes

    (a) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z > 0\}$ bei der Abbildung $w = f(z) = z^2$,

    (b) $D = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathsf{Im}\, z < 0\}$ bei der Abbildung $w = f(z) = e^z$,

    (c) **(HA)** $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z > |\mathsf{Im}\, z|\}$ bei der Abbildung $f(z) = z^3$.

23. Welche Gebiete $D_n \subset \mathbb{C}$ werden durch $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ auf die "geschlitzte" Ebene $E = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ eineindeutig abgebildet?

24. Bestimmen Sie die Bildmengen folgender Punktmengen bei der Abbildung $w = \frac{1}{\overline{z}}$:

    (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$, (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ $(r > 0)$,

    (c) $\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} \right\}$, (d) **(HA)** $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z = 1\}$.

Kapitel 2

Kurvenintegrale und Stammfunktionen

2.1 Integrationswege und Kurvenintegrale

Definition 2.1. *Unter einem* **Jordan-Integrationsweg** Γ *verstehen wir eine Kurve, die Bild einer stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktion* $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist, wobei* $\alpha < \beta$ *gelte und* $\gamma : [\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{C}$ *injektiv sei. Stückweise stetig differenzierbar heißt, dass eine Zerlegung* $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta$ *existiert, so dass* $\gamma' : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ *stetig ist* $\forall\, j = 1, \ldots, m$ *. Ist* $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ *, so heißt* Γ **geschlossener** *Jordan-Integrationsweg.* Γ *heißt* **Integrationsweg**, *wenn sich* Γ *als Vereinigung endlich vieler Jordan-Integrationswege darstellen lässt, die höchstens endlich viele Punkte gemeinsam haben. Der Jordan-Integrationsweg* Γ *heißt stückweise glatt, wenn* $\gamma'(t \pm 0) \neq 0 \;\forall\, t \in [\alpha, \beta]$ *gilt.*

Wir vereinbaren, dass die Parametrisierung $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ eines Jordan-Integrationsweges Γ zugleich eine **Orientierung** von Γ angibt, d.h. $\gamma(\alpha)$ ist Anfangspunkt von Γ und $\gamma(\beta)$ Endpunkt von Γ . Ist Γ geschlossen, so sei Γ so orientiert, dass das von Γ berandete beschränkte Gebiet **links** von Γ liegt. Sind $z_j = \gamma(t_j) \in \Gamma$, $j = 1, 2$, zwei Punkte auf Γ , so schreiben wir $z_1 \prec z_2$ genau dann, wenn $t_1 < t_2$ gilt.

Definition 2.2. *Es seien* $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ *die Parametrisierung des Jordan-Integrationsweges* Γ *und* $Z = \{\gamma(\alpha) = z_0 \prec z_1 \prec \cdots \prec z_n = \gamma(\beta)\}$ *eine Zerlegung von* Γ *. Ferner wählen wir eine Menge* $W_Z = \{z_1^*, \ldots, z_n^*\} \subset \Gamma$ *mit* $z_{k-1} \preceq z_k^* \preceq z_k$ *,* $k = 1 \ldots n$ *. Wir setzen* $\delta_n(Z) = \max\{|z_k - z_{k-1}| : k = 1, \ldots, n\}$ *und*

$$S_n(Z, W_Z) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)(z_k - z_{k-1})$$

wobei $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ *eine gegebene stetige Funktion sei. Wir wählen die Folge der Zerlegungen so, dass* $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(Z) = 0$ *, gilt, und bezeichnen den Grenzwert* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(Z, W_Z)$ *mit*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz \,.$$

Diese Definition ist korrekt, d.h. der Grenzwert existiert und ist unabhängig der Parametrisierung von Γ (bei Beibehaltung der Orientierung), von der Wahl der Zerlegung Z und der Wahl der Menge der Zwischenstellen W_Z. Das lässt sich wie folgt begründen.

Mit den Bezeichnungen $z = x + \mathbf{i}y$, $\gamma(t) = x(t) + \mathbf{i}y(t)$, $f = u + \mathbf{i}v$, $z_k = \gamma(t_k)$ und $z_k^* = \gamma(t_k^*)$ sowie $\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$, $\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1})$ folgt

$$\begin{aligned} S_n(Z, W_Z) &= \sum_{k=1}^{n} [u(x(t_k^*), y(t_k^*))\Delta x_k - v(x(t_k^*), y(t_k^*))\Delta y_k] \\ &\quad + \mathbf{i} \sum_{k=1}^{n} [v(x(t_k^*), y(t_k^*))\Delta x_k + u(x(t_k^*), y(t_k^*))\Delta y_k] \\ &\longrightarrow \int_\alpha^\beta [u(x(t), y(t))\, dx(t) - v(x(t), y(t))\, dy(t)] \\ &\quad + \mathbf{i} \int_\alpha^\beta [v(x(t), y(t)\, dx(t) + u(x(t), y(t))\, dy(t)] \\ &= \int_\alpha^\beta [u(x(t), y(t)) + \mathbf{i}v(x(t), y(t))][dx(t) + \mathbf{i}\, dy(t)]\,. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))[x'(t) + \mathbf{i}y'(t)]\, dt = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt\,.$$

Beispiel 2.3. *Es seien $\Gamma = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $F'(t) = f(t)$, $t \in (a, b)$ und $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist*

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)\, dz &= \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\, dt + \mathbf{i} \int_a^b \operatorname{Im} f(t)\, dt \\ &= [\operatorname{Re} F(t)]_a^b + \mathbf{i}\, [\operatorname{Im} F(t)]_a^b = F(b) - F(a)\,. \end{aligned}$$

Beispiel 2.4 (Das Grundintegral der Funktionentheorie). *Für $\gamma(t) = z_0 + Re^{\mathbf{i}t}$, $R > 0$, $0 \le t \le 2\pi$ und $f(z) = (z - z_0)^k$, $k \in \mathbb{Z}$ sind $\Gamma = \partial U_R(z_0)$ die Kreislinie vom Radius R um den Mittelpunkt z_0 und*

$$\begin{aligned} \int_{\partial U_R(z_0)} f(z)\, dz &= \int_{\partial U_R(z_0)} (z - z_0)^k\, dz \\ &= \int_0^{2\pi} R^k e^{\mathbf{i}kt} \cdot R\, \mathbf{i} e^{\mathbf{i}t}\, dt \\ &= \mathbf{i}R^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{\mathbf{i}(k+1)t}\, dt \\ &= \begin{cases} 2\pi\mathbf{i} & : \; k = -1\,, \\ \mathbf{i}R^{k+1} \dfrac{1}{\mathbf{i}(k+1)} \left[e^{\mathbf{i}(k+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0 & : \; k \neq -1\,, \end{cases} \end{aligned}$$

d.h

$$\int_{\partial U_R(z_0)} (z - z_0)^k\, dz = \begin{cases} 2\pi\mathbf{i} & : \; k = -1\,, \\ 0 & : \; \textit{sonst}\,, \end{cases}$$

unabhängig von R.

Definition 2.5. *Es sei* $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j$ *ein Integrationsweg* (*d.h. die Kurven* Γ_j, $j = 1, \ldots, n$, *sind Jordan-Integrationswege, die paarweise nur endlich viele Punkte gemeinsam haben*). *Wir definieren dann*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} f(z)\,dz.$$

Definition 2.6. *Eine Kurve* Γ *heißt* **rektifizierbar**, *wenn das Supremum der Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge endlich ist. Die* **Länge** $\ell(\Gamma)$ *der Kurve* Γ *ist dann gleich diesem Supremum.*

Satz 2.7. *Ein Jordan-Integrationsweg* $\Gamma = \{\gamma(t) : \alpha \le t \le \beta\}$ *ist rektifizierbar, und es gilt*

$$\ell(\Gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt = \int_\Gamma |dz|\,.$$

Bemerkung 2.8. *Ist* $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ *stetig, so gilt*

$$\left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| \le \ell(\Gamma) \max\left\{ |f(z)| : z \in \Gamma \right\}\,.$$

Das folgt aus

$$\begin{aligned} \left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| &= \left| \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \right| \le \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \\ &\le \int_\Gamma |f(z)|\,|dz| \le \max\left\{ z \in \Gamma : |f(z)| \right\} \int_\Gamma |dz|\,. \end{aligned}$$

Definition 2.9. *Gegeben sei eine stetige Funktion* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$. *Eine Funktion* $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *heißt* **Stammfunktion** *von* f, *wenn* F *holomorph ist und* $F'(z) = f(z)$, $\forall\, z \in G$ *gilt. Man sagt, dass* f *auf* G **lokale Stammfunktionen** *besitzt, wenn zu jedem* $z \in G$ *eine Umgebung* $U_\varepsilon(z) \subset G$ *existiert, so dass* $f : U_\varepsilon(z) \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine Stammfunktion hat.*

Satz 2.10. *Es seien* $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine Stammfunktion der Funktion* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *und* $\Gamma = \{\gamma(t) : \alpha \le t \le \beta\}$ *ein Jordan-Integrationsweg in* G. *Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))\,.$$

Beispiel 2.11. *Die Funktion* $f(z) = z^n$ *hat in* $\mathbb{C}$ *die Stammfunktion* $F(z) = \dfrac{1}{n+1}\, z^{n+1}$, *falls* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

Beispiel 2.12. *Es seien* $f(z) = |z|$, $\Gamma_1 = [-1, 1]$ *und* $\Gamma_2 = \left\{ e^{\mathbf{i}(\pi - t)} : t \in [0, \pi] \right\}$. *Dann folgt*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |t|\,dt = 2\int_0^1 t\,dt = 1$$

und

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} |z|\,dz = \int_0^\pi 1 \cdot (-\mathbf{i}) e^{\mathbf{i}(\pi - t)}\,dt = [e^{\mathbf{i}(\pi - t)}]_0^\pi = 1 - (-1) = 2\,.$$

Somit hat nach Satz 2.10 die Funktion $f(z) = |z|$ *in einem Gebiet, welches* Γ_1 *und* Γ_2 *enthält,* **keine** *Stammfunktion!*

Beispiel 2.13. *Die Funktion* $f(z) = \dfrac{1}{z}$ *besitzt auf* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ **keine** *Stammfunktion. Das folgt aus Satz 2.10 und Bsp. 2.4.*

Satz 2.14. *Eine stetige Funktion* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *hat genau dann eine Stammfunktion auf* G, *wenn für jeden geschlossenen Jordan-Integrationsweg* $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

gilt.

Satz 2.15. *Es seien* G *ein konvexes Gebiet und* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig. Dann besitzt* f *eine Stammfunktion auf* G *genau dann, wenn für jede Dreieckskurve* $\Delta = [z_0, z_1, z_2, z_0] \subset G$

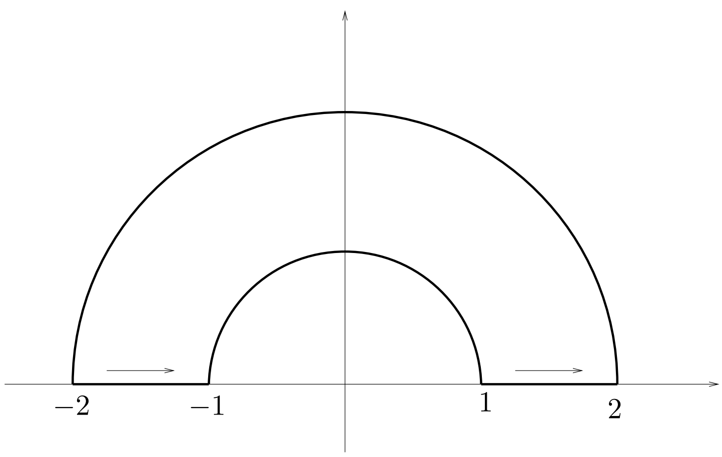
$$\int_\Delta f(z)\,dz = 0$$

gilt.

Folgerung 2.16. *Ist* G *ein beliebiges Gebiet und* $\int_\Delta f(z)\,dz = 0$ *für beliebige Dreieckskurven* $\Delta \subset G$, *so besitzt* f *lokale Stammfunktionen.*

2.2 Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie eine Stammfunktion der (reellen) Funktion $f(x) = (x^2 - 4x + 5)^{-1}$
   (a) durch reelle Rechnung,
   (b) durch Zerlegung von $z^2 - 4z + 5$ in (komplexe) Linearfaktoren.
2. Berechnen Sie
   (a) $\displaystyle\int_\beta^\alpha z\,dz$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^z\,dz$, (c) **(HA)** $\displaystyle\int_0^{(1+\mathbf{i})\pi} \cos z\,dz$, (d) $\displaystyle\int_0^1 |z|\,dz$.
3. Berechnen Sie
   (a) **(HA)** $\displaystyle\int_\Gamma z\overline{z}\,dz$, wobei Γ die geradlinige Verbindung von 0 nach $1 + \mathbf{i}$ ist,
   (b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{\overline{z}}\,dz$, wobei Γ der gezeichnete Weg ist.



Kapitel 3

Cauchyscher Integralsatz, Cauchysche Integralformel und Laurentreihen

3.1 Der Cauchysche Integralsatz für konvexe Gebiete

Im weiteren bezeichnen wir mit Δ eine Dreiecksfläche.

Satz 3.1. *Es seien $\Delta \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Delta$ und f eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von Δ mit eventueller Ausnahme von z_0, wo sie aber wenigstens stetig ist. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0\,.$$

Satz 3.2 (Cauchyscher Integralsatz für konvexe Gebiete)**.** *Die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sei stetig und mit eventueller Ausnahme eines Punktes holomorph. Das Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sei konvex. Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion, und es gilt*

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0$$

für jeden geschlossenen Jordan-Integrationsweg $\Gamma \subset G$.

Satz 3.3. *Es sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $f(z)$ beliebig oft differenzierbar, und für jede abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{U_r(z_0)} \subset G$ gilt die* **Cauchysche Integralformel**

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi\,, \quad z \in U_r(z_0)\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Beispiel 3.4. *Für gegebene $\lambda > 0$ und $\alpha > 0$ berechnen wir das uneigentliche Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\alpha x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\alpha x)\, dx\,.$$

(*Es genügt, den Hauptwert zu berechnen, da die Konvergenz des Integrals gesichert ist.*)

Wir formulieren nun einige Folgerungen aus den Sätzen 3.1, 3.2 und 3.3.

Folgerung 3.5 (Morea). *Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für alle Dreieckskurven $\partial\Delta \subset G$, so ist f holomorph in G.*

Folgerung 3.6. *Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in $G \setminus \{z_0\}$ und stetig auf G. Dann ist f auf ganz G holomorph.*

Bemerkung 3.7. *Die Aussage von Folgerung 3.6 kann auf endlich viele Ausnahmepunkte $\{z_0, \dots, z_n\}$ ausgedehnt werden.*

Folgerung 3.8 (Riemannscher Hebbarkeitssatz). *Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$ und in einer gewissen Umgebung $U_r(z_0) \subset G$ beschränkt. Dann existiert eine holomorphe Funktion $\widetilde{f}$ auf G mit $\widetilde{f}(z) = f(z)\ \ \forall\, z \in G \setminus \{z_0\}$.*

Folgerung 3.9 (Potenzreihenentwicklung). *Sind $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $U_R(z_0)$ die größte Kreisscheibe mit $U_R(z_0) \subset G$, dann lässt sich $f(z)$ in $U_R(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickeln, d.h.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in U_R(z_0)\,.$$

Dabei gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,,$$

für alle $r \in (0, R)$.

Definition 3.10. *Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt $z_0 \in G$* **Nullstelle** *von f der* **Ordnung** *$k \geq 1$, wenn*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

gilt.

Folgerung 3.11. *Der Punkt $z_0 \in G$ ist genau dann Nullstelle der holomorphen Funktion f der Ordnung k, wenn*

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \quad z \in U_\varepsilon(z_0)\,,$$

mit einem gewissen $\varepsilon > 0$ und $a_k \neq 0$ gilt, d.h., wenn $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ mit der holomorphen Funktion $g : U_\varepsilon(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist, wobei $g(z_0) \neq 0$ gilt.

Folgerung 3.12 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen). *Es sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) $f(z) = 0\ \forall\, z \in G$.

(b) *f hat in G eine Nullstelle der Ordnung ∞.*

(c) *Es existiert eine Menge $M \subset G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G besitzt und für die $f(z) = 0\ \forall\, z \in M$ gilt.*

Folgerung 3.13. *Sei $f : \partial U_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Wir definieren für $z \in \mathbb{C} \setminus \partial U_R(z_0)$*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \,.$$

Dann gilt

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi \,, \quad z \in U_R(z_0)\,, \; n = 1, 2, \ldots \,,$$

und somit

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \quad z \in U_R(z_0)\,,$$

wobei

$$a_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \,.$$

Für $|z - z_0| > R$ und $w = \dfrac{1}{z - z_0} \in U_{\frac{1}{R}}(0)$ gilt

$$h(w) := g\left(z_0 + \frac{1}{w}\right) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - \frac{1}{w}} \, d\zeta \,.$$

Mit

$$\xi = \frac{1}{\zeta - z_0} \quad \text{und} \quad d\xi = -\frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} = -\xi^2 \, d\zeta$$

erhalten wir

$$h(w) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_{\frac{1}{R}}(0)} \frac{f(z_0 + \xi^{-1})}{\xi^{-1} - w^{-1}} \frac{d\xi}{\xi^2} = -\frac{w}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_{\frac{1}{R}}(0)} \frac{\xi^{-1} f(z_0 + \xi^{-1})}{\xi - w} \, d\xi \,,$$

also

$$-\frac{1}{w} h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{b}_n w^n \,, \quad w \in U_{\frac{1}{R}}(0)\,,$$

mit

$$\widetilde{b}_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_{\frac{1}{R}}(0)} \frac{\xi^{-1} f(z_0 + \xi^{-1})}{\xi^{n+1}} \, d\xi \,.$$

Somit ist

$$g(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{b}_n (z - z_0)^{-n-1} = \sum_{n=-1}^{-\infty} b_n (z - z_0)^n \,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus U_R(z_0)\,,$$

wobei

$$b_n = -\widetilde{b}_{-n-1} = \ldots = -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \,.$$

3.2 Holomorphe Funktionen in Kreisringen. Laurent-Reihen

Beispiel 3.14. *Wir betrachten die Funktion* $f(z) = \dfrac{1}{z(z-\mathbf{i})^2}$ *und suchen nach Potenzreihenentwicklungen dieser Funktion für verschiedene Gebiete* $G \subset \mathbb{C}$. *Als Hilfsmittel verwenden wir die geometrische Reihe*

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,, \quad |z| < 1\,. \tag{3.1}$$

1. $G = (z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1)$ (*punktierte Umgebung von* 0)*: Aus (3.1) folgt*

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\,, \quad |z| < 1\,, \tag{3.2}$$

und somit

$$f(z) = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\mathbf{i}}\right)^2} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{\mathbf{i}}\right)^n = -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{\mathbf{i}^{n-1}}\,z^n\,.$$

2. $G = (z \in \mathbb{C} : |z| > 1)$ (*Umgebung des unendlich fernen Punktes*)*: Unter Verwendung von (3.2) erhalten wir*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\mathbf{i}}{z}\right)^2} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{\mathbf{i}}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathbf{i}^n z^{-n-3} \\ &= \sum_{m=-3}^{-\infty}(-m-2)\mathbf{i}^{-m-3}z^m = \sum_{m=-3}^{-\infty}(m+2)\mathbf{i}^{-m-1}z^m\,. \end{aligned}$$

3. $G = (z \in \mathbb{C} : 0 < |z-\mathbf{i}| < 1)$ (*punktierte Umgebung von* $\mathbf{i}$)*: Wiederum aus (3.1) folgt*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-\mathbf{i}}{(z-\mathbf{i})^2} + \frac{1}{z-\mathbf{i}} - \frac{1}{z} = \frac{-\mathbf{i}}{(z-\mathbf{i})^2} + \frac{1}{z-\mathbf{i}} + \frac{\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}(z-\mathbf{i})} \\ &= \frac{-\mathbf{i}}{(z-\mathbf{i})^2} + \frac{1}{z-\mathbf{i}} + \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{i}^{n+1}(z-\mathbf{i})^n\,. \end{aligned}$$

Seien $0 \le r < R$, $a \in \mathbb{C}$ und $K_a(r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$.

Satz 3.15 (Laurentreihenentwicklung)**.** *Es sei* $f(z)$ *im Kreisring* $K_a(r,R)$ *holomorph. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-a)^n =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n\,, \quad z \in K_a(r,R)\,,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

für ein beliebiges $\rho \in (r,R)$.

3.3 Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel das Integral

$$I_K := \oint_K \frac{dz}{1+z^2}\,,$$

wobei K positiv orientiert und durch folgende Gleichungen gegeben ist:

(a) $|z-\mathbf{i}| = 1\,,$ (b) $|z+\mathbf{i}| = 1\,,$ (c) $|z| = 2\,.$

2. Berechnen Sie das Integral

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_C \frac{ze^z}{(z-a)^3}\,dz,$$

wenn C ein positiv orientierter, geschlossener Jordan-Integrationsweg ist, der $a \in \mathbb{C}$ umschließt.

3. Berechnen Sie unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel

(a) $\displaystyle\oint_{C_1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}\,,$ (b) $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{\sin z}{z+\mathbf{i}}\,dz\,,$ (c) **(HA)** $\displaystyle\oint_{C_3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}\,,$

(d) $\displaystyle\oint_{C_4} \frac{e^{1-z}dz}{z^3(1-z)}\,,$ (e) $\displaystyle\oint_{C_5} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz\,,$ (f) $\displaystyle\oint_{C_6} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}\,,\ n,m = 1,2,\dots\,,$

(g) **(HA)** $\displaystyle\oint_{C_7} \frac{\cos z}{(z+\pi)^n}\,dz\,,$

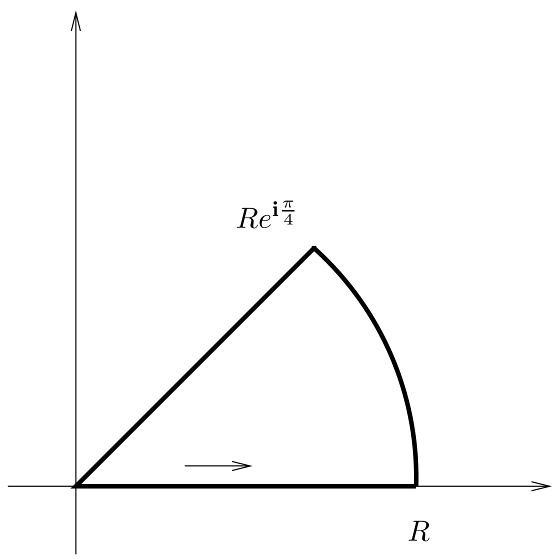
wobei die geschlossenen (positiv orientierten) Kurven C_i gegeben sind durch

(a) $|z+1| = 1\,,$ (b) $|z| = 2\,,$ (c) $|z+2\mathbf{i}| = 3\,,$ (d) $|z| = \frac{1}{2}\,,$ (e) $|z-1| = 1\,,$

(f) $|z| = r$, wobei $|a| < r < |b|\,,$ (g) $|z+2| = 2\,.$

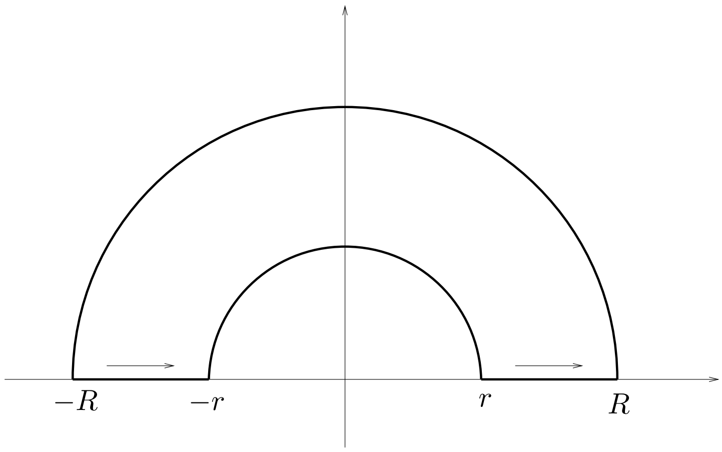
4. Berechnen Sie folgende Integrale mittels Integration der angegeben Funktion $f(z)$ entlang der (in den Abbildungen) gezeigten Kurven und durch Grenzübergang:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2\,dx\,,\ \int_0^\infty \sin x^2\,dx\,,\ f(z) = e^{\mathbf{i}z^2}$



Grenzübergang $R \longrightarrow +\infty$

(b) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,,\ f(z) = \frac{e^{\mathbf{i}z}}{z}$



Grenzübergang $R \longrightarrow +\infty\,,\ r \longrightarrow +0$

5. Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

   (a) $0 < |z| < 1\,,$ (b) $0 < |z-1| < 1\,,$ (c) **(HA)** $1 < |z| < \infty\,,$
   (d) $1 < |z-2| < 2\,,$ (e) **(HA)** $|z-2| < 1\,.$

6. Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

   (a) $1 < |z| < 2\,,$ (b) $2 < |z| < \infty\,,$ (c) $0 < |z-2| < 1\,,$ (d) **(HA)** $0 < |z-1| < 1\,.$

7. **(HA)** Man bestimme die Laurentreihe der Funktion $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-\mathbf{i}-1)}$ im Kreisring $\left\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \sqrt{2}\right\}\,.$

Kapitel 4

Das Residuenkalkül

4.1 Isolierte Singularitäten

Definition 4.1. *Man nennt* z_0 *eine* **isolierte Singularität** *der Funktion* $f(z)$, *wenn* $f(z)$ *auf einer punktierten Umgebung* $K_{z_0}(0,\varepsilon) = U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ *holomorph ist.*

1. *Den Punkt* z_0 *nennt man* **hebbare Singularität**, *wenn eine holomorphe Funktion* $\widetilde{f} : U_\varepsilon(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ *existiert, so dass* $\widetilde{f}(z) = f(z)$, $z \in K_{z_0}(0,\varepsilon)$, *erfüllt ist.*

2. *Der Punkt* z_0 *heißt* **Polstelle**, *wenn* $\lim\limits_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ *gilt.*

3. *Der Punkt* z_0 *heißt* **wesentliche Singularität**, *wenn sie weder hebbar noch Polstelle ist.*

Satz 4.2. *Es sei* z_0 *eine isolierte Singularität der Funktion* $f(z)$.

(a) *Die Singularität* z_0 *ist genau dann hebbar, wenn ein* $\delta > 0$ *existiert, so dass* $f(z)$ *auf* $K_{z_0}(0,\delta)$ *beschränkt ist.*

(b) *Der Punkt* z_0 *ist genau dann Polstelle, wenn eine natürliche Zahl* $n \geq 1$ *existiert, so dass*

$$M_1|z-z_0|^{-n} \leq |f(z)| \leq M_2|z-z_0|^{-n}\,, \quad z \in K_{z_0}(0,\delta)\,,$$

mit gewissen Konstanten $M_1, M_2, \delta > 0$ *gilt. Die Zahl* n *nennt man dann* **Ordnung** *der Polstelle* z_0.

(c) *Der Punkt* z_0 *ist genau dann wesentliche Singularität, wenn für jedes* $w_0 \in \mathbb{C}$ *eine Folge* $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ *existiert, so dass* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$ *gilt.*

Folgerung 4.3. *Sei* $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in U_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. *Die isolierte Singularität* z_0 *ist genau dann*

(a) *hebbar, wenn* $a_n = 0$, $n = -1, -2, \ldots$ *gilt,*

(b) *Polstelle, wenn ein* $k > 0$ *mit* $a_{-k} \neq 0$ *und* $a_n = 0$ *für* $n < -k$ *existiert,*

(c) *wesentlich, wenn* $a_n \neq 0$ *für unendlich viele negative* n *gilt.*

Man nennt

- $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n$ den **Hauptteil**

und

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ den **Nebenteil**

der Laurent-Reihe von $f(z)$ im Punkt z_0.

Beispiel 4.4. *Es gilt*

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n}\,,$$

d.h., $z_0 = 0$ ist hebbare Singularität der Funktion $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. Für

$$g(z) = \frac{1}{z(z-\mathbf{i})^2}$$

sind $z_0 = 0$ eine Polstelle 1. Ordnung und $z_1 = \mathbf{i}$ eine Polstelle 2. Ordnung. Die isolierte Singularität $z_0 = 0$ der Funktion

$$h(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

ist wesentliche Singularität.

Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann heißt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\,, \quad |z| > R\,,$$

Laurent-Reihe von $f(z)$ **im unendlich fernen Punkt**, wenn $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}\xi^n$ die Laurent-Reihe von $g(\xi) := f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ im Punkt $\xi_0 = 0$ ist. Der unendlich ferne Punkt heißt hebbare Singularität, Polstelle bzw. wesentliche Singularität von $f(z)$, wenn dies für $\xi_0 = 0$ und $g(\xi)$ der Fall ist. D.h., nach Folg. 4.3, P_∞ ist hebbare Singularität genau dann, wenn $a_n = 0$, $n > 0$, Polstelle genau dann, wenn $a_k \neq 0$ und $a_n = 0$, $n > k$ für ein $k > 0$, wesentliche Singularität genau dann, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele positive n gilt.

Beispiel 4.5. *Für die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ erhalten wir*

$$g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = -\frac{\xi}{1-\xi} = -\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\,, \quad |\xi| < 1\,,$$

d.h.

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\,, \quad |z| > 1\,,$$

und P_∞ ist Nullstelle 1. Ordnung von $f(z)$. Der unendlich ferne Punkt ist Polstelle n-ter Ordnung des Polynoms

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n\,,$$

wenn $a_n \neq 0$ ist. P_∞ ist wesentliche Singularität von e^z, $\sin z$ und $\cos z$.

4.2 Der Residuensatz

Sind $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit eventueller Ausnahme isolierter Singularitäten und $z \in G$, so nennt man die Zahl

$$\mathrm{res}_z f = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_\varepsilon(z)} f(\xi)\, d\xi$$

Residuum der Funktion f im Punkt z, wobei $\varepsilon > 0$ so zu wählen ist, dass in $\overline{U_\varepsilon(z)} \subset G$ keine weitere Singularität außer z liegt.

Satz 4.6 (Residuensatz)**.** *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und die Funktion $f : G \setminus N \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wobei N die Menge der isolierten Singularitäten von f bezeichne. Ist $\Gamma \subset G \setminus N$ ein geschlossener Jordan-Integrationsweg, so gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi\mathbf{i} \sum_{z \in N_\Gamma} \mathrm{res}_z f\,,$$

wobei die $N_\Gamma \subset N$ die Menge der isolierten Singularitäten von f bezeichnet, die innerhalb von Γ liegen.

Bemerkung 4.7. *Ist $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $0 < |z-a| < \varepsilon$, so gilt $\mathrm{res}_a f = a_{-1}$.*

Bemerkung 4.8. *Für die Gültigkeit des Residuensatzes genügt es, den einfachen Zusammenhang von G vorauszusetzen.*

Berechnung von Residuen im Fall einer Polstelle:

1. Es sei a Polstelle 1. Ordnung von $f(z)$. Dann gilt $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-a)^n$ und somit

$$\lim_{z\to a} (z-a) f(z) = \lim_{z\to a} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} (z-a)^n = a_{-1},$$

   d.h.

$$\mathrm{res}_a f = \lim_{z\to a} (z-a) f(z)\,.$$

2. Hat $f(z)$ in a eine Polstelle 1. Ordnung und ist $g(z)$ in a holomorph, so gilt

$$\mathrm{res}_a fg = \lim_{z\to a} (z-a) f(z) g(z) = (\mathrm{res}_a f)\, g(a).$$

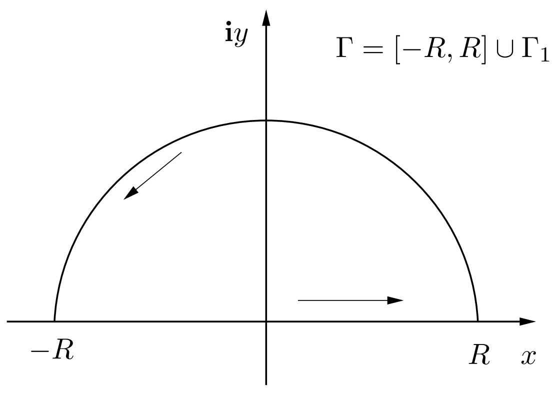
3. Es seien $f(z)$ in a holomorph und a eine Nullstelle 1. Ordnung von $f(z)$. Dann hat $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ in a eine Polstelle 1. Ordnung, und es folgt
$$\mathrm{res}_a g = \lim_{z\to a} \frac{z-a}{f(z)} = \lim_{z\to a} \frac{1}{\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}} = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

4. Es sei a Polstelle n-ter Ordnung von $f(z)$, $n = 1, 2, \ldots$ Dann sind
$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad \text{und} \quad g(z) := (z-a)^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}(z-a)^k\,.$$
Es folgt
$$\mathrm{res}_a f = a_{-1} = a_{(n-1)-n} = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,,$$
also
$$\mathrm{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z)\right]\Big|_{z=a}\,.$$

Beispiel 4.9. *Für*
$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$$
erhalten wir
$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{\mathbf{i}} f &= (z-\mathbf{i})f(z)\Big|_{z=\mathbf{i}} = \frac{1}{(z+\mathbf{i})(z-1)^2}\bigg|_{z=\mathbf{i}} = \frac{1}{2\mathbf{i}(\mathbf{i}-1)^2} = \frac{1}{-2\mathbf{i}2\mathbf{i}} = \frac{1}{4}\,,\\
\mathrm{res}_{-\mathbf{i}} f &= \frac{1}{(-\mathbf{i}-\mathbf{i})(-\mathbf{i}-1)^2} = \frac{1}{4}\,,\\
res_1 f &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z^2+1}\right]\bigg|_{z=1} = -\frac{2z}{(z^2+1)^2}\bigg|_{z=1} = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 4.10. *Es seien $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion, die keine reellen Polstellen hat, und der Grad des Nennerpolynoms $Q(z)$ um mindestens 2 größer als der Grad von $P(z)$. Somit existiert ein $R > 0$, so dass alle Polstellen von $f(z)$ in $U_R(0)$ liegen und $|f(z)| \le c|z|^{-2}$ für $|z| \ge R$ gilt. Aus dem Residuensatz folgt (vgl. Skizze)*
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi\mathbf{i} \sum_{z\in\mathbb{C},\, \mathsf{Im}\, z>0} \mathrm{res}_z f\,.$$

$$\Gamma = [-R, R] \cup \Gamma_1\,,\ \Gamma_1 = \left\{Re^{\mathbf{i}t} : 0 \le t \le \pi\right\}$$



Dabei gilt

$$\left|\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi f(Re^{\mathbf{i}t})R\mathbf{i}e^{\mathbf{i}t}\,dt\right| \le R\int_0^\pi |f(Re^{\mathbf{i}t})|\,dt \le \frac{c\pi}{R} \longrightarrow 0\,, \quad R \longrightarrow \infty\,,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathbf{i} \sum_{z\in\mathbb{C},\,\mathsf{Im}\,z>0} \mathrm{res}_z f\,.$$

Beispiel 4.11. *Wir berechnen*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}\,.$$

Es gilt $1+z^4 = (z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$ *mit*

$$z_0 = e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\,,\ z_1 = \mathbf{i}e^{i\frac{\pi}{4}}\,,\ z_2 = -e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\,,\ z_3 = -\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

und $e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\mathbf{i}+1}{\sqrt{2}}$. *Es folgt* $z_2+z_3 = -\sqrt{2}\,\mathbf{i}$ *und somit*

$$1+z^4 = (z-z_0)(z-z_1)(z^2-(z_2+z_3)z+z_2z_3) = (z-z_0)(z-z_1)(z^2+\sqrt{2}\mathbf{i}z-1)\,.$$

Wir wählen $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ *und berechnen*

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{z_0} f &= \left.\frac{z^2}{(z-z_1)(z^2+\sqrt{2}\mathbf{i}z-1)}\right|_{z=z_0} = \frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0^2+\sqrt{2}\mathbf{i}z_0-1)} = \frac{\mathbf{i}}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}-1)}\,,\\
\mathrm{res}_{z_1} f &= -\frac{\mathbf{i}}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}+1)}\,,
\end{aligned}$$

so dass nach Bsp. 4.10

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = 2\pi\mathbf{i}\left(\frac{\mathbf{i}}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}-1)} - \frac{\mathbf{i}}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}+1)}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ist.

Beispiel 4.12 (Das Argumentprinzip)**.** *Es sei* z_0 *eine Nullstelle der Ordnung* m_0 *der in* z_0 *holomorphen Funktion* $f(z)$. *Es folgt* $f(z) = (z-z_0)^{m_0}h(z)$, $h(z_0) \ne 0$ *und*

$$f'(z) = m_0(z-z_0)^{m_0-1}h(z) + (z-z_0)^{m_0}h'(z) = (z-z_0)^{m_0-1}g(z)$$

mit $g(z) = m_0h(z) + (z-z_0)h'(z)$. *Damit ist*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\widetilde{g}(z)}{z-z_0}$$

mit $\widetilde{g}(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ *und* $\widetilde{g}(z_0) = m_0$. *Wir erhalten*

$$\mathrm{res}_{z_0}\frac{f'}{f} = \widetilde{g}(z_0) = m_0\,.$$

Ist z_0 eine (isolierte) Polstelle der Ordnung m_0, so folgt analog

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'}{f} = -m_0 \,.$$

Somit ergibt sich aus dem Residuensatz: Ist die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ bis auf isolierte Polstellen auf dem konvexen Gebiet G holomorph und liegen auf dem geschlossenen Jordan-Integrationsweg $\Gamma \subset G$ keine Nullstellen und keine Pole von $f(z)$, so ist

$$\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

gleich der Differenz aus der Zahl der Nullstellen und der Zahl der Polstellen der Funktion $f(z)$ (mit ihrer Ordnung gezählt), die innerhalb von Γ liegen.

Satz 4.13 (Satz von Liouville). *Eine ganze und beschränkte Funktion ist konstant.*

Satz 4.14 (Partialbruchzerlegung). *Die Funktion $f : \mathbb{C} \cup \{P_\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$ sei holomorph mit eventueller Ausnahme von isolierten Polstellen. Dann ist $f(z)$ eine rationale Funktion.*

Satz 4.15 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom*

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \,, \quad a_k \in \mathbb{C} \,,$$

besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Wir stellen uns noch die Frage:

Was ist das **Residuum im unendlich fernen Punkt?**

Sind $f : \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $|z| > R$, die Entwicklung von f im unendlich fernen Punkt, d.h.

$$f(z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n \,, \quad 0 < |z| < R^{-1} \,,$$

so ist für ein beliebiges $R_1 > R$

$$\operatorname{res}_{P_\infty} f = -\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\partial U_{R_1}(0)} f(z)\, dz = -a_{-1} \,.$$

Folgerung 4.16. *Hat $f : \mathbb{C} \cup \{P_\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}$ höchstens endlich viele Singularitäten, so gilt*

$$\sum_{z \in \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}} \operatorname{res}_z f = 0 \,.$$

4.3 Übungsaufgaben

1. Man entwickle folgende Funktionen an den im Endlichen liegenden Singularitäten und im Punkt P_∞ in eine Laurentreihe und gebe das Konvergenzgebiet an:

   (a) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$, (b) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$,

   (c) **(HA)** $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$, (d) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

2. Man charakterisiere die Art der Singularität und bestimme das Residuum von $f(z)$ an der Stelle z_0 :

   (a) $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = 1$, (b) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$, $z_0 = 0$,

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{1+z-e^z}$, $z_0 = 0$, (d) $f(z) = \cot z$, $z_0 = 0$,

   (e) **(HA)** $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 7}{z-2}$, $z_0 = 2$.

3. Berechnen Sie möglichst effektiv die Residuen von $f(z)$ an den angegebenen Stellen

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z-5)^2}$, $z_1 = -3$, $z_2 = 5$, $z_3 = P_\infty$,

   (b) $f(z) = (\sin z - \cos z)^{-1}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$,

   (c) $f(z) = \cot z$, $z_0 = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$,

   (d) **(HA)** $f(z) = \dfrac{c}{(z-z_0)^n (z-z_1)}$, $c \neq 0$, z_0, z_1, wobei $z_0 \neq z_1$.

4. Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

   (a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\, dz$, (b) **(HA)** $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathbf{i} \cot z}{z(z-1)}\, dz$, (c) $\displaystyle\int_{|1+\mathbf{i}-z|=2} \frac{dz}{1+z^2}$.

5. Berechnen Sie folgende uneigentliche (reelle) Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$,

   (c) **(HA)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\, dx$, (d) **(HA)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,

   (e) **(HA)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2+1}\, dx$, $\alpha > 0$ Hinweis: Betrachten Sie $f(z) = \dfrac{z e^{\mathbf{i}\alpha z}}{z^2+1}$,

   (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n - 1}{x^{n+2} - 1}\, dx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

   (g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$, (h) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Kapitel 5

Harmonische Funktionen

5.1 Das Maximumprinzip für harmonische Funktionen

$G \subset \mathbb{C}$ sei wiederum ein Gebiet.

Definition 5.1. *Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ (x,y) \mapsto f(x,y)\,,$ *die der Laplace-Gleichung*

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

auf G *genügt, heißt* **harmonisch** *auf* G.

Folgerung 5.2. *Sei* $f = u + \mathbf{i}v : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph. Dann gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,, \tag{5.1}$$

so dass

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

und somit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

gilt, d.h. u *ist auf* G *harmonisch. Das gleiche gilt für* v. *Holomorphe Funktionen sind somit ebenso wie ihre Real- und Imaginärteile harmonische Funktionen.*

Folgerung 5.3. *Es sei* $u(x,y)\,,\ (x,y) \in G\,,$ *eine reellwertige harmonische Funktion. Wir suchen eine zu* $u(x,y)$ **konjungiert harmonische** *Funktion* $v(x,y)\,,$ *d.h. eine reellwertige Funktion* $v(x,y)\,,\ (x,y) \in G\,,$ *so dass* $f = u + \mathbf{i}v$ *auf* G *holomorph ist. Wir setzen voraus, dass* G *ein Rechteck ist und wählen ein* $z_0 = (x_0, y_0) \in G$. *Die Funktion* $f(z)\,,\ z = x + \mathbf{i}y\,,$ *muss den Bedingungen (5.1) genügen, so dass wir vorerst*

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u(\xi, y)}{\partial y}\, d\xi + \phi(y)$$

mit einer noch unbekannten reellwertigen Funktion $\phi(y)$ *setzen. Dann erfüllt* $v(x,y)$ *die zweite der Bedingungen in (5.1). Zur Bestimmung von* $\phi(y)$ *verwenden wir die erste Bedingung und*

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 u(\xi, y)}{\partial y^2}\, d\xi + \phi'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 u(\xi, y)}{\partial x^2}\, d\xi + \phi'(y)\,.$$

Es folgt

$$\phi'(y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 u(\xi,y)}{\partial x^2}\, d\xi = \frac{\partial u(x_0,y)}{\partial x}$$

und

$$\phi(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x_0,\eta)}{\partial x}\, d\eta + \text{const},$$

also

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x_0,\eta)}{\partial x}\, d\eta - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u(\xi,y)}{\partial y}\, d\xi + \text{const}\,. \tag{5.2}$$

Es existiert also zu jeder gegebenen harmonischen Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ eine bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte konjungiert harmonische Funktion $v : G \to \mathbb{R}$. Dabei kann man beliebige einfach zusammenhängende Gebiete betrachten. (Hinweis: vgl. (5.2), Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen, $u_y(x,y)\,dx - u_x(x,y)\,dy$ ist wegen $\Delta u = 0$ ein vollständiges Differential)

Satz 5.4 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen)**.**

(a) *Besitzt die harmonische Funktion $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $z_0 = (x_0, y_0) \in G$ ein lokales Extremum, so ist u konstant auf G.*

(b) *Sind $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und $u : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt die Funktion $u(x,y)$ ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand ∂G von G an.*

5.2 Die Poissonsche Integralformel

Sei $f : U_{R+\varepsilon}(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph für ein gewisses $\varepsilon > 0$. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt dann für alle $z \in U_R(0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\partial U_R(0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi) R e^{\mathbf{i}t}}{R e^{\mathbf{i}t} - z}\, dt\,,$$

d.h.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi) R^2}{R^2 - \overline{\xi} z}\, dt\,. \tag{5.3}$$

Hierbei, wie auch im weiteren, ist $\xi = R e^{\mathbf{i}t}$. Für ein festes $z \in U_R(0)$ ist die Funktion

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{R^2 - \zeta \overline{z}}$$

holomorph in einer Umgebung von $U_R(0)$. Damit können wir (5.3) auf $g(\zeta)$ anwenden und erhalten

$$\frac{f(z)}{R^2 - |z|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi) R^2}{|R^2 - \overline{\xi} z|^2}\, dt\,.$$

Hieraus folgt wegen $|R^2 - \overline{\xi} z| = |\overline{\xi}(\xi - z)| = R|\xi - z|$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2}\, dt\,. \tag{5.4}$$

Die Funktion

$$P_R(\xi, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2}$$

nennt man **Poissonkern** für den Kreis $U_R(0)$. In Polarkoordinaten $\xi = Re^{\mathbf{i}t}$, $z = re^{\mathbf{i}\vartheta}$ hat er die Gestalt

$$\frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\vartheta) + r^2}\,.$$

Folgerung 5.5. *Es gilt*

$$\int_0^{2\pi} P_R(\xi, z)\,dt = 1 \quad \forall\, z \in U_R(0)\,.$$

Die Voraussetzungen für die Integraldarstellung (5.4) lassen sich abschwächen, nämlich wie folgt.

Satz 5.6 (Poissonsche Integralformel für den Kreis)**.**

(a) *Ist $u : \overline{U_R(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $U_R(0)$ harmonisch, so gilt für alle $z \in U_R(0)$*

$$u(z) = \int_0^{2\pi} u(\xi) P_R(\xi, z)\,dt\,,$$

wobei $\xi = Re^{\mathbf{i}t}$ zu setzen ist.

(b) *Ist $g : \partial U_R(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $u : U_R(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$u(z) = \int_0^{2\pi} g(\xi) P_R(\xi, z)\,dt\,, \quad z \in U_R(0)\,,$$

harmonisch.

5.3 Das Dirichlet-Problem für harmonische Funktionen

Wir betrachten das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad G, \quad u = h \quad \text{auf} \quad \partial G\,. \tag{5.5}$$

Dabei ist $h : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion. Gesucht ist eine stetige Funktion $u : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$, die in G harmonisch ist. Aus dem Maximumprinzip (Satz 5.4) folgt, dass das Problem (5.5) höchstens eine Lösung hat.

Satz 5.7. *Für den Fall $G = U_R(0)$ ist*

$$u(z) = \int_0^{2\pi} h(Re^{\mathbf{i}t}) P_R(Re^{\mathbf{i}t}, z)\,dt\,, \quad z \in G\,,$$

die Lösung von (5.5).

Definition 5.8. *Eine Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ hat die* **Mittelwerteigenschaft***, wenn f stetig ist und wenn für alle $z_0 \in G$ eine Umgebung $\overline{U_R(z_0)} \subset G$ existiert, so dass*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathbf{i}t})\,dt \quad \forall\, r \in (0, R]$$

gilt.

Satz 5.9. *Eine auf G stetige Funktion ist genau dann harmonisch, wenn sie die Mittelwerteigenschaft hat.*

Kapitel 6

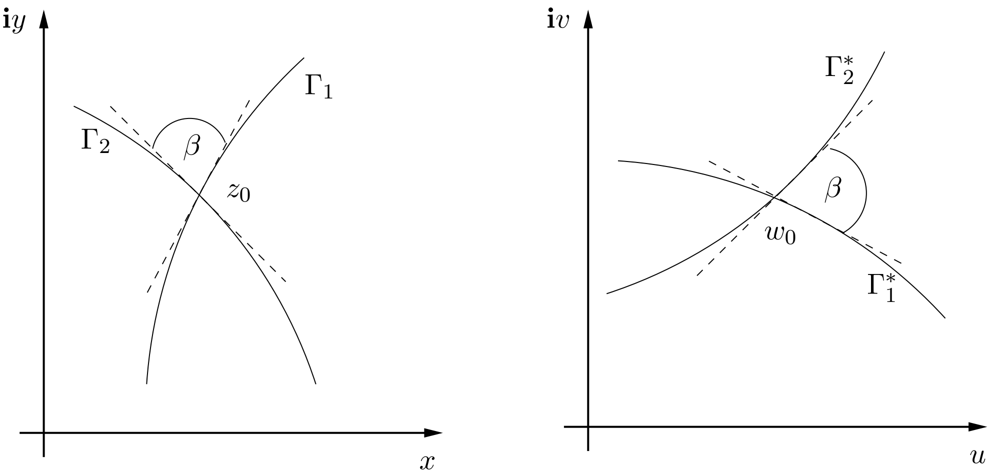
Konforme Abbildungen

6.1 Begriff der konformen Abbildung

Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ die Parameterdarstellung eines Jordan-Integrationsweges Γ, wobei

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in [\alpha, \beta]\,.$$

Dann gibt $\gamma'(t_0)$ die Richtung der Tangente an Γ im Punkt $z_0 = \gamma(t_0)$ an. Sei $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Sind $f(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph und $\Gamma^* = f(\Gamma)$ sowie $f'(z_0) \neq 0$, so gilt $f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{\mathbf{i}\varphi_0}$, $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$, und die Tangente an Γ^* im Punkt $w_0 = f(z_0)$ ist gegenüber der Tangente an Γ im Punkt z_0 um den Winkel φ_0 gedreht. Für zwei sich in z_0 schneidende Kurven Γ_1 und Γ_2 bedeutet das, dass der Winkel zwischen den Kurven bei der Abbildung f erhalten bleibt. Solche Abbildungen nennt man **winkeltreu**. Eine in z_0 holomorphe Funktion f mit $f'(z_0) \neq 0$ ist also in z_0 winkeltreu. Die Funktion $f(z) = z^2$ ist im Punkt $z_0 = 0$ nicht winkeltreu.



Definition 6.1. *Eine Abbildung f heißt* (**lokal**) **konform** *in z_0, falls f in z_0 holomorph mit $f'(z_0) \neq 0$ ist. Ist $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ in jedem Punkt z_0 konform, so heißt sie* **konform** *im Gebiet G.*

Satz 6.2 (Riemannscher Abbildungssatz)**.** *Seien G und G^* einfach zusammenhängende echte Teilgebiete von $\mathbb{C}$. Dann gibt es eine konforme Abbildung $f : G \longrightarrow G^*$, die außerdem bijektiv ist.*

Bemerkung 6.3. *Aus dem Satz von Liouville folgt, dass es keine konforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ geben kann.*

Bemerkung 6.4. *Ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet kann nicht eineindeutig und konform auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet abgebildet werden. Das folgt schon aus Stetigkeitsbetrachtungen.*

Satz 6.5 (Satz über die Ränderzuordnung)**.** *Die Ränder ∂G und ∂G^* seien geschlossene Jordan-Integrationswege, und $f : G \to G^*$ sei konform und bijektiv. Dann ist $f : \overline{G} \to \overline{G^*}$ bijektiv und stetig.* (*Man kann diesen Satz auch auf Gebiete ausdehnen, deren Ränder den unendlich fernen Punkt enthalten.*)

6.2 Gebrochen lineare Abbildungen

Für gegebene komplexe Zahlen a, b, c, d definieren wir $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ durch

$$w = f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}\,. \tag{6.1}$$

So beschreibt z.B. die Abbildung $f(z) = \dfrac{1}{z} = \overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)}$ die Spiegelung am Einheitskreis mit anschließender Spiegelung an der reellen Achse. Die Spiegelung an einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist folgendermaßen definiert: Der Bildpunkt eines Punktes $P \neq M$ ist der Punkt Q, der auf dem Strahl von M durch P liegt und für den $|MP| \cdot |MQ| = r^2$ gilt. Wir betrachten jetzt die allgemeine Abbildung (6.1):

1. Fall: $c = 0,\ d \neq 0$. In diesem Fall ist $f(z) = \dfrac{a}{d}\,z + \dfrac{b}{d}$ ein lineares Polynom, falls $a \neq 0$ ist.
2. Fall: $c \neq 0$. Jetzt ist

   $$f(z) = \frac{1}{c\,z + d}\left[\frac{a}{c}(c\,z + d) + b - \frac{a\,d}{c}\right] = \frac{b\,c - a\,d}{c}\,\frac{1}{c\,z + d} + \frac{a}{c}\,.$$

   Also ist $f(z)$ genau dann nicht konstant, wenn $a\,d - b\,c \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist $f(z)$ die Nacheinanderausführung der Abbildungen

   $$z \mapsto z_1 = c\,z + d \mapsto z_2 = \frac{1}{z_1} \mapsto w = \frac{b\,c - a\,d}{c}\,z_2 + \frac{a}{c} \tag{6.2}$$

   und heißt **Möbius-Transformation**.

Satz 6.6. *Für $c \neq 0$ und $a\,d - b\,c \neq 0$ ist mit den Vereinbarungen*

$$f(P_\infty) = \frac{a}{c} \quad \textit{und} \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) = P_\infty$$

die durch (6.1) definierte Abbildung $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$z = f^{-1}(w) = \frac{b - d\,w}{c\,w - a}\,.$$

Wir berechnen unter den Voraussetzungen von Satz 6.6 die erste Ableitung

$$f'(z) = \frac{a\,d - b\,c}{(c\,z + d)^2} \neq 0\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

und erhalten folgenden Satz.

Satz 6.7. *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.6 ist die gebrochen lineare Abbildung (6.1) eine konforme und bijektive Abbildung von $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ auf die Menge $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.*

Jeden Kreis in der komplexen Ebene kann man in der Form (vgl. Übungsaufgabe 1 im Abschnitt 1.5)

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : \alpha\, z\, \overline{z} + \beta\, z + \overline{\beta}\, \overline{z} + \gamma = 0 \right\} \tag{6.3}$$

mit $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ und $\alpha\,\gamma < |\beta|^2$ schreiben, wobei wir es im Fall $\alpha = 0$ mit einer Geraden (ein Kreis durch den unendlich fernen Punkt) zu tun haben.

Satz 6.8. *Jede gebrochen lineare Abbildung (6.1) mit $a\,d - b\,c \neq 0$ bildet Kreise auf Kreise ab, wobei wir Geraden als Kreise durch P_∞ auffassen.*

Satz 6.9. *Seien $a\,d - b\,c \neq 0$, K ein Kreis sowie z_1 und z_2 Spiegelpunkte bezüglich K. Dann sind $w_1 = f(z_1)$ und $w_2 = f(z_2)$ Spiegelpunkte bezüglich $f(K)$.*

Beispiel 6.10. *Wir suchen alle gebrochen linearen Abbildungen der Gestalt (6.1), die die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}\, z > 0\}$ auf den Einheitskreis $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ und einen gegebenen Punkt z_0 mit $\mathsf{Im}\, z_0 > 0$ auf $w_0 = 0$ abbilden. Aus Satz 6.5 folgt $|f(P_\infty)| = 1$ und somit $a \neq 0$. Wir wählen $a = 1$. Es folgt*

$$w = f(z) = \frac{z + b}{c\,z + d}$$

und

$$0 = f(z_0) = \frac{z_0 + b}{c\,z_0 + d}\,, \quad \text{d.h.} \quad b = -z_0\,.$$

Nach Satz 6.9 ist $f(\overline{z_0}) = P_\infty$ und somit

$$f(z) = \frac{1}{c}\,\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}\,.$$

Damit die reelle Achse auf die Einheitskreislinie abgebildet wird, bleibt nur noch $|f(0)| = 1$ zu fordern, d.h. $|c| = 1$. Wir erhalten

$$f(z) = e^{\mathbf{i}\varphi}\,\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}\,,$$

wobei $\varphi \in [0, 2\pi)$ beliebig gewählt werden kann.

Beispiel 6.11. *Wir suchen alle gebrochen linearen Abbildungen (6.1), die den Einheitskreis auf den Einheitskreis abbilden und einen gegebenen Punkt z_0 mit $|z_0| < 1$ auf $w_0 = 0$. Wir erhalten wieder*

$$f(z) = \frac{z - z_0}{c\,z + d}\,.$$

Aus $f\left(\dfrac{1}{\overline{z_0}}\right) = P_\infty$ folgt

$$f(z) = \frac{1}{d^*}\,\frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z_0}}\,,$$

und die Bedingung $|f(1)| = 1$ liefert $|d^*| = 1$, also

$$f(z) = e^{\mathbf{i}\varphi} \frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z_0}},$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$ beliebig. Man beachte, dass dieses Ergebnis auch für $z_0 = 0$ gilt!

6.3 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen (d.h. die gebrochen linearen Abbildungen $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$) bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.

2. In welche Figuren gehen folgende Mengen bei der Abbildung $f(z) = (\overline{z})^{-1}$ (Spiegelung am Einheitskreis) über?

   (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $\quad r > 0$,

   (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$,

   (c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z = 1\}$,

   (d) eine beliebige Gerade durch $z_0 \neq 0$.

3. Man bestimme das Bild

   (a) des Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bei der Abbildung $w = \dfrac{z}{1-z}$,

   (b) der rechten Halbebene bei der Abbildung $w = \dfrac{1-z}{1+z}$,

   (c) des ersten Quadranten bei der Abbildung $w = \dfrac{\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$.

4. Geben Sie die allgemeine Form einer gebrochen linearen Abbildung an, die den Einheitskreis auf die untere Halbebene abbildet.

5. Für die Abbildung $w = \dfrac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}}$ bestimme man das Bild der reellen Achse, der imaginären Achse und des Einheitskreises sowie alle Fixpunkte.

6. Man bestimme eine gebrochen lineare Abbildung $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, die

   (a) die Punkte $-1, \mathbf{i}, 1 + \mathbf{i}$ in die Punkte $0, 2\mathbf{i}, 1 - \mathbf{i}$,

   (b) die Punkte $-1, P_\infty, \mathbf{i}$ in die Punkte $P_\infty, \mathbf{i}, 1$

   überführt.

7. Man zeige, dass die Hyperbeln $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y = C_1\right\}$ und $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = C_2\right\}$ für beliebige Konstanten $C_1, C_2 > 0$ senkrecht aufeinander stehen.

6.4 Die Joukowski-Funktion

Wir definieren

$$w = J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{6.4}$$

Wir vereinbaren $w = u + \mathbf{i}v$, $z = re^{\mathbf{i}\varphi}$, $u, v \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Es folgt

$$\begin{aligned} u + \mathbf{i}v &= \frac{1}{2}\left(r\,e^{\mathbf{i}\varphi} + \frac{1}{r}\,e^{-\mathbf{i}\varphi}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + \mathbf{i}\,\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - \mathbf{i}\,\sin\varphi)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \frac{\mathbf{i}}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \end{aligned}$$

Also ist (6.4) äquivalent zu

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{6.5}$$

Folgerung 6.12. *Die* **Joukowski-Funktion** J *hat folgende Eigenschaften:*

1. $J(\{r = 1\}) = \{\cos\varphi : 0 \leq \varphi < 2\pi\} = [-1, 1]$. *Dabei wird im Bild das offene Intervall* $(-1, 1)$ *zweimal durchlaufen.*

2. *Für* $r \neq 1$ *folgt aus (6.5)*

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1,$$

   d.h. die Bilder der Kreise $(|z| = r)$, $r > 0$, $r \neq 1$, *sind Ellipsen mit der Exzentrizität*

$$\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1,$$

   d.h. mit den Brennpunkten ± 1.

3. *Das Bild der positiven reellen Achse* $\left\{r\,e^{\mathbf{i}\varphi} : \varphi = 0, r > 0\right\}$ *ist*

$$\left\{u + \mathbf{i}v : u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), v = 0, r > 0\right\} = [1, \infty).$$

   Dabei wird $(1, \infty)$ *zweimal durchlaufen. Analog ist das Bild der negativen reellen Achse das Intervall* $(-\infty, -1]$. *Das Bild der positiven imaginären Achse* $\left\{r\,e^{\mathbf{i}\varphi} : \varphi = \frac{\pi}{2}, r > 0\right\}$ *ist*

$$\left\{u + \mathbf{i}v : u = 0, v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right), r > 0\right\} = \mathbf{i}\mathbb{R},$$

   was auch gleich dem Bild der negativen imaginären Achse ist.

4. Wir betrachten die Halbgeraden $G_{\pm\alpha} = \left\{ r\, e^{\pm \mathbf{i}\alpha} : r > 0 \right\}$ *für* $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$. *Aus (6.5) folgt dann*

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha \quad \textit{und} \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha$$

bzw.

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1\,. \tag{6.6}$$

Hieraus ergibt sich, dass das Bild von $G_{\pm\alpha}$ *der rechte Ast der Hyperbel (6.6) für* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *und der linke Ast der Hyperbel (6.6) für* $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ *ist (Brennpunkte* ± 1*).*

5. Es ist $J'(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right) \neq 0$ *für* $z \neq \pm 1$ *und* $z \neq 0$. *Also ist* $J(z)$ *außerhalb dieser Punkte winkeltreu, d.h. die Ellipsen und Hyperbeln aus 2. und 4. stehen senkrecht aufeinander.*

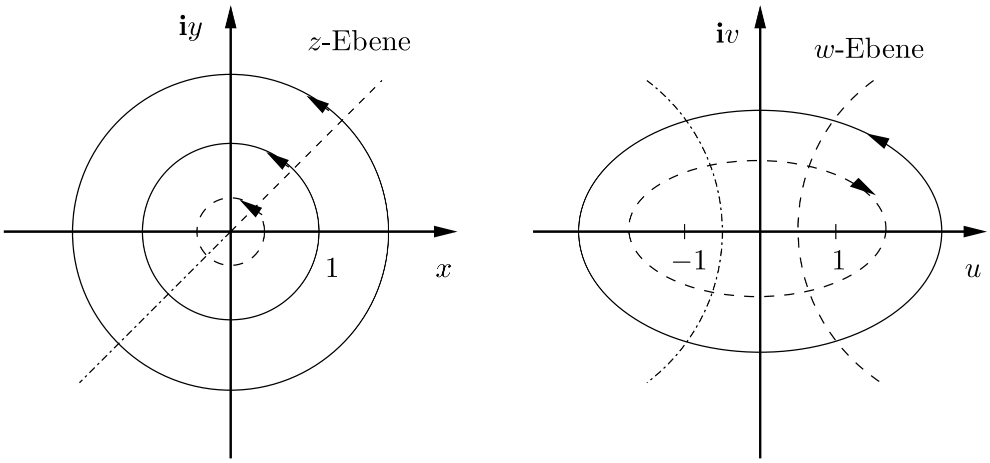
6. Wir sehen, dass sowohl

$$J : \{|z| < 1\} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$$

als auch

$$J : \{|z| > 1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$$

bijektiv und konform sind.



Zur Joukowski-Funktion

6.5 Ebene stationäre Strömungen

Wir betrachten eine ebene stationäre (d.h. zeitunabhängige) inkompressible und reibungsfreie Strömung in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Den Geschwindigkeitsvektor im Punkt $(x, y) \in G$ schreiben wir in der Form $v(x, y) = [v_1(x, y), v_2(x, y)]^T$ und nehmen an, dass $v : G \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist. Weiterhin sei die Strömung frei von Quellen und Wirbeln, d.h.

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad \text{in} \quad G \tag{6.7}$$

und

$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \text{in} \quad G\,. \tag{6.8}$$

Aus (6.8) folgt die Existenz eines Skalarfeldes $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $v = \operatorname{grad}\varphi$ und somit $v_1 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v_2 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$. Damit ist nach (6.7)

$$\Delta\varphi = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0\,.$$

D.h., $\varphi(x,y)$ ist in G harmonisch. Wir schreiben für $z = x + \mathbf{i}y$

$$v(x,y) = v(z) = v_1(x,y) + \mathbf{i}v_2(x,y)\,.$$

Es sei $\psi : G \to \mathbb{R}$ eine zu $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ konjugiert harmonische Funktion. Dann ist

$$f(z) = f(x+\mathbf{i}y) = \varphi(x,y) + \mathbf{i}\psi(x,y)$$

in G holomorph. Man nennt $f(z)$ das **komplexe Strömungspotential**, $\varphi(x,y)$ das **Potential** der Strömung und $\psi(x,y)$ die **Stromfunktion** des **Strömungsfeldes** $v(x,y)$. (Die Kurven $\{(x,y) \in G : \psi(x,y) = \text{konstant}\}$ sind Stromlinien!) Gibt es Punktquellen bzw. -wirbel, so ist $f(z)$ dort singulär. Ferner folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$v(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - \mathbf{i}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}. \tag{6.9}$$

Ist $\Gamma \subset G$ ein geschlossener Jordan-Integrationsweg, so sind der Fluss F_Γ durch Γ und die Zirkulation Z_Γ entlang Γ gegeben durch

$$F_\Gamma = \int_\Gamma v_1(x,y)\,dy - v_2(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad Z_\Gamma = \int_\Gamma v_1(x,y)\,dx + v_2(x,y)\,dy\,.$$

Dies kann in komplexer Form

$$Z_\Gamma + \mathbf{i}\,F_\Gamma = \int_\Gamma [v_1(x,y) - \mathbf{i}\,v_2(x,y)]\,[dx + \mathbf{i}dy] = \int_\Gamma \overline{v(z)}\,dz = \int_\Gamma f'(z)\,dz \tag{6.10}$$

geschrieben werden.

Beispiel 6.13. *Der (unendlich lange) Kreiszylinders* $(z \in \mathbb{C} : |z| < 1)$ *werde zirkulationsfrei umströmt. Es ist also* $G = \mathbb{R}^2 \backslash \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ *. Im Unendlichen sei die Strömungsgeschwindigkeit konstant gleich* $v_\infty > 0$ *. Nach (6.9) ist dann* $f'(z) : G \to \mathbb{C}$ *holomorph und beschränkt im unendlich fernen Punkt. Es folgt*

$$f'(z) = v_\infty + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots\,, \quad |z| > 1\,.$$

Es sei $R > 1$ *und* $\Gamma_R = \partial U_R(0)$ *. Wir erhalten unter Verwendung von (6.10)*

$$\int_{\Gamma_R} f'(z)\,dz = 2\pi\mathbf{i}a_{-1} = Z_{\Gamma_R} + \mathbf{i}F_{\Gamma_R} = \mathbf{i}F_{\Gamma_R}\,.$$

Für $R \longrightarrow 1$ *folgt wegen* $F_{\Gamma_1} = 0$, *daß* $a_{-1} = 0$ *und somit*

$$f(z) = v_\infty z + a_0 - \frac{a_{-2}}{z} - \frac{a_{-3}}{2z^2} - \ldots$$

Da Γ_1 Stromlinie sein soll, was äquivalent dazu ist, dass die Ableitung $\frac{\partial v}{\partial n}$ in Richtung der Normalen auf Γ_1 verschwindet, muss $\psi(x,y)$ auf Γ_1 konstant sein. Deshalb ist das Bild $f(\Gamma_1)$ eine zur u-Achse parallele Strecke Γ^*. Da wir wissen, dass die Joukowski-Funktion diese Eigenschaft hat, machen wir den Ansatz

$$f(z) = \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Wegen $f'(z) = \alpha(1 - z^{-2})$ folgt $\alpha = v_\infty$ und

$$\varphi(x,y) = v_\infty\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi\,, \quad \psi(x,y) = v_\infty\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\,.$$

Die Stromlinien $((x,y) \in \mathbb{R} : \psi(x,y) = \text{konstant} =: 2\beta\, v_\infty)$ erhält man also aus den Gleichungen

$$r - \frac{1}{r} = \frac{2\beta}{\sin\varphi}\,,$$

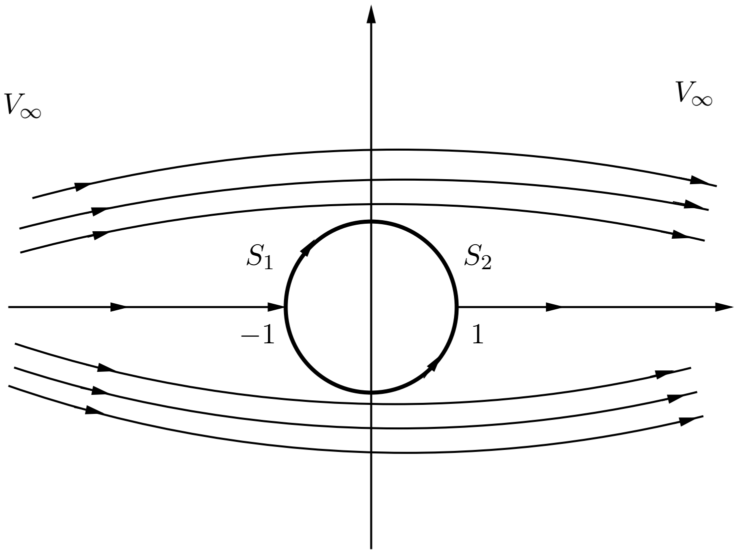
d.h.

$$r = \frac{\beta}{\sin\varphi} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\sin^2\varphi} + 1}\,,$$

falls $\beta \neq 0$, und als

$$\{|z| = 1\} \cup (\varphi = 0, r > 1) \cup \{\varphi = \pi, r > 1\}\,,$$

falls $\beta = 0$. Die **Staupunkte** *der Strömung, d.h. die Punkte z mit $v(z) = 0$, sind $z = \pm 1$ (vgl. (6.9)).*



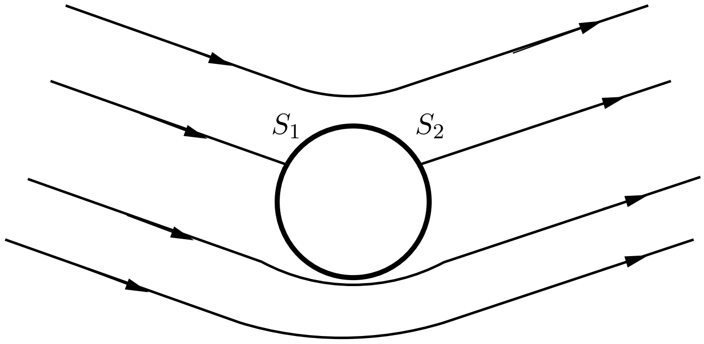
Zirkulationsfreie Umströmung eines Kreiszylinders

Beispiel 6.14. *Im Fall $Z_{\Gamma_1} \neq 0$ ist $a_{-1} = \dfrac{Z_{\Gamma_1}}{2\pi\mathbf{i}}$ und man erhält*

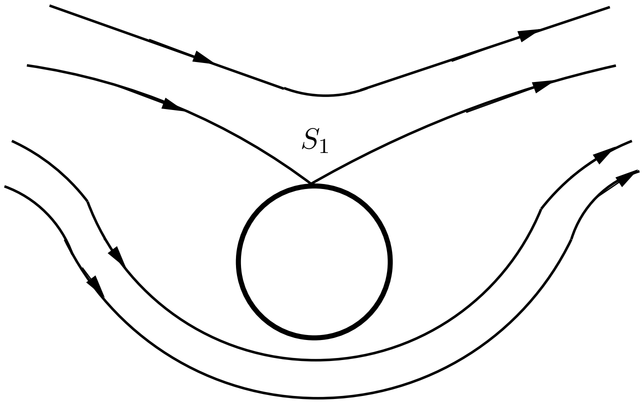
$$f'(z) = v_\infty\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) + \frac{Z_{\Gamma_1}}{2\pi\mathbf{i}z}\,.$$

In diesem Fall sind die Staupunkte der Strömung also gleich

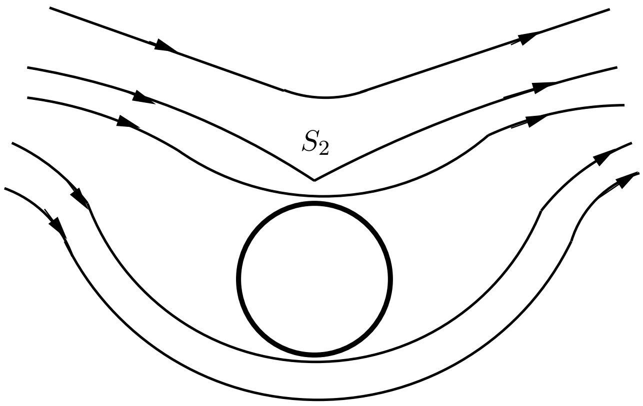
$$S_{1,2} = \frac{1}{4\pi\, v_\infty}\left(\mathbf{i}Z_{\Gamma_1} \pm \sqrt{16\pi^2 v_\infty^2 - Z_{\Gamma_1}^2}\right)\,.$$



Strömungsverlauf im Fall $|Z_{\Gamma_1}| < 4\pi\, v_\infty$



Strömungsverlauf im Fall $|Z_{\Gamma_1}| = 4\pi\, v_\infty$



Strömungsverlauf im Fall $|Z_{\Gamma_1}| > 4\pi\, v_\infty$

Im Fall $|Z_{\Gamma_1}| < 4\pi\, v_\infty$ *sind somit* $S_1 \neq S_2$ *und* $|S_1| = |S_2| = 1$, *im Fall* $|Z_{\Gamma_1}| = 4\pi\, v_\infty$ *fallen die beiden Staupunkte zusammen und liegen ebenfalls auf der Einheitskreislinie und im Fall* $|Z_{\Gamma_1}| > 4\pi\, v_\infty$ *sind* S_1 *und* S_2 *rein imaginär sowie* $|S_1| > 1$ *und* $|S_2| < 1$.

Kapitel 7

Logarithmus- und Potenzfunktionen

7.1 Zweige des Logarithmus

Wir vereinbaren $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definition 7.1. *Es sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Unter einer* **Logarithmusfunktion** *bzw. einem* **Zweig des Logarithmus** *verstehen wir stetige eine Funktion $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $e^{g(z)} = z \ \forall\, z \in G$.*

Satz 7.2. *Ist $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion, so ist g auf G holomorph und es gilt*

$$g'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall\, z \in G\,.$$

Satz 7.3. *Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ sind folgende Aussagen äquivalent :*

(a) *Auf G existiert eine Logarithmusfunktion.*

(b) *Die Funktion $f(z) = z^{-1}$ hat auf G eine Stammfunktion.*

(c) *Jeder geschlossene Jordan-Integrationsweg umschließt nicht die Null.*

Beispiel 7.4. *Auf $\mathbb{C}^*$ existiert kein Zweig des Logarithmus!*

Beispiel 7.5. *Sei $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Wir definieren den sogenannten* **Hauptzweig** *des Logarithmus* Log $: G \longrightarrow \mathbb{C}$ *durch*

$$\operatorname{Log} z = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^{|z|} \frac{dx}{x} + \int_0^{\varphi} \mathbf{i}\, d\psi = \ln|z| + \mathbf{i}\varphi$$

mit $\varphi \in (-\pi, \pi)$ und $z = |z|\, e^{\mathbf{i}\varphi}$. Man schreibt für φ auch $\operatorname{Arg} z$ *(Hauptzweig des Arguments.*

Da $\operatorname{Log} z$ auf der positiven reellen Achse mit $\ln z$ übereinstimmt, gilt für $|z| < 1$

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n\,.$$

Beachte: Es gilt $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$ nur dann, wenn $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \in (-\pi, \pi)$.

Beispiel 7.6. *Wir stellen uns die Frage, ob man eine Funktion* $f(z) = \log z^2$ *so definieren kann, dass* $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph ist. Für* $\mathsf{Re}\, z > 0$ *ist* $z^2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, *so dass wir* $f(z) = \operatorname{Log} z^2$ *setzen können. Für* $z = |z|\, e^{\mathbf{i}\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, *ist also* $f(z) = \operatorname{Log}\left(|z|^2 e^{2\mathbf{i}\varphi}\right) = 2\ln|z| + 2\mathbf{i}\varphi$. *Aus Stetigkeitsgründen ergibt sich damit*

$$f(z) = 2\ln|z| + 2\mathbf{i}\varphi = 2\operatorname{Log} z \quad \forall\, z = |z|\, e^{\mathbf{i}\varphi}\,,\ -\pi < \varphi < \pi\,.$$

7.2 Exponential- und Potenzfunktionen

Es seien $a \in \mathbb{C}^*$ und $\log a$ ein Wert des Logarithmus von a. Dann ist $z \mapsto e^{z \log a}$ holomorph in $\mathbb{C}$. (Bezeichnung $e^{z\log a} =: a^z$). Es gilt

$$\frac{d}{dz}\, a^z = (\log a)\, a^z\,.$$

Definition 7.7. *Es sei* $\log : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *ein Zweig des Logarithmus und* $b \in \mathbb{C}$. *Dann nennt man* $z^b := e^{b \log z}$ *einen* **Zweig der b-ten Potenz** *auf* G.

Es gilt

$$\frac{d}{dz}\, z^b = \frac{b}{z}\, e^{b\log z} = b\, e^{-\log z} e^{b \log z} = b\, e^{(b-1)\log z} =: b\, z^{b-1}\,.$$

Den **Hauptzweig** der b-ten Potenz definiert man als $z^b := e^{b \operatorname{Log} z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Es folgt

$$(1+z)^b = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\,, \quad |z| < 1\,,$$

mit $c_0 = 1$ und

$$c_k = \frac{b(b-1)\dots(b-k+1)}{k!} = \binom{b}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Beispiel 7.8. (*Beispiel für die Konstruktion einer mittelbaren Funktion*) *Wir betrachten die Funktion* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$ *und stellen die Frage: Wie bzw. unter welchen Voraussetzungen kann man eine holomorphe Funktion* $\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$ *auf* G *definieren?*

(a) *Sei* $G = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. *Dann ist* $f(G) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, *da die Gleichung* $f(z) = w$ *für jedes* $w \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ *eine Lösung in* G *besitzt und* $f(z) \notin \{0, 1\}\ \forall\, z \in G$. *Auf* $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ *existiert kein Zweig des Logarithmus, so dass* $\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$ *nicht als holomorphe Funktion auf* G *erklärt werden kann.*

(b) *Sei* $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. *Dann ist* $f(G) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, *und wir können mit Hilfe des Hauptzweiges des Logarithmus*

$$\sqrt{\frac{z-1}{z+1}} := \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{z-1}{z+1}\right) =: g(z)\,, \quad z \in G\,,$$

definieren. Es ist dann z.B.

$$g(-\mathbf{i}) = \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{-\mathbf{i}-1}{-\mathbf{i}+1}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-\mathbf{i})\right) = e^{\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi\mathbf{i}}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi\mathbf{i}}{4}}\,.$$

Kapitel 8

Anhang

8.1 Zum Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes

Die folgenden Überlegungen dienen als Vorbereitung auf den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes (Satz 6.2).

1. Wir erinnern an den Satz über implizite Funktionen aus der reellen Analysis. Sind $D \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine offene Menge und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n\,, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung sowie $(x^0, y^0) \in D$ ein Punkt mit

$$f(x^0, y^0) = \Theta\,,$$

wobei die Matrix

$$f_y(x^0, y^0) := \left[\frac{\partial f_j(x^0, y^0)}{\partial y_k} \right]_{j,k=1}^{n}$$

regulär ist, so existieren offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^m$ von x^0 und $V \subset \mathbb{R}^n$ von y^0 sowie eine stetig differenzierbare, bijektive Abbildung $g : U \longrightarrow V$ mit $f(x, g(x)) = \Theta \;\forall\, x \in U$. Dabei gilt

$$g'(x) = -f_y(x, g(x))^{-1} f_x(x, g(x))\,, \quad x \in V\,,$$

wobei

$$f_x(x, y) = \left[\frac{\partial f_j(x, y)}{\partial x_k} \right]_{j,k=1}^{n,m}.$$

2. Wendet man diese Aussage auf die Funktion $F(w, z) = w - f(z)$ anstelle von $f(x, y)$ an, so kann man folgendes zeigen: Eine in z_0 holomorphe Funktion mit $f'(z_0) \neq 0$ ist in z_0 **lokal biholomorph**, d.h., es existieren offene Umgebungen U von z_0 und V von $w_0 := f(z_0)$,

so dass $f : U \longrightarrow V$ bijektiv ist, die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \longrightarrow U$ ebenfalls holomorph ist und $(f^{-1})'(w) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ gilt.

3. Die Funktionen $p(z) = z^k$, $k = 1, 2, ...$, sind in jedem Punkt $z_0 \neq 0$ lokal biholomorph.

4. Sind $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $k \in \{1, 2, \ldots\}$ und $g(z_0) \neq 0$ für ein $z_0 \in G$, so existieren eine Umgebumg U von z_0 und eine holomorphe Funktion $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = [h(z)]^k$ $\forall\, z \in U$.

   Beweis. Es sei $\widetilde{z}$ eine k-te Wurzel von $w_0 = g(z_0)$, d.h. $\widetilde{z}^k = w_0$. Aus $\widetilde{z} \neq 0$ und 3. folgt die Existenz einer Umgebung $\widetilde{U}$ von $\widetilde{z}$ und einer Umgebung V von w_0 , so dass $z^k : \widetilde{U} \longrightarrow V$ biholomorph ist. Sei $\widetilde{h} : V \longrightarrow \widetilde{U}$ die entsprechende Umkehrfunktion. D.h., es gilt $[\widetilde{h}(w)]^k = w$. Da g stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $g(z) \in V$ $\forall\, z \in U_\delta(z_0)$. Für $h(z) = \widetilde{h}(g(z))$ und $U = U_\delta(z_0)$ folgt dann

$$[h(z)]^k = [\widetilde{h}\;(g(z))]^k = g(z) \quad \forall\, z \in U\,.$$

   □

5. Wir wissen bereits: Ist $z_0 \in G$ eine Nullstelle k-ter Ordnung der holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, so gilt

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\,, \quad z \in U_\rho(z_0)\,,\; c_k \neq 0\,,$$

   also

$$f(z) = (z - z_0)^k \left[c_k + \sum_{n=1}^{\infty} c_{k+n} (z - z_0)^n \right] =: (z - z_0)^k g(z)$$

   mit der holomorphen Funktion $g : U_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ und $g(z_0) = c_k \neq 0$. Nach 4. existiert eine holomorphe Funktion $h : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $[h(z)]^k = g(z)$, woraus mit $\widetilde{f}(z) = (z - z_0) h(z)$ die Beziehung

$$f(z) = [\widetilde{f}(z)]^k\,,$$

   folgt, wobei $\widetilde{f} : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 einfache Nullstelle von $\widetilde{f}(z)$ ist.

   Satz 8.1. *Ist z_0 eine k-fache, $k \geq 1$, Nullstelle der holomorphen Funktion f , so existieren eine Umgebung U von z_0 und eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der einfachen Nullstelle z_0 , so dass $f(z) = [\widetilde{f}(z)]^k$, $z \in U$.*

6. Wir verwenden die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 8.1. Dann ist also $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $\widetilde{f}(z_0) = 0$, $\widetilde{f}'(z_0) \neq 0$ und $f(z) = [\widetilde{f}(z)]^k$ $\forall\, z \in U$. Nach 3. existieren Umgebungen U_0 von z_0 und V von 0 , so dass $\widetilde{f} : U_0 \longrightarrow V$ biholomorph ist. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $U_\delta(0) \subset V$ mit $\delta = \sqrt[k]{\varepsilon}$. Mit $\widetilde{U}$ bezeichnen wir das vollständige Urbild von $U_\delta(0)$ bezüglich $\widetilde{f}$, d.h. $\widetilde{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \widetilde{f}(z) \in U_\delta(0) \right\}$. Da $\widetilde{f}$ stetig ist, ist $\widetilde{U}$ eine offene Menge. Ferner gilt $z_0 \in \widetilde{U}$. Die Funktion z^k bildet $U_\delta(0)$ auf $U_\varepsilon(0)$ ab. Dabei wird jeder Wert $w \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ genau k-mal angenommen. Es folgt, dass $f = \widetilde{f}^k$ die Umgebung $\widetilde{U}$ von z_0 auf $U_\varepsilon(0)$ abbildet und dabei jeden Wert $w \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ genau k-mal annimmt.

Satz 8.2 (Blätterzahl bei einer Nullstelle). *Es sei z_0 eine k-fache Nullstelle der holomorphen Funktion f. Dann existiert für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $\widetilde{U} = \widetilde{U}_\varepsilon$ von z_0, so dass f auf $\widetilde{U}$ jeden Wert $w \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ genau k-mal annimmmt und $f(z) = 0$ nur bei $z = z_0$ gilt.*

7. Sei f auf dem Gebiet G holomorph. Dann ist auch $f(G)$ eine zusammenhängende Menge. Seien $w_0 = f(z_0) \in f(G)$ und $f \not\equiv \text{const}$. Dann hat die Funktion $g(z) = f(z) - w_0$ in z_0 eine Nullstelle endlicher Ordnung. Nach Satz 8.2 existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$, d.h. $f(G)$ ist auch offen.

   Satz 8.3 (Gebietstreue). *Ist $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ auf dem Gebiet G holomorph und nicht konstant, so ist das Bild $f(G)$ auch ein Gebiet.*

   Satz 8.4 (Maximumprinzip). *Ist f auf dem Gebiet G holomorph und nicht konstant, so existiert kein $z_0 \in G$ mit $|f(z)| \le |f(z_0)|\ \forall\, z \in G$. (Also: Ist zusätzlich $f : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, so kann $|f(z)|$ nur auf dem Rand von G sein Maximum annehmen, was natürlich für kompaktes $\overline{G}$ immer der Fall ist.)*

   Beweis. Seien $z_0 \in G$ und $|f(z)| \le |f(z_0)|\ \forall\, z \in G$. Dann ist $f(G) \subset \overline{U_R(0)}$ mit $R = |f(z_0)|$ und $f(z_0)$ liegt auf Rand von $U_R(0)$. Somit existiert **kein** $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $U_\varepsilon(f(z_0)) \subset f(G)$ im Widerspruch zum Satz 8.3. □

8. Es seien $f : U_1(0) \longrightarrow U_1(0)$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} = z g(z)$$

   mit der holomorphen Funktion $g : U_1(0) \to \mathbb{C}$. Es folgt $f'(0) = g(0)$. Für $|z| = r < 1$ gilt $|f(z)| = r|g(z)| < 1$, so dass $|g(z)| < \dfrac{1}{r}\ \forall\, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$. Nach Satz 8.4 ist $|g(z)| < \dfrac{1}{r}$ $\forall\, z \in \overline{U_r(0)}$. Für $r \longrightarrow 1 - 0$ erhalten wir $|g(z)| \le 1\ \forall\, z \in U_1(0)$, also $|f(z)| \le |z|$ $\forall\, z \in U_1(0)$. Nehmen wir nun an, dass ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ existiert, so folgt $|g(z_0)| = 1$ und nach Satz 8.4 $g \equiv \text{const}$ in $U_1(0)$, d.h. $g(z) = e^{\mathbf{i}\vartheta}$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$. Also ist $f(z) = z e^{\mathbf{i}\vartheta}$. Gleiches folgt, wenn wir $|f'(0)| = 1$ annehmen, da wegen $f'(0) = g(0)$ dann $|g(0)| = 1$ gilt, was nach Satz 8.4 wiederum $g \equiv \text{const}$ impliziert.

   Satz 8.5 (Schwarzsches Lemma). *Seien $f : U_1(0) \longrightarrow U_1(0)$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gilt $|f'(0)| \le 1$ und $|f(z)| \le |z|\ \forall\, z \in U_1(0)$. Existiert ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder ist $|f'(0)| = 1$, so ist f einfach eine Drehung um einen Winkel $\vartheta \in \mathbb{R}$, d.h. $f(z) = z e^{\mathbf{i}\vartheta}\ \forall\, z \in U_1(0)$.*

Nun zum eigentlichen Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes: Es sei G ein echtes und einfach zusammenhängendes Teilgebiet von $\mathbb{C}$. Wir zeigen, dass es eine holomorphe und bijektive Abbildung $f : G \longrightarrow U_1(0)$ gibt. Aus Satz 8.2 folgt dann $f'(z) \ne 0$ für alle $z \in G$, Satz 8.3 liefert dann die Stetigkeit von $f^{-1} : U_1(0) \longrightarrow G$ und Satz 1.8 die Holomorphie von $f^{-1} : U_1(0) \longrightarrow G$. Hat man dann also zwei echte und einfach zusammenhängende Teilgebiete G_1 und G_2 von $\mathbb{C}$ und die biholomorphen Abbildungen $f_1 : G_1 \longrightarrow U_1(0)$ bzw. $f_2 : G_2 \longrightarrow U_1(0)$, so ist $f_2^{-1} \circ f_1 : G_1 \longrightarrow G_2$ eine Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften.

1. Wir zeigen, dass es stets eine injektive und holomorphe Abbildung $f : G \longrightarrow U_1(0)$ gibt.

(a) Der Fall, dass eine Kreisscheibe $U_r(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus G$ existiert: Die Abbildung $z \mapsto \dfrac{r}{z - z_0}$ realisiert eine solche gewünschte Abbildung.

(b) Der andere Fall: O.E.d.A. nehmen wir an, dass $0 \notin G$ gilt. Da G einfach zusammenhängend ist, kann es keinen geschlossenen Jordan-Integrationsweg in G geben, der die Null umschließt. Somit gibt es einen Zweig des Logarithmus $\log : G \longrightarrow \mathbb{C}$ (vgl. Satz 7.3). Für die Wurzelfunktion $g : G \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ z \mapsto e^{\frac{1}{2}\log z}$ gilt dann $[g(z)]^2 = z$ $\forall\, z \in G$. Insbesondere ist $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ injektiv. Da aber $[-g(z)]^2 = [g(z)]^2$ gilt, folgt $-g(z) \notin g(G)$ $\forall\, z \in G$. Ist also $U_r(w_0) \subset g(G)$, so ist $U_r(-w_0) \cap g(G) = \emptyset$, und wir können g noch mit der Abbildung $w \mapsto \dfrac{r}{w + w_0}$ (vgl. (a)) verknüpfen, um das Gewünschte zu erhalten.

2. Wir können nun annehmen, dass $G \subset U_1(0)$ gilt und o.E.d.A. auch $0 \in G$. Es sei $\mathcal{F}$ die Menge der injektiven und holomorphen Funktionen $f : G \longrightarrow U_1(0)$ mit $f(0) = 0$.

Satz 8.6. *Ist $f \in \mathcal{F}$ nicht surjektiv, so existiert ein $f_1 \in \mathcal{F}$ mit $|f_1'(0)| > |f'(0)|$.*

Beweis. Es seien $z_0 \in U_1(0) \setminus f(G)$ und

$$g : U_1(0) \longrightarrow U_1(0)\,, \quad z \mapsto \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}\,.$$

Nach Beispiel 6.11 ist g biholomorph. Damit ist $0 \notin (g \circ f)(G) =: \widetilde{G}$, und $\widetilde{G}$ ist einfach zusammenhängend. Also gibt es einen Zweig des Logarithmus $\log : \widetilde{G} \longrightarrow \mathbb{C}$, und wir definieren

$$h(z) = e^{\frac{1}{2}\log z} =: \sqrt{z}\,, \quad z \in \widetilde{G}\,.$$

Dann ist $h \circ g \circ f : G \longrightarrow U_1(0)$ eine injektive Abbildung. Wir setzen $z_1 = h(-z_0) = h(g(0))$ und

$$g_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1} z} \quad \text{sowie} \quad f_1 = g_1 \circ h \circ g \circ f\,.$$

Es folgt $f_1 \in \mathcal{F}$. Die Abbildung

$$h_1 : U_1(0) \longrightarrow U_1(0)\,, \quad z \mapsto g^{-1}\left([g_1^{-1}(z)]^2\right)$$

ist nicht nur eine Drehung um den Nullpunkt. Aus dem Schwarzschen Lemma (Satz 8.5) folgt $|h_1'(0)| < 1$ und somit

$$|f'(0)| = |(h_1 \circ f_1)'(0)| = |h_1'(0)| \cdot |f_1'(0)| < |f_1'(0)|\,.$$

□

3. Wir zeigen: In $\mathcal{F}$ gibt es ein f_* mit der Eigenschaft

$$|f_*'(0)| \geq |f'(0)| \quad \forall\, f \in \mathcal{F}\,. \tag{8.1}$$

Nach der Cauchyschen Integralformel gilt für $U_r(0) \subset G$ und jedes $f \in \mathcal{F}$

$$|f'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_r(0)} \frac{f(z)}{z^2}\, dz \right| \leq \frac{1}{r}\,.$$

Dies zeigt, dass

$$\sigma_* = \sup\left\{|f'(0)| : f \in \mathcal{F}\right\} < \infty$$

gilt. Es sei nun $\left(\widetilde{f}_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ eine Funktionenfolge mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} |\widetilde{f}_n'(0)| = \sigma_*$. Es bleibt zu zeigen, dass es in $\mathcal{F}$ eine Funktion f_* mit $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{f}_{n_k}'(0) = f_*'(0)$ gibt. Dazu benötigen wir einige Aussagen aus der Theorie der lokal gleichmäßigen Konvergenz von Folgen holomorpher Funktionen.

Definition 8.7. *Eine Folge* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorpher Funktionen heißt* **lokal gleichmäßig konvergent**, *wenn sie auf jeder Umgebung* $U_\varepsilon(z) \subset G$ *gleichmäßig konvergiert.*

- Die Grenzfunktion einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge holomorpher Funktionen ist holomorph.
- Mit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auch $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ lokal gleichmäßig, und zwar gegen die Ableitung der Grenzfunktion von f_n.
- Für eine lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$ und eine beliebige Zahl $w \in \mathbb{C}$ gilt: Ist die Anzahl der Nullstellen von $f_n - w : G \longrightarrow \mathbb{C}$ durch die Zahl M beschränkt, so ist die Grenzfunktion $f(z)$ entweder konstant w oder $f - w$ hat auch höchstens M Nullstellen.
- Jede lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen besitzt eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Es existiert also eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $\left(\widetilde{f}_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$. Bezeichnen wir deren Grenzfunktion mit $f_* : G \longrightarrow \overline{U_1(0)}$, so ist diese holomorph, so dass nach dem Satz über die Gebietstreue (Satz 8.3) gilt: $f(G) \subset U_1(0)$. Sie ist auch injektiv, also $f_* \in \mathcal{F}$. Und letztendlich gilt (8.1).

Nach Satz 8.6 ist $f(G) = U_1(0)$.

8.2 Poissonsche Integralformel für die obere Halbebene

Wir lösen jetzt das Dirichletsche Randwertproblem (5.5) für die obere Halbebene $G = \mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}\, z > 0\}$. Dabei setzen wir voraus, dass $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, für die die beiden Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$ endlich und gleich sind. Wir suchen also eine in der oberen Halbebene $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x \in \mathbb{R}\right\}$ harmonische Funktion, die auf deren Abschließung $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \in \mathbb{R}\right\}$ stetig ist und der Bedingung $u(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, genügt.

Sei $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$ mit $y_0 > 0$ fest gewählt. Die Funktion

$$w = f(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$$

ist eine holomorphe Abbildung der oberen Halbebene auf den Einheitskreis $\{|w| < 1\}$ (vgl. Beispiel 6.10). Nach Satz 5.6 ist

$$\widetilde{u}(w) = \frac{1}{2\pi} \mathsf{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} g(f^{-1}(e^{\mathbf{i}\varphi}))\, \frac{e^{\mathbf{i}\varphi} + w}{e^{\mathbf{i}\varphi} - w}\, d\varphi \right\}$$

harmonisch in $\{|w|<1\}$, wobei $\widetilde{u}(e^{\mathbf{i}\varphi}) = g(f^{-1}(e^{\mathbf{i}\varphi}))$, $0 \le \varphi < 2\pi$, gilt. Somit ist die Funktion $u(z) = \widetilde{u}(f(z))$ harmonisch in $\mathbb{C}_+$, und für $x = f^{-1}(e^{\mathbf{i}\psi}) \in \mathbb{R}$ gilt $u(x) = \widetilde{u}(e^{\mathbf{i}\psi}) = g(x)$. Wir erhalten also unter Verwendung der Substitution

$$t = f^{-1}(e^{\mathbf{i}\varphi}) \quad \text{bzw.} \quad e^{\mathbf{i}\varphi} = \frac{t - z_0}{t - \overline{z_0}}$$

die Formel

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\,\mathsf{Re}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \frac{\dfrac{t-z_0}{t-\overline{z_0}} + \dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}}{\dfrac{t-z_0}{t-\overline{z_0}} - \dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}}\, \frac{y_0}{(x_0-t)^2 + y_0^2}\, dt \right\}.$$

Für $z = z_0$ folgt die **Poissonsche Integralformel für die obere Halbebene**

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{y_0}{(x_0-t)^2 + y_0^2}\, dt\,.$$

8.3 Zum Cauchyschen Integralsatz

Die folgende Bemerkung geht auf die Frage ein, inwieweit man beim Cauchyschen Integralsatz auf die Voraussetzung der Konvexität des Gebietes verzichten kann (vgl. Satz 3.2). Der Beweis beruht auf dem Gaußschen bzw. Greenschen Integralsatz der Ebene und der Tatsache, dass holomorphe Funktionen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (vgl. Folg. 1.7) genügen und beliebig oft differenzierbar sind (vgl. Satz 3.3).

Bemerkung 8.8 (Cauchyscher Integralsatz in der allgemeinen Situation). *Sind $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\Gamma \subset G$ ein geschlossener Jordan-Integrationsweg, so gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\, dy = 0\,.$$

Index