V19 – Anomale Diffusion in nichtintegrablen Hamiltonsystemen

Ort: Labor C60.205 (Professur Simulation naturwissenschaftlicher Prozesse)
Betreuer: Dr. Tony Albers

Versuchsbeschreibung

Magnetische Feldlinien folgen in der Realität nur selten den symmetrischen Verläufen, welche für gewöhnlich in den Lehrbüchern der Physik behandelt werden. Stattdessen können sie als Trajektorien Hamiltonscher Systeme verstanden werden und können wie diese chaotisches Verhalten zeigen. Aus diesem Grund ist seit vielen Jahren die Fusionsforschung mit der Theorie der Hamiltonsysteme als spezielle Klasse dynamischer Systeme verknüpft. In diesem Praktikum soll anhand eines einfachen nichtintegrablen Hamiltonsystems, der Standardabbildung, studiert werden, wie der Phasenraum derartiger Systeme typischerweise beschaffen ist und welche diffusionsartigen Transportprozesse in einem solchen Phasenraum stattfinden können.

Aufgabenstellung

1. Informieren Sie sich anhand geeigneter Literatur über die in nichtintegrablen Hamiltonsystemen auftretenden Phasenraumstrukturen (Stichworte: KAM-Theorem, Poincaré-Birkhoff-Theorem).
2. Betrachten Sie ein Teilchen unter dem Einfluss eines zeitlich periodisch wirkenden Kick-Potentials $V(q) = \frac{1}{(2\pi)^2}\cos(2\pi q)$ (gekickter Rotator) mit der Hamiltonfunktion

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m} + k\,V(q)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT).$$

   Der Störparameter k reguliert dabei die Stärke der Abweichung vom integrablen Fall. Leiten Sie aus der Hamiltonfunktion die kanonischen Bewegungsgleichungen ab. Setzen Sie dabei die Masse des Teilchens auf $m = 1$ und die zeitliche Periode der Stöße ebenfalls auf $T = 1$. Leiten Sie für dieses System eine Poincaré-Abbildung her, indem Sie die kanonischen Gleichungen über eine zeitliche Periode integrieren. Dabei sollen q_n und p_n die Koordinaten bzw. die Impulse des Teilchens kurz vor dem n-ten Stoß bezeichnen. Sie erhalten somit die Standardabbildung

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi q_n) \\ q_{n+1} &= q_n + p_{n+1}, \end{aligned}$$

   welche ein paradigmatisches Beispiel für die Untersuchung niedrigdimensionaler, nichtintegrabler Hamiltonsysteme darstellt.
3. Der Phasenraum der Standardabbildung ist periodisch in Orts- und Impulsrichtung mit Periode 1. Erstellen Sie Phasenportraits der Standardabbildung für verschiedene Werte des Störparameters, indem Sie den Verlauf mehrerer Trajektorien in der Einheitszelle $(q,p) \in [0,1]\times[0,1]$ visualisieren ($k = 0$, $k = 0.5$, $k = k_c = 0.9716$, $k = 1.5$, $k = 3$, $k = 10$).

Aufgabenstellung

4. Versuchen Sie qualitativ die beobachteten Strukturen anhand der oben genannten Theoreme zu erklären.
5. Berechnen Sie numerisch für $k = 0.5$ ein paar Trajektorien mit Anfangsbedingung in der unmittelbaren Umgebung des hyperbolischen Fixpunktes im Punkt $(q, p) = (0, 0)$. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Koordinate q und des Impulses p in Abhängigkeit von der Iterationszahl n dar und vergleichen Sie beide miteinander. Was stellen Sie fest? Berechnen Sie weitere Trajektorien für den Störparameter $k = 1.5$. Welchen deutlichen Unterschied stellen Sie im zeitlichen Verlauf des Impulses p fest und wie kann dieser erklärt werden?
6. Um Diffusionsprozesse zu charakterisieren, verwendet man häufig das Mean Squared Displacement (MSD), welches als Ensemblemittel über eine große Anzahl von N Trajektorien für einen zeitlich kontinuierlichen Diffusionsprozess definiert ist als

$$\langle \Delta x^2(\tau) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [x_i(\tau) - x_i(0)]^2.$$

Die Variable x kann dabei sowohl für die generalisierte Koordinate q oder den generalisierten Impuls p stehen. In vielen in der Natur beobachteten Diffusionsprozessen wächst das MSD asymptotisch mit einem Potenzgesetz an, d.h.

$$\langle \Delta x^2(\tau) \rangle \simeq D_\alpha \, \tau^\alpha \quad (\tau \to \infty).$$

Man bezeichnet dabei α als Diffusionsexponenten und D_α als generalisierten Diffusionskoeffizienten. Der Fall $\alpha = 1$ entspricht der normalen Diffusion und lässt sich aus der bekannten Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = \frac{D_1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,t)$$

ableiten. $p(x, t)$ beschreibt hier die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte ein Teilchen zum Zeitpunkt t am Ort x zu finden. Lösen Sie durch Fourier-Transformation die Diffusionsgleichung mit der Anfangsbedingung $p(x, 0) = \delta(x)$ und zeigen Sie anhand der Lösung die im Falle der normalen Diffusion geltende lineare Beziehung des Mean Squared Displacement.
7. Ist der Diffusionsexponent α von Eins verschieden, so spricht man von anomaler Diffusion. Dabei wird der Fall $\alpha < 1$ als Subdiffusion und der Fall $\alpha > 1$ als Superdiffusion bezeichnet. Bestimmen Sie numerisch die Exponenten α für die Diffusion in Ortsrichtung und in Impulsrichtung für die beiden Störparameter $k = 0.5$ und $k = 1.5$. Wählen Sie als Anfangsbedingung für das Ensemble von N Trajektorien Punkte in der Nähe des hyperbolischen Fixpunktes bei $(q, p) = (0, 0)$.

Literaturangabe

[1] J. Argyris, G. Faust, M. Haase, and R. Friedrich, *Die Erforschung des Chaos* (2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010)

[2] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (1st edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1993)

[3] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1992)