

Vorlesungsskript Störungstheorie und ihre Anwendung

Verfasserin:
Dr. Sybille Handrock
TU Chemnitz
Fakultät für Mathematik
e-mail:handrock@mathematik.tu-chemnitz.de

Sommersemester 2003

Literatur

- [1] *Goering, H.*: Asymptotische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen, WTB, Bd. 144, Akademie-Verlag, Berlin, 1977.
- [2] *Handrock-Meyer, S., Kalachev, L. V., Schneider, K. R.*: A method to determine the dimension of long-time dynamics in multi-scale systems, J. Math. Chem., Vol. 30, No. 2 (2001) 133-160, siehe auch Preprint-Reihe der TU Chemnitz Nr. 2000-7.
- [3] *O'Malley, R.*: Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations, Applied Mathematical Sciences v. 89, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [4] *Strygin, V. V., Sobolev, V. A.*: Split of Motions by the Method of Integral Manifolds (Russian), Nauka, Moscow, 1988.
- [5] *Verhulst, F.*: Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Universitext, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1990.
- [6] *Wasow, W.*: Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, Interscience Publishers, New York, 1965.

Inhaltsverzeichnis

1	Regulär und singular gestörte Probleme	1
1.1	Einfluss kleiner Störgrößen in der Gleichung auf die Lösung	1
1.2	Grundlegende Definitionen	7
1.3	Eigenschaften asymptotischer Potenzreihen	12
1.4	APR für Funktionen zweier Variabler	14
1.5	Anwendungen auf DGL und algebraische Gleichungen	20
1.6	Regulär und singular gestörte Probleme aus den Anwendungen	25
1.7	Parameterabhängige Normalsysteme	29
2	Methode der Grenzschichtverbesserung für SGP mit Ordnungserniedrigung	36
2.1	RWP für lineare DGL 2. Ordnung	36
2.2	AWP für lineare DGL 2.Ordnung	52
2.3	RWP für DGL höherer Ordnung	55
2.4	AWP für nichtlineare Systeme 1.Ordnung	57
2.5	RWP für nichtlineare Systeme 1.Ordnung	65
3	Integralmannigfaltigkeiten	70
3.1	Integralmannigfaltigkeiten autonomer Systeme 1. Ordnung	70
3.2	E.a.i.M. für SGP der Form (1.60)	71
3.3	Die Existenz einer e.a.i.M. für ein spezielles SGP	74
3.4	Lokale Reduktion des Zustandsraumes	80
3.5	Das Beispiel von Duchêne/Rouchon	83
3.5.1	Näherungsweise Berechnung einer e.a.i.M.	84
3.5.2	Anwendung des vereinfachten Algorithmus	85

1 Regulär und singular gestörte Probleme

1.1 Einfluss kleiner Störgrößen in der Gleichung auf die Lösung

Differentialgleichungen (DGL), die einen Prozess in der Physik, Chemie oder in anderen Naturwissenschaften beschreiben, enthalten in der Regel eine oder mehrere konstante (positive) Größen als Parameter. Im folgenden sei ε ein kleiner, wenn nicht anders vereinbart, positiver Parameter: $0 \leq \varepsilon \ll 1$. Zunächst betrachten wir einige Beispiele von DGL erster Ordnung.

Beispiel 1.1 (Störung in der rechten Seite, monoton fallender Prozess)

Gestörtes Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{x} + x = \varepsilon, \quad x(0) = 1.$$

Ungestörtes AWP (Man setzt $\varepsilon = 0$):

$$\dot{y} + y = 0, \quad y(0) = 1.$$

Lösung des gestörten Problems:

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon + (1 - \varepsilon)e^{-t}.$$

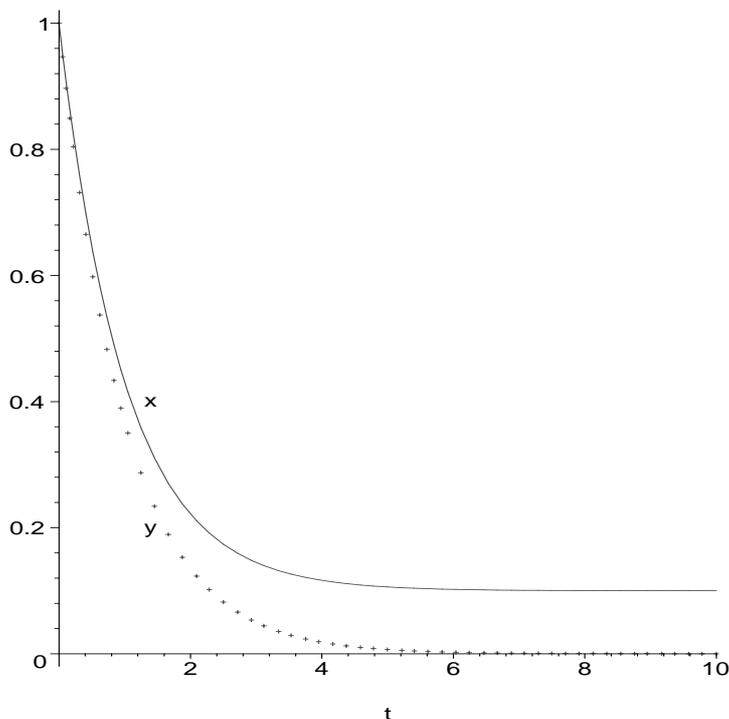
Lösung des ungestörten Problems:

$$y(t) = e^{-t}.$$

Man erhält:

$$|x(t, \varepsilon) - y(t)| = \varepsilon(1 - e^{-t}) \leq \varepsilon \quad t \geq 0,$$

d.h., der Fehler, der entsteht, wenn $y(t)$ als eine Näherungslösung von $x(t, \varepsilon)$ betrachtet wird, bleibt für alle t kleiner als ε .



Figur 1

Die Skizze zeigt das Verhalten der Lösung der gestörten Gleichung für $\varepsilon = 0.1$.

Beispiel 1.2 (Störung in der rechten Seite, monoton wachsender Prozess)

Gestörtes AWP:

$$\dot{x} - x = \varepsilon, \quad x(0) = 1.$$

Ungestörtes AWP:

$$\dot{y} - y = 0, \quad y(0) = 1.$$

Lösung des gestörten Problems:

$$x(t, \varepsilon) = -\varepsilon + (1 + \varepsilon)e^t.$$

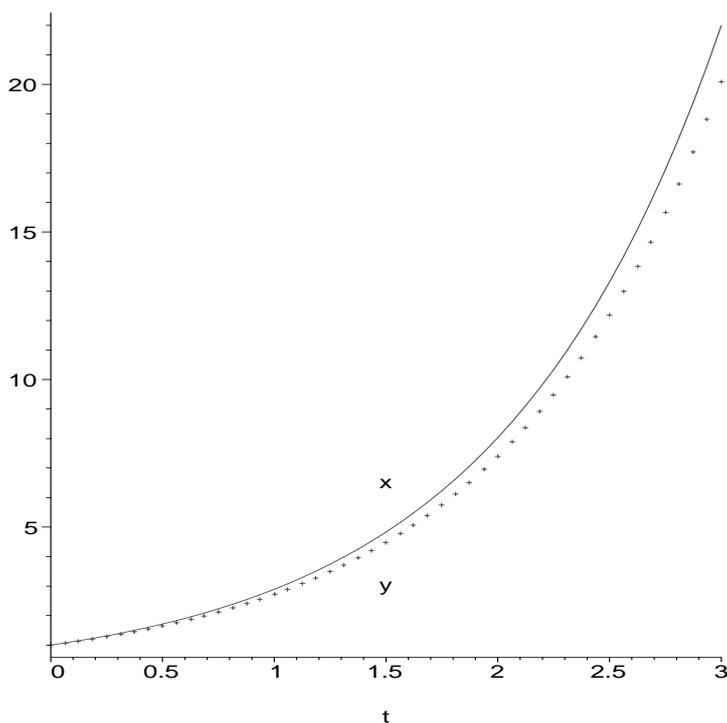
Lösung des ungestörten Problems:

$$y(t) = e^t.$$

Man erhält:

$$|x(t, \varepsilon) - y(t)| = \varepsilon |1 - e^t| \quad t \geq 0.$$

d.h., $y(t)$ ist für große t keine Näherungslösung von $x(t, \varepsilon)$. Für $0 \leq t \leq 1$ liegt ein Fehler der Größenordnung ε vor, für große t wächst der Fehler über alle Grenzen.



Figur 2

Die Skizze zeigt das Verhalten der Lösung der gestörten Gleichung für $\varepsilon = 0.1$.

Beispiel 1.3 (Störung bei der (höchsten) Ableitung, monoton fallender Prozess)

Gestörtes AWP:

$$\varepsilon \dot{x} + x = 1 \quad x(0) = x_0.$$

Das ungestörte Problem ist hier eine algebraische Gleichung, d.h., die Ordnung der Gleichung erniedrigt sich für $\varepsilon = 0$:

Lösung des ungestörten Problems:

$$y = 1.$$

Lösung des gestörten Problems:

$$x(t, \varepsilon) = 1 + (x_0 - 1) \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

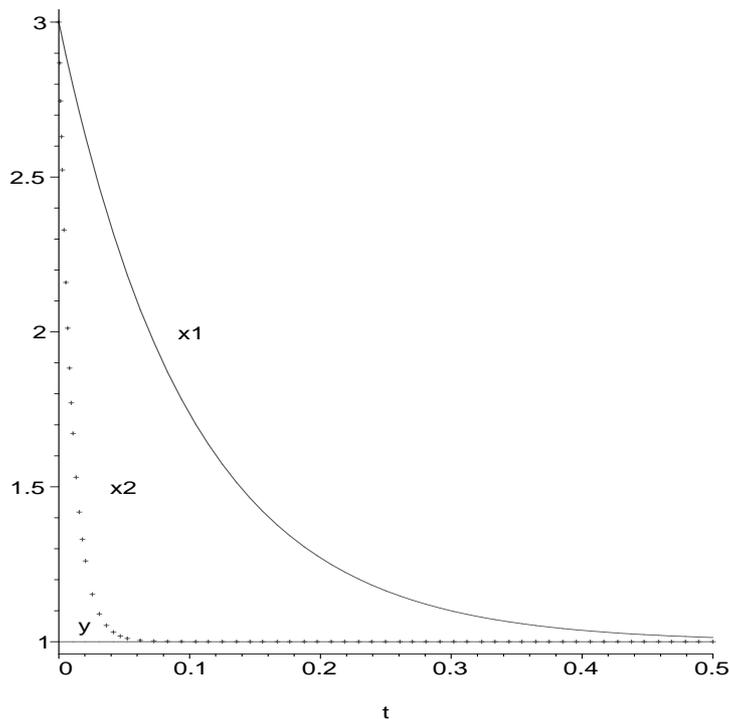
Es gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} x(t, \varepsilon) = \begin{cases} x_0 & t = 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

Für $x_0 \neq 1$ besitzt die stetige Funktion $x(t, \varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ eine unstetige Grenzfunktion, was darauf hinweist, dass die Konvergenz auf einem beliebigen Zeitintervall $[0, T]$ nicht gleichmäßig ist. Dies folgt aus dem Satz, dass eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig konvergiert, auch einen stetigen Grenzwert besitzt. Das Intervall der nichtgleichmäßigen Konvergenz ist von der Größenordnung $O(\varepsilon)$. In der Tat, für $t > B\varepsilon$ kann die Differenz

$$|x(t, \varepsilon) - 1| \leq |x(0) - 1| e^{-B}$$

beliebig klein gemacht werden, wenn man nur B groß genug wählt. Das Intervall der nichtgleichmäßigen Konvergenz heißt **Grenzschicht (GS)**.



Figur 3

Die Skizze zeigt das Verhalten der Lösung der gestörten Gleichung für $\varepsilon = 0.1$ (Funktion x_1) und $\varepsilon = 0.01$ (Funktion x_2) jeweils mit dem Anfangswert (AW) $x_0 = 3$.

Ebenso lassen sich Beispiele von DGL zweiter Ordnung angeben.

Beispiel 1.4 (Störung in den Gliedern niederer Ordnung, oszillierender Prozess)

Gestörtes AWP:

$$\ddot{x} + (1 + \varepsilon)^2 x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Ungestörtes AWP :

$$\ddot{y} + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Die Lösung des gestörten Problems ist eine beschränkte Funktion:

$$x(t, \varepsilon) = (1 + \varepsilon)^{-1} \sin((1 + \varepsilon)t).$$

Die Lösung des ungestörten Problems ist eine beschränkte Funktion:

$$y(t) = \sin t.$$

Man erhält:

$$x(t, \varepsilon) - y(t) = (1 + \varepsilon)^{-1} \sin((1 + \varepsilon)t) - \sin t.$$

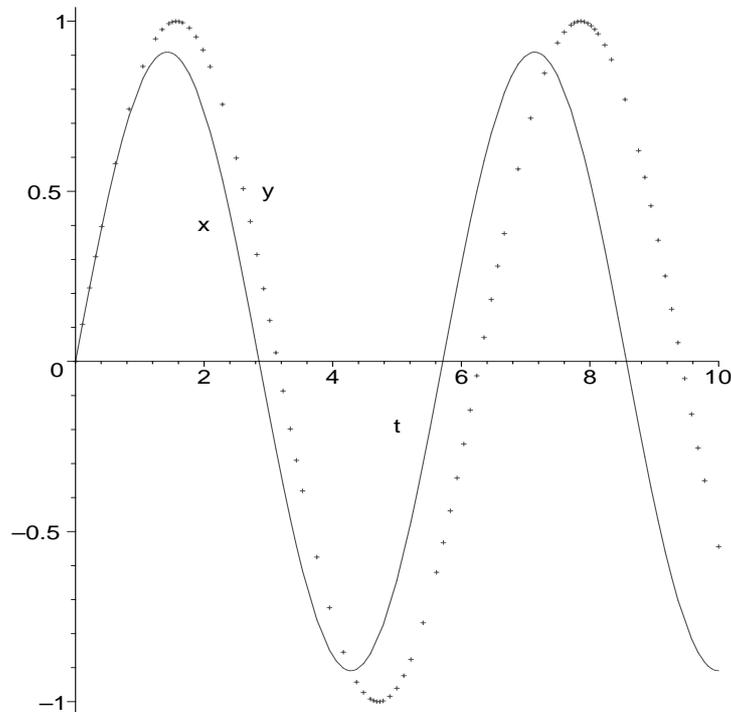
Für kleine z ist $\sin z \approx z - z^3/3!$, also

$$x(t, \varepsilon) - y(t) \approx -(2\varepsilon + \varepsilon^2)t^3/3!,$$

d.h. für kleine ε und kleine t liegen die Lösungskurven nahe beieinander. Für hinreichend große t , z.B. für $t_0 = \pi/(2\varepsilon)$ ist $y(t)$ keine Näherungslösung für $x(t, \varepsilon)$, denn

$$\begin{aligned} x(t_0, \varepsilon) - y(t_0) &= (1 + \varepsilon)^{-1} [\cos t_0 - \sin t_0] - \varepsilon(1 + \varepsilon)^{-1} \sin t_0 \\ &= (1 + \varepsilon)^{-1} \sqrt{2} \cos(\pi/4 + t_0) - \varepsilon(1 + \varepsilon)^{-1} \sin t_0 \end{aligned}$$

wobei der erste Summand für kleine ε nicht klein wird.



Figur 4

Die Skizze zeigt das Verhalten der Lösung der gestörten Gleichung für $\varepsilon = 0.1$.

Beispiel 1.5 (Störung in den Gliedern niederer Ordnung, oszillierender Prozess)

Gestörtes AWP:

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + x = 0 \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Ungestörtes AWP:

$$\ddot{y} + y = 0 \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Das ungestörte Problem kann man als harmonischen Oszillator auffassen, wobei der Reibungsterm vernachlässigt worden ist. In der Praxis sind Reibungs- oder Dämpfungseffekte stets vorhanden. Betrachtet man einen harmonischen Oszillator mit kleinen Reibungskräften, so kann das Modell verbessert werden, indem man die gestörte DGL untersucht.

Lösung des gestörten Problems:

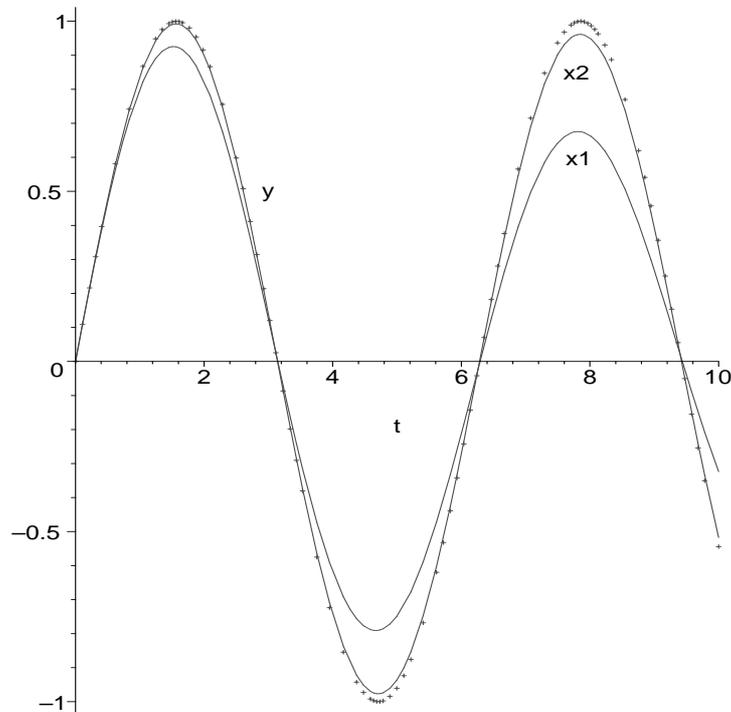
$$x(t, \varepsilon) = \exp\left(\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) t\right) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} t\right).$$

Die Lösung des ungestörten Problems ist wieder:

$$y(t) = \sin t.$$

Die Amplituden der Lösungskurve $x(t, \varepsilon)$ werden von folgenden Kurven begrenzt:

$$z_1(t, \varepsilon) = + \exp\left(\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) t\right) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad z_2(t, \varepsilon) = - \exp\left(\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) t\right) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$



Figur 5

Die Skizze zeigt das Verhalten der Lösung der gestörten Gleichung für $\varepsilon = 0.1$ (Funktion x_1) und $\varepsilon = 0.01$ (Funktion x_2).

Beispiel 1.6 (Störungen in den Gliedern niederer Ordnung, oszillierender Prozess)

Gestörtes AWP:

$$\ddot{x} + \varepsilon x = 0 \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Ungestörtes AWP:

$$\ddot{y} = 0 \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Lösung des gestörten Problems:

$$x(t, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin(\sqrt{\varepsilon} t).$$

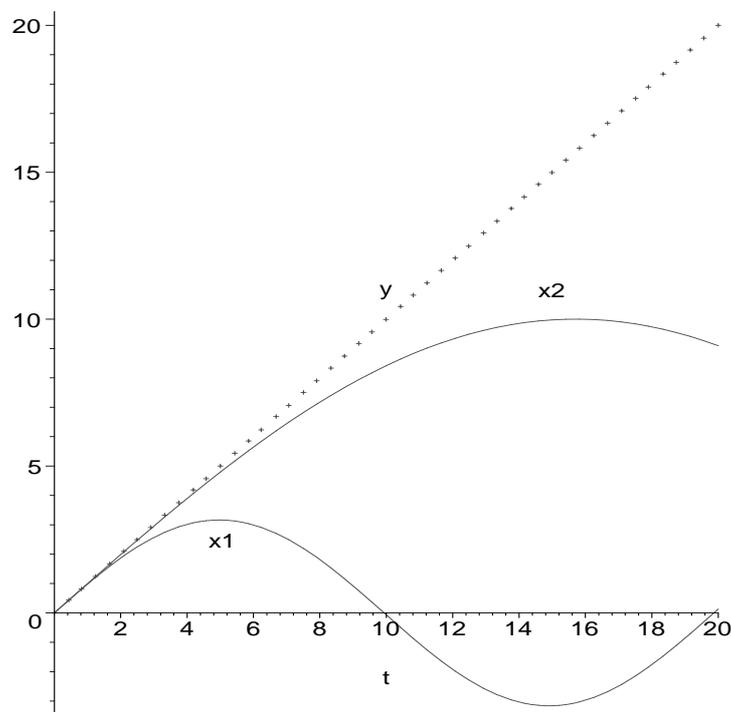
Lösung des ungestörten Problems:

$$y(t) = t.$$

Das gestörte Problem entsteht, wenn sich ein Massenpunkt der Masse 1 reibungsfrei längs der t -Achse unter Einwirkung einer kleinen Federkraft $-\varepsilon t$ bewegt. Analog wie in Beispiel 1.4 findet man für kleine ε und kleine t

$$x(t, \varepsilon) - y(t) \approx -\varepsilon t^3/3!,$$

d.h. für kleine ε und kleine t wird die Lösung des obigen Problems durch das ungestörte AWP gut approximiert.



Figur 6

Die Skizze zeigt wieder das Verhalten der Lösung des gestörten AWP für $\varepsilon = 0.1$ (Funktion x_1) und $\varepsilon = 0.01$ (Funktion x_2).

1.2 Grundlegende Definitionen

Sei I ein Intervall (beschränkt oder unbeschränkt auf der t -Achse. Wir bezeichnen mit

$$P_\varepsilon(x_\varepsilon) = P_\varepsilon(x(t, \varepsilon)) = 0 \quad t \in I$$

das durch einen kleinen positiven Parameter ε gestörte Problem und mit

$$P_0(y) = P_0(y(t)) = 0 \quad t \in I$$

das ungestörte Problem, welches man erhält, wenn im gestörten Problem der Parameter ε gleich Null gesetzt wird.

Wir beschränken uns auf den Fall, dass P durch Differentialoperatoren und Anfangsbedingungen (AB) bzw. Randbedingungen (RB) definiert ist. Allgemein können natürlich auch von kleinen Parametern abhängige Integraloperatoren oder andere Operatorgleichungen mit globaleren Zusatzbedingungen betrachtet werden. Der Parameter ε repräsentiert den Einfluss von fast vernachlässigbaren physikalischen Größen.

Definition 1.1 *Man sagt, die Funktionenfolge $(x(t, \varepsilon))$ konvergiert gleichmässig bezüglich $t \in I$ gegen die Funktion $y(t)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

1. Für jedes fixierte $t_0 \in I$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t_0, \varepsilon) = y(t_0).$$

2. Für jedes $\delta > 0$ existiert eine **nicht von t abhängige Zahl** ε_0 , so dass für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ die Beziehung

$$|x(t, \varepsilon) - y(t)| < \delta$$

gleichzeitig für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Definition 1.2 *Ein Problem $P_\varepsilon(x_\varepsilon)$ heißt **regulär gestört** (RGP), wenn seine Lösung x_ε für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmässig bezüglich der unabhängigen Variablen t in I konvergiert.*

Definition 1.3 *Ein Problem P_ε heißt **singulär gestört** (SGP), wenn die Bedingung der gleichmässigen Konvergenz $x(t, \varepsilon) \rightarrow y(t)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ verletzt ist.*

Die gleichmäßige Konvergenz ist meist in kleinen Teilgebieten am Rand von I verletzt. Die Präsenz eines kleinen Parameters bei der/den höchsten Ableitungen ist nicht notwendig dafür, dass ein Problem **singulär gestört** ist, weist aber in vielen Fällen auf diese Möglichkeit hin.

Die exakten Lösungen der gestörten Probleme sind i.a. nicht in expliziter Form verfügbar. Deshalb suchen wir nach anderen Lösungsdarstellungen.

Unter der Annahme einer hinreichenden Glattheit der in P_ε eingehenden Größen (Koeffizienten, rechte Seiten der Gleichung usw. nach der/den unabhängigen Variablen und nach ε kann die Lösung eines **regulär gestörten** Problems approximiert werden durch formale asymptotische Potenzreihen in ε , die als Hauptterm die Lösung des ungestörten Problems y besitzen.

Definition 1.4 Eine Darstellung der Funktion $g(\varepsilon)$ in der Form $\sum_{j=0}^{\infty} g_j \varepsilon^j$ heißt formale Potenzreihenentwicklung.

Eine Potenzreihenentwicklung der Funktion $g(\varepsilon)$ heißt asymptotisch im Sinne von POINCARÉ, wenn für jedes fixierte $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{\varepsilon^N} \left(g(\varepsilon) - \sum_{j=0}^N g_j \varepsilon^j \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} g_j \varepsilon^j$ heißt dann asymptotische Potenzreihe (APR) der Funktion $g(\varepsilon)$. Symbolisch schreibt man

$$g(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} g_j \varepsilon^j \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

Falls Zahlen g_1, g_2 existieren, so dass

$$g_1 \leq \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \left(g(\varepsilon) - \sum_{j=0}^N g_j \varepsilon^j \right) \leq g_2 \quad (1.3)$$

für alle hinreichend kleinen $\varepsilon \geq 0$ erfüllt ist, so schreiben wir

$$g(\varepsilon) = \sum_{j=0}^N g_j \varepsilon^j + O(\varepsilon^{N+1}) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

wobei O ein LANDAUSches Ordnungssymbol bezeichnet.

Offensichtlich ist die Bedingung (1.3) schärfer als die Bedingung (1.1).

Theorem 1.1 Die Funktion $g(\varepsilon)$ besitzt eine asymptotische Potenzreihenentwicklung der Form (1.2) gdw für jedes fixierte $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \left(g(\varepsilon) - \sum_{j=0}^{N-1} g_j \varepsilon^j \right) = g_N. \quad (1.4)$$

Beweis:

1. **Notwendigkeit:** Wir schreiben (1.1) in der Form

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \left(g(\varepsilon) - \sum_{j=0}^{N-1} g_j \varepsilon^j - g_N \varepsilon^N \right) = 0.$$

Wegen $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_N \frac{\varepsilon^N}{\varepsilon^N} = g_N$ existiert auch $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \left(g(\varepsilon) - \sum_{j=0}^{N-1} g_j \varepsilon^j \right)$ und es gilt

$$g_N = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \left(g(\varepsilon) - \sum_{j=0}^{N-1} g_j \varepsilon^j \right) \quad \text{für jedes fixierte } N \in \mathbb{N}.$$

2. **Hinlänglichkeit:** Aus (1.4) folgt offensichtlich (1.1).

Die Formeln (1.4) liefern rekursive Berechnungsformeln für die Koeffizienten der APR:

$$g_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\varepsilon), \quad g_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (g(\varepsilon) - g_0), \quad g_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} (g(\varepsilon) - (g_0 + g_1\varepsilon)), \dots$$

Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} g_j \varepsilon^j$ kann divergent sein. Trotzdem kann man die N-te Partialsumme dieser Reihe als Näherungswert für $g(\varepsilon)$ nutzen. Zum Verständnis der Besonderheiten asymptotischer Potenzreihenentwicklungen im Vergleich zu konvergenten Potenzreihen betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 1.7 Berechnen Sie

$$g(\varepsilon) = \int_0^{\infty} e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t} \cos t \, dt \quad \varepsilon > 0. \quad (1.5)$$

Der Integrand ist stetig in $B = \{(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \in]0, 1], t \in [0, \infty[\}$. Das uneigentliche Parameterintegral (1.5) ist gleichmäßig konvergent bezüglich ε im Intervall $]0, 1]$. In der Tat, es gilt für $t \geq 0$

$$|e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t} \cos t| \leq e^{-(\frac{1}{\varepsilon})t} \leq e^{-t} \quad \text{mit} \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \, dt = 1 < \infty.$$

Also ist $g(\varepsilon)$ stetig in $]0, 1]$. Zur Berechnung des Integrals (1.5) verwenden wir die TAYLORSche Reihe der Funktion $f(t) = \cos t$.

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$

Bekanntlich konvergiert diese Reihe für $|t| < \infty$. Folglich konvergiert sie gleichmäßig bezüglich t in jedem endlichen Intervall $[0, A]$. Somit ist gliedweise Integration möglich. Man erhält aus (1.5) für jedes fixierte ε

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= \int_0^{\infty} e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \right] dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \right] dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^A e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} dt. \end{aligned}$$

Mittels mehrfacher partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}
g(\varepsilon) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\int_0^A e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t} dt - \frac{1}{2!} \int_0^A e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t} t^2 dt + \frac{1}{4!} \int_0^A e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t} t^4 dt - \dots \right] \\
&= \varepsilon - \varepsilon^3 + \varepsilon^5 - \varepsilon^7 + \dots
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Diese geometrische Reihe konvergiert für $|\varepsilon| < 1$, also für $0 < \varepsilon < 1$. Sie besitzt die Summe

$$g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}.$$

Die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihenentwicklung für $\cos t$ in einem beliebigen endlichen Intervall gewährleistet also den korrekten Übergang von (1.5) nach (1.6) für $0 < \varepsilon < 1$.

Aufgabe 1.1 Berechnen Sie das Integral (1.5) durch zweimalige partielle Integration direkt. (Die Beschränkung $\varepsilon \in]0, 1[$ entfällt hier.)

Beispiel 1.8 Geben Sie einen Näherungswert für das folgende Parameterintegral an

$$h(\varepsilon) = \int_0^\infty \frac{e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t}}{1+t} dt \quad \varepsilon > 0. \tag{1.7}$$

Das uneigentliche Parameterintegral (1.7) ist wieder gleichmäßig konvergent bezüglich ε im Intervall $]0, 1[$. Dies folgt aus

$$\left| \frac{e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t}}{1+t} \right| \leq e^{-(\frac{1}{\varepsilon})t} \leq e^{-t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Es gilt

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

Diese geometrische Reihe konvergiert nur für $|t| < 1$.

Mittels partieller Integration in (1.7) ergibt sich

$$h(\varepsilon) = \left[-\varepsilon \frac{e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t}}{1+t} \right]_0^\infty - \varepsilon \int_0^\infty \frac{e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t}}{(1+t)^2} dt = \varepsilon - \varepsilon \int_0^\infty \frac{e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t}}{(1+t)^2} dt$$

bzw. nach Fortsetzung der partiellen Integration

$$\begin{aligned}
h(\varepsilon) &= \varepsilon - 1! \varepsilon^2 + 2! \varepsilon^3 - 3! \varepsilon^4 + \dots + (-1)^{N-1} (N-1)! \varepsilon^N \\
&+ (-1)^N N! \varepsilon^N \int_0^\infty \frac{e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t}}{(1+t)^{N+1}} dt
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Fassen wir die ersten N Glieder

$$h_N(\varepsilon) = \sum_{l=1}^N (-1)^{l-1} (l-1)! \varepsilon^l \quad (1.9)$$

als N -te Partialsumme der entsprechenden Reihe auf, so ergibt sich nach dem Quotientenkriterium

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! \varepsilon^{N+1}}{(N-1)! \varepsilon^N} = \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \varepsilon = \infty \quad \text{für alle } \varepsilon \neq 0$$

d.h., die sich durch unbegrenzt fortgeführte partielle Integration ergebende Reihe ist divergent für alle Werte von $\varepsilon \neq 0$. Trotzdem kann $h_N(\varepsilon)$ für hinreichend kleine ε zur näherungsweise Berechnung von $h(\varepsilon)$ verwendet werden. Für den Abstand $|h(\varepsilon) - h_N(\varepsilon)|$ gewinnt man aus (1.8) und nochmaliger partieller Integration die Abschätzung

$$\begin{aligned} |h(\varepsilon) - h_N(\varepsilon)| &= N! \varepsilon^N \int_0^{\infty} \frac{e^{-(\frac{1}{\varepsilon})t}}{(1+t)^{N+1}} dt \\ &= N! \varepsilon^{N+1} - (N+1)! \varepsilon^{N+1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(\frac{1}{\varepsilon})t}}{(1+t)^{N+2}} dt < N! \varepsilon^{N+1}, \quad (1.10) \end{aligned}$$

da der Wert des uneigentlichen Integrals positiv ist. Aus (1.10) geht hervor, dass die Partialsumme (1.9) die Funktion $h(\varepsilon)$ mit einem Fehler approximiert, der zahlenmäßig kleiner als das erste nicht in die Partialsumme $h_N(\varepsilon)$ eingehende Glied der Reihe ist. Das Vorzeichen des Fehlers $h(\varepsilon) - h_N(\varepsilon)$ fällt mit dem Vorzeichen des $(N+1)$ -ten Gliedes der Reihe zusammen. Mit kleiner werdendem ε und festem N verbessert sich die Approximation, und es gilt schließlich

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |h(\varepsilon) - h_N(\varepsilon)| = 0.$$

Im Unterschied zu einer konvergenten Reihe, in der die Summenfunktion mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden kann, wenn nur die Anzahl der Glieder der Reihe über alle Grenzen wächst, ist die Genauigkeit der Annäherung der Partialsumme (1.9) an die Summenfunktion $h(\varepsilon)$ begrenzt und von ε abhängig. In der Tat, bei fixiertem ε fallen die Glieder $|(-1)^s s! \varepsilon^{s+1}|$ der Reihe (1.8) monoton, solange $s \leq [\frac{1}{\varepsilon}]$ ist. Für $s > [\frac{1}{\varepsilon}]$ wachsen sie. Also gibt es für jedes feste ε eine Zahl N für die beste Approximation von $h(\varepsilon)$ durch $h_N(\varepsilon)$. Man findet N aus der Bedingung $|\frac{a_{N+1}}{a_N}| < 1$ für streng monoton fallende Folgen.

$$\left| \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| = \frac{N! \varepsilon^{N+1}}{(N-1)! \varepsilon^N} = N \cdot \varepsilon < 1 \iff N < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wählt man $N = [\frac{1}{\varepsilon}] - 1$, so erhält man für fixiertes ε die beste Approximation von $h(\varepsilon)$ durch $h_N(\varepsilon)$. Sei $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Dann ist $N=9$. Für den exakten Wert von $h(\varepsilon)$ ergibt sich aus Integraltafeln $h(\frac{1}{10}) = 0.09156$. Es gilt

$$\begin{aligned} h_9\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 0.1 - 0.01 + 0.002 - 0.006 + 0.00024 - 0.00012 + 0.000072 - 0.0000504 \\ &+ 0.00004032 \approx 0.09158 \end{aligned}$$

und

$$\left| h\left(\frac{1}{10}\right) - h_9\left(\frac{1}{10}\right) \right| = \left| h\left(\frac{1}{10}\right) - 0.09158 \right| < \frac{9!}{10^{10}} = 0.000036288.$$

Trotz der Divergenz der Reihe ist die Genauigkeit der Approximation sehr hoch. Die formale Potenzreihenentwicklung $\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} (l-1)! \varepsilon^l$ ist asymptotisch im Sinne von Definition 1.4. In der Tat, die Gültigkeit von (1.1) folgt aus (1.10) für jedes fixierte $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\varepsilon^N} |h(\varepsilon) - h_N(\varepsilon)| < \frac{N! \cdot \varepsilon^{N+1}}{\varepsilon^N} = N! \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Die schärfere Bedingung (1.3) ist ebenfalls erfüllt, denn es gilt

$$-N! \cdot \varepsilon^{N+1} < h(\varepsilon) - h_N(\varepsilon) < N! \cdot \varepsilon^{N+1}.$$

Division dieser Ungleichung durch ε^{N+1} liefert (1.3).

1.3 Eigenschaften asymptotischer Potenzreihen

Es seien

$$a(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon^j \qquad b(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon^j,$$

APRn der Funktionen $a(\varepsilon)$ und $b(\varepsilon)$.

1^o Linearkombinationen APR: Für beliebige Konstanten α, β gilt

$$\alpha a(\varepsilon) + \beta b(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha a_j + \beta b_j) \varepsilon^j,$$

d.h., APR dürfen gliedweise addiert und mit Konstanten multipliziert werden.

2^o Multiplikation APR:

$$\begin{aligned} a(\varepsilon) b(\varepsilon) &\sim \sum_{j=0}^{\infty} (a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + \dots + a_j b_0) \varepsilon^j \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) \varepsilon + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \varepsilon^2 + \dots, \end{aligned}$$

d.h., APR dürfen gliedweise multipliziert werden.

3^o Division APR: Die Division APR wird auf eine Multiplikation zurückgeführt. Setzt man $b_0 \neq 0$ voraus, so ergibt sich für den Quotienten

$$c(\varepsilon) = \frac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)} \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon^j,$$

wobei sich die unbestimmten Koeffizienten c_j schrittweise aus

$$a_j = b_0 c_j + b_1 c_{j-1} + \dots + b_j c_0 \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

berechnen. Für die ersten Glieder erhält man

$$\frac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)} \sim \frac{a_0}{b_0} + \left(\frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \right) \varepsilon + \left(\frac{a_2}{b_0} - \frac{a_0 b_2 + a_1 b_1}{b_0^2} - \frac{b_1^2 a_0}{b_0^3} \right) \varepsilon^2 + \dots$$

4⁰ Funktion einer APR: Sei $u(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k$ für $\lambda \in [c, d]$ eine konvergente Potenzreihe und

$$a(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon^j \quad \text{für } \varepsilon \in [a, b].$$

Dann besitzt $u(\lambda) = u(a(\varepsilon))$ für alle $\varepsilon \in [a, b]$, für die $\lambda = a(\varepsilon) \in [c, d]$ gilt, eine asymptotische Entwicklung der Form

$$u(a(\varepsilon)) \sim \sum_{k=0}^{\infty} u_k \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon^j \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon^k,$$

wobei sich die Koeffizienten c_k formal wie beim Rechnen mit konvergenten Reihen durch Koeffizientenvergleich ergeben.

5⁰ Differentiation APR: Ohne zusätzliche Voraussetzungen dürfen APR nicht differenziert werden. Sei

- (i) $a(\varepsilon)$ differenzierbar in $[a, b]$,
- (ii) $a'(\varepsilon)$ stetig in $[a, b]$,
- (iii) für $a'(\varepsilon)$ existiere eine APR.

Dann folgt aus $a(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon^j$ für jedes abgeschlossene Teilintervall $[a_1, b_1] \subset [a, b]$

$$a'(\varepsilon) \sim \sum_{j=1}^{\infty} j a_j \varepsilon^{j-1}.$$

6⁰ Integration APR: Sei $a(\varepsilon)$ stetig in $[a, b]$. Aus $a(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon^j$ folgt dann

$$\int_0^{\varepsilon} a(\tau) d\tau \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j \varepsilon^{j+1}}{j+1}.$$

Beispiel 1.9 (Eigenschaften APR)

(1) *Beispiel zu 4⁰: Wir betrachten das für die asymptotische Lösung linearer Differentialgleichungen wichtige Beispiel*

$$u(\lambda) = e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{mit } \lambda = a(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon^j.$$

Dann ist nach Eigenschaft 4⁰

$$\begin{aligned} e^{a(\varepsilon)} &\sim e^{a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varepsilon^j} \sim e^{a_0} \cdot e^{\sum_{j=1}^{\infty} a_j \varepsilon^j} \sim e^{a_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \varepsilon^j \right)^k}{k!} \\ &= e^{a_0} \left(\frac{[a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3 + \dots]^0}{0!} + \frac{[a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3 + \dots]^1}{1!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3 + \dots]^2}{2!} + \dots \right) = e^{a_0} \left(1 + a_1 \varepsilon + \frac{1}{2} (a_1^2 + 2a_2) \varepsilon^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

(2) *Beispiel zu 5⁰: Die Funktion $g(\varepsilon) = e^{(-\frac{1}{\varepsilon})} \sin e^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ besitzt eine asymptotische Potenzreihenentwicklung der Form*

$$g(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} g_j \varepsilon^j$$

mit den Koeffizienten, gemäss (1.4)

$$g_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^j} e^{(-\frac{1}{\varepsilon})} \sin e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{z \rightarrow \infty} z^j e^{-z} \sin e^z = 0, \quad j \geq 0,$$

d.h., eine asymptotische Entwicklung, bei der alle Koeffizienten der Reihe gleich Null sind. Die Bedingung (1.1) ist also erfüllt. Die Ableitung $g'(\varepsilon)$ besitzt dagegen keine asymptotische Entwicklung. In der Tat, es ist die Bedingung 5^o(ii) verletzt:

$$g'(\varepsilon) = \frac{\sin e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon^2 e^{\frac{1}{\varepsilon}}} - \frac{\cos e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon^2}.$$

Der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g'(\varepsilon)$ existiert nicht, da $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon^2}$ nicht existiert. Folglich lassen sich die Koeffizienten der formalen Potenzreihe von $g'(\varepsilon)$ nicht berechnen. Die Differentiationsregel 5⁰ ist also nicht anwendbar.

1.4 APR für Funktionen zweier Variabler

Wir verallgemeinern zunächst die Definition 1.4.

Definition 1.5 Eine Darstellung der Funktion $g(t, \varepsilon)$ mit $D(g) = [a, b] \times]0, 1]$ in der Form $\sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) \varepsilon^j$ heißt formale Potenzreihenentwicklung in ε mit von t abhängigen Koeffizienten.

Eine Potenzreihenentwicklung der Funktion $g(t, \varepsilon)$ heißt asymptotisch, wenn für jedes fixierte $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \left(g(t, \varepsilon) - \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j \right) = 0 \quad \text{für jedes fixierte } t \in [a, b]. \quad (1.11)$$

Symbolisch schreibt man

$$g(t, \varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) \varepsilon^j \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{für alle } t \in [a, b]. \quad (1.12)$$

Falls die Konvergenz in (1.11) gleichmässig bezüglich t für $t \in [a, b]$ ist, so sagt man, es liegt eine gleichmässige asymptotische Entwicklung bezüglich t für $t \in [a, b]$ vor.

Gleichmäßige Konvergenz bedeutet: Für jedes $\delta > 0$ existiert eine Zahl $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$ (unabhängig von t), so dass für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ die Beziehung

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^N} \left(g(t, \varepsilon) - \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j \right) \right| < \delta \quad \text{gleichzeitig für alle } t \in [a, b]$$

erfüllt ist.

Die Bedingung (1.3) schreiben wir in folgender Form: Für jedes fixierte N existiert eine von ε unabhängige Zahl k_N , so dass gilt:

$$\left| g(t, \varepsilon) - \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j \right| \leq k_N \varepsilon^{N+1} \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.13)$$

Die Aussage von Theorem 1.1 lässt sich übertragen. Die Berechnungsformeln für die Koeffizientenfunktionen der Reihenentwicklungen lauten analog zu (1.4):

$$g_0(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t, \varepsilon)$$

$$g_j(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^j} \left(g(t, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{j-1} g_i(t) \varepsilon^i \right) \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.14)$$

Theorem 1.2 Sei $g(t, \varepsilon)$ in $D(g)$ beschränkt und besitze eine asymptotische Potenzreihenentwicklung der Form (1.12) mit in $[a, b]$ beschränkten Koeffizienten $g_j(t)$. Dann ist die asymptotische Potenzreihenentwicklung gleichmäßig in $[a, b]$ gdw die Funktion $r_{N+1}(t, \varepsilon)$, definiert durch die Beziehung

$$g(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j + r_{N+1}(t, \varepsilon) \varepsilon^{N+1} \quad (1.15)$$

für alle fixierten N in $[a, b] \times]0, 1]$ beschränkt ist.

Beweis:

1. **Notwendigkeit:** Wenn die Potenzreihenentwicklung (1.12) gleichmäßig für $t \in [a, b]$ ist, so existiert für alle $\delta > 0$ eine nicht von t abhängige Zahl $\rho_N(\delta) > 0$, derart, dass in $[a, b] \times]0, 1]$ die Beziehung

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^N} \left(g(t, \varepsilon) - \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j \right) \right| < \delta$$

gilt, sobald $|\varepsilon| < \rho_N(\delta)$ erfüllt ist. Ersetzt man in der letzten Ungleichung N durch $N+1$, so ergibt sich

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \left(g(t, \varepsilon) - \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j \right) \right| < \delta + |g_{N+1}(t)|.$$

Da $g_{N+1}(t)$ beschränkt ist, gilt $k_N = \delta + \max_{t \in [a, b]} |g_{N+1}(t)|$. Daraus folgt die Beschränktheit von $r_{N+1}(t, \varepsilon)$ in der Teilmenge von $[a, b] \times]0, 1]$, in welcher $|\varepsilon| < \rho_{N+1}(\delta)$ gilt. Für $|\varepsilon| > \rho_{N+1}(\delta)$ und $(t, \varepsilon) \in [a, b] \times]0, 1]$ folgt die Beschränktheit der Funktion

$$r_{N+1}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \left(g(t, \varepsilon) - \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j \right) \quad (1.16)$$

aus der Beschränktheit der Funktionen $g(t, \varepsilon)$ und $g_j(t)$ ($j = 0, \dots, N$).

2. **Hinlänglichkeit:** Wenn $r_{N+1}(t, \varepsilon)$ definiert durch Formel (1.16) beschränkt ist, so gilt auch

$$\frac{1}{\varepsilon^N} \left(g(t, \varepsilon) - \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j \right) = r_{N+1}(t, \varepsilon) \varepsilon.$$

Offensichtlich konvergiert der letzte Ausdruck gleichmäßig in $[a, b]$ gegen Null, falls $\varepsilon \rightarrow 0$.

Definition 1.6 Eine Funktion $h(t)$ heißt im Punkt t_0 **analytisch** (im Sinne von Funktionen reeller Variabler), wenn $h(t)$ für alle t mit $|t - t_0| < r$ ($r > 0$) als Summe einer Potenzreihe darstellbar ist:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(t - t_0)^k.$$

Eigenschaften analytischer Funktionen

- 1⁰ Jede in einem Punkt t_0 **analytische Funktion** ist auch in einer Umgebung von t_0 noch **analytisch**, denn ist $\sum_{k=0}^{\infty} h_k(t - t_0)^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r \neq 0$, so lässt sich die durch diese Reihe gegebene Funktion $h(t)$ auch in jedem anderem Punkt t_1 im Inneren des Konvergenzintervalls entwickeln, d.h. es gilt

$$h(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{h}_l(t - t_1)^k$$

mit dem Konvergenzradius $r_1 = r - |t_1 - t_0|$.

- 2⁰ Summe, Differenz und Produkt **analytischer Funktionen** sind wieder **analytische Funktionen**. Ist $h(t)$ in t_0 **analytisch** und $h(t_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{1}{h(t)}$ in t_0 **analytisch**.
- 3⁰ Ist $h(t)$ in t_0 **analytisch**, so ist $h(t)$ in einer Umgebung von t_0 **beliebig oft differenzierbar**.

Theorem 1.3 Wenn $g(t, \varepsilon)$ analytisch bezüglich beider Variabler in $[a, b] \times]0, 1]$ ist und eine gleichmäßige asymptotische Entwicklung der Gestalt (1.12) besitzt, so sind alle $g_j(t)$ analytisch in $[a, b]$ und es gilt gleichmäßig auf einem beliebigen kompakten Teilintervall von $[a, b]$

$$\frac{\partial g(t, \varepsilon)}{\partial t} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{dg_j(t)}{dt} \varepsilon^j. \quad (1.17)$$

Beweis:

1. Nach der Definition einer gleichmäßigen asymptotischen Reihe gilt

$$g_0(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t, \varepsilon)$$

gleichmäßig bezüglich t für $t \in [a, b]$. Dann ist wegen der Abgeschlossenheit und Beschränktheit von $[a, b]$ die Funktion $g_0(t)$ analytisch in $[a, b]$. Wir verwenden nun die Methode der vollständigen Induktion: Es seien $g_0(t), \dots, g_{N-1}(t)$ analytisch in $[a, b]$. Nach der Berechnungsformel für die Koeffizienten der Reihe ist

$$g_N(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \left[g(t, \varepsilon) - \sum_{j=0}^{N-1} g_j(t) \varepsilon^j \right].$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz in $[a, b]$ ist auch $g_N(t)$ analytisch in $[a, b]$.

2. Wie soeben gezeigt, sind die Koeffizienten $g_j(t)$ ($j = 0, \dots, N$) analytisch in $[a, b]$ und folglich beschränkt in $[a, b]$. Da $g(t, \varepsilon)$ analytisch ist und für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen $g_0(t)$ konvergiert, ist $g(t, \varepsilon)$ beschränkt in $[a, b] \times]0, 1]$. Folglich sind die Voraussetzungen von Theorem 1.2 erfüllt, d.h., es gilt

$$|r_{N+1}(t, \varepsilon)| = \left| \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \left(g(t, \varepsilon) - \sum_{j=0}^N g_j(t, \varepsilon) \right) \right| \leq M_N \quad \text{in } [a, b] \times]0, 1].$$

Wir betrachten nun ein beliebiges kompaktes Teilintervall $[a_1, b_1]$ von $[a, b]$. Sei $d = \min\{|b - b_1|, |a - a_1|\}$ und $h > 0$ eine Zahl mit $h \leq d$. Für $t \in [a_1, b_1]$ ist dann stets $t + h \in [a, b]$. Nach dem Satz von LAGRANGE gilt für $t \in [a_1, b_1]$

$$\left| \frac{\partial r_{N+1}(t + \theta h, \varepsilon)}{\partial t} \right| = \left| \frac{r_{N+1}(t + h, \varepsilon) - r_{N+1}(t, \varepsilon)}{h} \right| \leq \frac{2M_N}{h} \quad 0 < \theta < 1,$$

wobei die Ableitung wegen der Analytizität von $g(t, \varepsilon)$ und $g_j(t)$ ($j = 0, \dots, N$) existiert. Aus diesem Grund sind auch $\frac{\partial g(t, \varepsilon)}{\partial t}$ und $\frac{dg_j(t)}{dt}$ ($j = 0, \dots, N$) wenigstens in $[a_1, b_1] \times]0, 1]$ bzw. $[a_1, b_1]$ beschränkt. Somit sind für die Ableitungen die Voraussetzungen von Theorem 1.2 erfüllt, woraus die gleichmäßige Konvergenz in $[a_1, b_1]$ der asymptotischen Entwicklung (1.17) folgt.

Aufgabe 1.2 Sei $g(t, \varepsilon) = e^{-(\frac{1}{\varepsilon})t}$, $D(g) = [0, 1] \times]0, 1]$. Zeigen Sie, dass $g(t, \varepsilon)$ eine asymptotische Potenzreihenentwicklung in ε besitzt, die nicht gleichmäßig bezüglich $t \in [0, 1]$ ist. Zeigen Sie, dass nicht alle Koeffizienten $g_j(t)$ analytisch sind.

Aus der Existenz einer gleichmäßigen konvergenten asymptotischen Entwicklung bezüglich t mit analytischen Koeffizienten folgt i.a. nicht, dass $g(t, \varepsilon)$ analytisch bezüglich t ist.

Beispiel 1.10 Die Funktion $g(t, \varepsilon) = |t| e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t}$ mit $D(g) = [-1, 1] \times]0, 1]$ besitzt eine gleichmäßige asymptotische Entwicklung bezüglich t , wobei alle Koeffizienten gleich Null, also analytisch sind. Die Funktion selbst ist aber nicht analytisch bezüglich t , da die Funktion $f(t) = |t|$ in $t=0$ nicht differenzierbar ist.

Eine analytische Funktion $g(t, \varepsilon)$, die eine asymptotische Potenzreihenentwicklung in ε besitzt, kann in eine konvergente Potenzreihe in t mit dem Mittelpunkt in t_0 entwickelt werden, falls das Intervall $[a, b]$ eine Umgebung $U_r(t_0) = \{t : |t - t_0| < r\}$ des Punktes t_0

enthält. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir o.B.d.A. an, dass $0 \in [a, b]$ gilt und setzen $t_0 = 0$. Sei $g(t, \varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) \varepsilon^j$ und

$$g(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(\varepsilon) t^s \quad |t| < r, \quad \varepsilon \in]0, 1]. \quad (1.18)$$

Falls die Voraussetzungen von Theorem 1.3 für die Funktion $g(t, \varepsilon)$ erfüllt sind, so besitzen die Koeffizientenfunktionen aus (1.12) eine konvergente Potenzreihenentwicklung

$$g_j(t) = \sum_{s=0}^{\infty} g_{js} t^s \quad \text{für } |t| < r. \quad (1.19)$$

Setzt man die Reihe (1.19) in die Reihe (1.12) ein

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) \varepsilon^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} g_{js} t^s \right) \varepsilon^j$$

und gruppiert formal um, so erhält man die Reihe

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_{js} \varepsilon^j \right) t^s. \quad (1.20)$$

Ein Vergleich von (1.18) und (1.20) wirft die Frage auf, ob die formale Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} g_{js} \varepsilon^j$ eine asymptotische Entwicklung der Funktionen $c_s(\varepsilon)$ aus (1.18) ist, d.h., ob gilt

$$c_s(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} g_{js} \varepsilon^j.$$

Theorem 1.4 *Es gelte*

- (i) $g(t, \varepsilon)$ sei analytisch bezüglich beider Variabler in $[a, b] \times]0, 1]$,
- (ii) $g(t, \varepsilon)$ besitze eine gleichmäßige asymptotische Entwicklung der Gestalt (1.12)
- (iii) $U_r(0) \subset [a, b]$.

Dann folgt

$$c_s(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} g_{js} \varepsilon^j \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.21)$$

wobei $c_s(\varepsilon)$ bzw. g_{js} die Koeffizienten in (1.18) bzw. (1.19) sind.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} g(t, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j + r_{N+1}(t, \varepsilon) \varepsilon^{N+1} \\ &= \sum_{j=0}^N \left(\sum_{s=0}^{\infty} g_{js} t^s \right) \varepsilon^j + r_{N+1}(t, \varepsilon) \varepsilon^{N+1} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^N g_{js} \varepsilon^j \right) t^s + r_{N+1}(t, \varepsilon) \varepsilon^{N+1}. \end{aligned}$$

Mittels Subtraktion von (1.18) aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^N g_{js} \varepsilon^j - c_s(\varepsilon) \right) t^s + r_{N+1}(t, \varepsilon) \varepsilon^{N+1} = 0. \quad (1.22)$$

Aus (i) folgt die Beschränktheit von $g(t, \varepsilon)$ in $[a, b] \times]0, 1]$. Wegen (ii) erhält man aus Theorem 1.3 die Beschränktheit der $g_j(t)$ in $[a, b]$. Somit ergibt sich aus Theorem 1.2 die Beschränktheit von $r_{N+1}(t, \varepsilon)$ in $[a, b] \times]0, 1]$. Division von (1.22) durch ε^N und anschließender Grenzübergang liefert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{j=0}^N g_{js} \varepsilon^j - c_s(\varepsilon) \right) \frac{1}{\varepsilon^N} \right] t^s + r_{N+1}(t, \varepsilon) \varepsilon \right) = 0.$$

Es gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_{N+1}(t, \varepsilon) \varepsilon = 0$ gleichmäßig bezüglich $t \in [a, b]$. Daraus folgt der gleichmäßige Grenzübergang bezüglich $t \in [a, b]$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{j=0}^N g_{js} \varepsilon^j - c_s(\varepsilon) \right) \frac{1}{\varepsilon^N} \right] t^s = 0. \quad (1.23)$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} h_s(\varepsilon) &= \left(\sum_{j=0}^N g_{js} \varepsilon^j - c_s(\varepsilon) \right) \frac{1}{\varepsilon^N} \quad \text{und} \\ h(t, \varepsilon) &= \sum_{s=0}^{\infty} h_s(\varepsilon) t^s \quad \text{für } \varepsilon \in]0, 1] \quad \text{und } |t| < r. \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen hat (1.23) die Form

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{\infty} h_s(\varepsilon) t^s = 0 \quad \text{gleichmäßig bezüglich } t \text{ für } |t| < r. \quad (1.24)$$

Zum Beweis der Behauptung von Theorem 1.4 ist zu zeigen, dass für die Funktion $c_s(\varepsilon)$ eine asymptotische Potenzreihenentwicklung gemäß Definition 1.4 vorliegt. In unseren Bezeichnungen ist folglich die Gültigkeit der Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_s(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{j=0}^N g_{js} \varepsilon^j - c_s(\varepsilon) \right) \frac{1}{\varepsilon^N} = 0 \quad \forall s \quad (1.25)$$

nachzuweisen. In (1.24) sind die Operationen der Summen- und Grenzwertbildung vertauschbar, d.h. es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{s=0}^{\infty} h_s(\varepsilon) t^s = \sum_{s=0}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_s(\varepsilon) t^s = 0 \quad \text{gleichmäßig bezüglich } t \text{ für } |t| < r. \quad (1.26)$$

Setzt man in (1.26) $t = 0$, so folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_0(\varepsilon) = 0.$$

Da eine Potenzreihe innerhalb des Konvergenzradius beliebig oft gliedweise differenziert werden kann, erhält man aus (1.26)

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_s(\varepsilon) \right) st^{s-1} = 0.$$

Setzt man wieder $t = 0$, so folgt,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_1(\varepsilon) = 0.$$

Die Fortsetzung dieses Prozesses liefert (1.25).

Die Umkehrung von Theorem 1.4 gilt nicht, d.h., wenn eine Funktion $g(t, \varepsilon)$ analytisch ist nach beiden Variablen in $[a, b] \times]0, 1]$ und wenn die Koeffizienten $c_s(\varepsilon)$ der konvergenten Reihe (1.18) eine asymptotische Darstellung der Form (1.21) besitzen, so gilt i.a. nicht, dass das Vertauschen der Summationen zu einer asymptotischen Reihe nach Potenzen in ε für die Funktionen $g(t, \varepsilon)$ führt.

1.5 Anwendungen auf DGL und algebraische Gleichungen

Beispiel 1.11 Wir betrachten nochmals Beispiel 1.6.

$$\ddot{x} + \varepsilon x = 0 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x} = 1 \quad (1.27)$$

mit der Lösung $x(t, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin(\sqrt{\varepsilon} t)$ des gestörten Problems und bestimmen eine asymptotische Näherungslösung $x_N(t, \varepsilon)$.

Entwicklung der Lösung nach der TAYLORSchen Formel an der Stelle $t_0 = 0$ liefert

$$x(t, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\sqrt{\varepsilon} t - \frac{(\sqrt{\varepsilon} t)^3}{3!} + \frac{(\sqrt{\varepsilon} t)^5}{5!} - \dots + (-1)^N \frac{(\sqrt{\varepsilon} t)^{2N+1}}{(2N+1)!} + R_{N+1}(t, \varepsilon) \right)$$

mit dem Restglied in der Form von LAGRANGE

$$R_{N+1}(t, \varepsilon) = \frac{\sin \left(\theta \sqrt{\varepsilon} t + (2N+3) \frac{\pi}{2} \right) (\sqrt{\varepsilon} t)^{2N+3}}{(2N+3)!} \quad 0 < \theta < 1.$$

Ordnet man nach Potenzen von ε , so ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= t + \varepsilon \left(\frac{-t^3}{3!} \right) + \varepsilon^2 \frac{t^5}{5!} + \dots + \varepsilon^N \frac{(-1)^N t^{2N+1}}{(2N+1)!} \\ &+ \frac{\sin \left(\theta \sqrt{\varepsilon} t + (2N+3) \frac{\pi}{2} \right) t^{2N+3}}{(2N+3)!} \varepsilon^{N+1} \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Wir setzen

$$r_{N+1}(t, \varepsilon) = \frac{\sin\left(\theta\sqrt{\varepsilon}t + (2N+3)\frac{\pi}{2}\right) t^{2N+3}}{(2N+3)!}.$$

Die Funktion $x(t, \varepsilon)$ ist beschränkt in $[0, 1] \times]0, 1]$ besitzt gemäß (1.28) eine asymptotische Potenzreihenentwicklung bezüglich t mit in $[0, 1]$ beschränkten Koeffizienten $g_j(t) = \frac{(-1)^N t^{2N+1}}{(2N+1)!}$. Da $r_{N+1}(t, \varepsilon)$ für alle fixierten $N \in \mathbb{N}$ in $[0, 1] \times]0, 1]$ beschränkt ist, liegt nach Theorem 1.4 eine gleichmäßige asymptotische Potenzreihenentwicklung bezüglich t in $[0, 1]$ vor.

Ist die exakte Lösung bekannt, so können die Koeffizienten in der asymptotischen Entwicklung auch mit Hilfe der Formeln (1.14) berechnet werden.

Wir gehen nun umgekehrt vor, indem wir die Lösung von (1.27) in Form einer Potenzreihenentwicklung in ε mit von t abhängigen Koeffizienten suchen:

$$x(t, \varepsilon) = g_0(t) + g_1(t)\varepsilon + g_2(t)\varepsilon^2 + \dots + g_N(t)\varepsilon^N + \dots$$

Zweimalige formale Differentiation nach t liefert

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \varepsilon) &= \dot{g}_0(t) + \dot{g}_1(t)\varepsilon + \dot{g}_2(t)\varepsilon^2 + \dots + \dot{g}_N(t)\varepsilon^N + \dots, \\ \ddot{x}(t, \varepsilon) &= \ddot{g}_0(t) + \ddot{g}_1(t)\varepsilon + \ddot{g}_2(t)\varepsilon^2 + \dots + \ddot{g}_N(t)\varepsilon^N + \dots \end{aligned}$$

Für die AB erhält man

$$\begin{aligned} x(0, \varepsilon) &= g_0(0) + g_1(0)\varepsilon + g_2(0)\varepsilon^2 + \dots + g_N(0)\varepsilon^N + \dots = 0, \\ \dot{x}(0, \varepsilon) &= \dot{g}_0(0) + \dot{g}_1(0)\varepsilon + \dot{g}_2(0)\varepsilon^2 + \dots + \dot{g}_N(0)\varepsilon^N + \dots = 1. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und Ordnen nach ε -Potenzen liefert zur Bestimmung der Funktionen $g_j(t)$ ($j = 0, \dots, N$) folgende AWP:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon^0 : & \ddot{g}_0(t) = 0 & g_0(0) = 0 \quad \dot{g}_0(0) = 1 \\ \varepsilon^1 : & \ddot{g}_1(t) + g_0(t) = 0 & g_1(0) = 0 \quad \dot{g}_1(0) = 0 \\ & \vdots & \\ \varepsilon^N : & \ddot{g}_N(t) + g_{N-1}(t) = 0 & g_N(0) = 0 \quad \dot{g}_N(0) = 0. \end{array}$$

Als Lösungen der AWP erhält man

$$\begin{array}{llll} \ddot{g}_0(t) = 0, & g_0(t) = c_1 t + c_2 & g_0(0) = c_2 = 0 & g_0(t) = t \\ & \dot{g}_0(t) = c_1 & \dot{g}_0(0) = c_1 = 1 & \\ \ddot{g}_1(t) = -g_0(t) = -t & g_1(t) = -\frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2 & g_1(0) = c_2 = 0 & g_1(t) = -\frac{t^3}{6} \\ & \dot{g}_1(t) = -\frac{t^2}{2} + c_1 & \dot{g}_1(0) = c_1 = 0. & \end{array}$$

Die allgemeine Form der Lösung lautet

$$\ddot{g}_N(t) = -g_{N-1}(t) = -\frac{(-1)^{N-1} t^{2N-1}}{(2N-1)!} \quad g_N(t) = \frac{(-1)^N t^{2N+1}}{(2N+1)!} + c_1 t + c_2$$

$$g_N(0) = c_2 = 0 \quad \dot{g}_N(t) = -\frac{(-1)^N t^{2N}}{(2N)!} + c_1 \quad \dot{g}_N(0) = c_1 = 0$$

$$g_N(t) = \frac{(-1)^N t^{2N+1}}{(2N+1)!}.$$

Es ergeben sich diesselben Koeffizienten wie oben. Die nach dem N -ten Glied abgebrochene Reihe $x_N(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j$ kann als asymptotische Näherungslösung von (1.27) aufgefasst werden. Das Problem (1.27) ist ein RGP in $I = [0, 1]$ im Sinne von Definition 1.2, denn es gilt

$$\begin{aligned} |x(t, \varepsilon) - y(t)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin(\sqrt{\varepsilon} t) - t \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\sqrt{\varepsilon} t + r_1(t, \varepsilon) \varepsilon - t) \right| \\ &= \left| \frac{\sin(\theta \sqrt{\varepsilon} t + \frac{3\pi}{2}) t^3}{3!} \right| \varepsilon < \frac{\varepsilon}{3!} < \delta. \end{aligned}$$

Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz bezüglich $t \in [0, 1]$. Für RGP lässt sich eine gleichmäßige asymptotische Entwicklung für $\varepsilon \rightarrow 0$ auf dem gesamten Intervall $t \in [0, 1]$ angeben.

Beispiel 1.12 Wir betrachten nochmals Beispiel 1.3

$$\varepsilon \dot{x} + x = 1 \quad x(0) = x_0 \neq 1 \quad (1.29)$$

mit der exakten Lösung $x(t, \varepsilon) = 1 + (x_0 - 1) e^{(-\frac{1}{\varepsilon})t}$ des gestörten Problems und bestimmen eine asymptotische Näherungslösung.

Wie schon im Beispiel 1.3 gezeigt wurde, lässt sich die gleichmäßige Konvergenz in einem t -Intervall $[0, A]$ in der Nähe des Nullpunktes nicht nachweisen. Das Problem ist also ein SGP. Im Vergleich zu RGP gibt es Unterschiede in der Behandlung. Die Entwicklung der Lösung nach der TAYLORSchen Formel für $t_0 = 0$ ist keine Potenzreihe in ε :

$$x(t, \varepsilon) = 1 + (x_0 - 1) \left[1 - \frac{1}{1!} \frac{t}{\varepsilon} + \frac{1}{2!} \frac{t^2}{\varepsilon^2} - \cdots + (-1)^N \frac{1}{N!} \frac{t^N}{\varepsilon^N} + R_{N+1}(t, \varepsilon) \right].$$

Wir suchen eine Lösung von (1.29) in Form einer asymptotischen Potenzreihe in ε

$$u_N(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j. \quad (1.30)$$

Nach Differentiation, Einsetzen in die DGL (1.29) und Koeffizientenvergleich bei gleichen ε -Potenzen erhält man $g_0(t) = 1$ und $g_j = -\dot{g}_{j-1}$ für $j = 1, \dots, N$, d.h. $g_j(t) = 0$ für $j = 1, \dots, N$ und alle $t \in [0, A]$. Es ergibt sich also $u_N(t, \varepsilon) = 1 \forall t \in [0, A]$. Somit fällt diese Lösung mit der Lösung des ungestörten Problems zusammen und liefert folglich eine asymptotische (gleichmäßig konvergente) Lösung beliebiger Ordnung $O(\varepsilon^N)$ mit Ausnahme einer Umgebung des Punktes $t = 0$, da die AB i.a. durch $u_N(t, \varepsilon) = 1$ nicht erfüllt ist.

Um eine für alle $t \in [0, A]$ gültige asymptotische Darstellung der exakten Lösung von (1.29) zu erhalten, überlagern wir die Lösung (1.30) mit einer Korrekturfunktion $v_N = v_N(t, \varepsilon)$, die folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Summe $u_N(t, \varepsilon) + v_N(t, \varepsilon)$ erfüllt die AB $x(0) = x_0$.
2. Im Gültigkeitsbereich von (1.30) ist v_N vernachlässigbar klein und nur in einer Umgebung von $t = 0$, der sogenannten **GS**, wird v_N wesentlich.

Derartige Funktionen bezeichnen wir im Weiteren als **Grenzschnittfunktionen (GSF)**. Zur Bestimmung der **GSF** des AWP(1.29) ermitteln wir zunächst die Fehlergleichung. Dazu wird $u_N(t, \varepsilon)$ in die DGL (1.29) eingesetzt und von der DGL

$$\varepsilon \dot{x}(t, \varepsilon) + x(t, \varepsilon) = 1$$

subtrahiert. Für die Differenz $x_N(t, \varepsilon) - u_N(t, \varepsilon) = v_N(t, \varepsilon)$ gewinnt man die Fehlergleichung

$$\varepsilon \dot{v}_N(t, \varepsilon) + v_N(t, \varepsilon) = 0 \quad \text{mit der AB} \quad v_N(0, \varepsilon) = x_N(0, \varepsilon) - u_N(0, \varepsilon) = x_0 - 1. \quad (1.31)$$

Ein wesentlicher Schritt bei der Konstruktion von **GSF** besteht in der Durchführung einer Variablenstreckung

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad t = \varepsilon \tau \quad (1.32)$$

in einer Umgebung des Punktes $t = 0$, in welchem die AB vorgegeben ist. Die Fehlergleichung (1.31) geht mit dieser Substitution wegen $\frac{dv_N}{dt} = \frac{d\hat{v}_N}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\hat{v}_N}{d\tau} \frac{1}{\varepsilon}$ in die DGL der **GSF** über

$$\frac{d\hat{v}_N(\tau)}{d\tau} + \hat{v}_N(\tau) = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{v}_N(0) = x_0 - 1. \quad (1.33)$$

Die **GSF** wird nun in der Form

$$\hat{v}_N(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N h_j(\tau) \varepsilon^j$$

angesetzt. Einsetzen in (1.33) liefert folgende AWP zur Berechnung der $h_j(\tau)$

$$\frac{dh_0}{d\tau} + h_0 = 0 \quad h_0(0) = x_0 - 1 \quad \text{mit der Lösung} \quad h_0(\tau) = (x_0 - 1) e^{-\tau}$$

Für $j = 1, \dots, N$ ergeben sich AWP der Form

$$\frac{dh_j}{d\tau} + h_j = 0 \quad h_j(0) = 0,$$

die bekanntlich nur die triviale Lösung $h_j(\tau) \equiv 0$ besitzen. Folglich ist $\hat{v}_N(\tau) = (x_0 - 1) e^{-\tau}$ oder nach Rücksubstitution $v_N(t, \varepsilon) = (x_0 - 1) e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$. Dann ist $u_0(x, \varepsilon) + v_0(x, \varepsilon)$ die Lösung des Ausgangssystems (1.29), welche für dieses einfache Beispiel mit der exakten Lösung $x(t, \varepsilon)$ zusammenfällt.

Die AWP in Beispiel 1.11 bzw. 1.12 sind analytisch lösbar. Die hier angegebenen Überlegungen dienen nur der Illustration der Theorie. Bedeutung gewinnen asymptotische Lösungsdarstellungen für lineare DGL mit variablen Koeffizienten für nichtlineare Gleichungen und für partielle Differentialgleichungen.

Beispiel 1.13 Wir berechnen eine Näherungslösung der nichtlinearen algebraischen Gleichung

$$t = 1 + \varepsilon t^3 \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.34)$$

Ist $\varepsilon = 0$, so erhält man die Lösung $t = 1$. Für $0 < \varepsilon \ll 1$ setzen wir

$$t = 1 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots + a_N \varepsilon^N + \dots. \quad (1.35)$$

Einsetzen in (1.34) liefert

$$\begin{aligned} a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots + a_N \varepsilon^N &= \varepsilon (1 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots + a_N \varepsilon^N)^3 \\ a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3 + \dots &= \varepsilon (1 + 3a_1 \varepsilon + 3(a_1^2 + a_2) \varepsilon^2 + \dots). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei gleichen ε -Potenzen ergibt

$$(a_1 - 1) \varepsilon + (a_2 - 3a_1) \varepsilon^2 + (a_3 - 3a_1^2 - 3a_2) \varepsilon^3 + \dots = 0.$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} a_1 - 1 &= 0 & a_1 &= 1 \\ a_2 - 3a_1 &= 0 & a_2 &= 3 \\ a_3 - 3a_1^2 - 3a_2 &= 0 & a_3 &= 12 \\ & \vdots & & \end{aligned}$$

Somit ergibt sich (1.35) zu

$$t = 1 + \varepsilon + 3\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3 + \dots. \quad (1.36)$$

Diese Potenzreihe konvergiert nur für $\varepsilon = 0$. Es liegt jedoch eine asymptotische Potenzreihenentwicklung im Sinne von Definition 1.4 vor, denn für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{\varepsilon^N} \left(t - \sum_{j=0}^N a_j \varepsilon^j \right) = \frac{1}{\varepsilon^N} (a_{N+1} \varepsilon^{N+1} + a_{N+2} \varepsilon^{N+2} + \dots) \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ähnlich wie in Beispiel 1.8 kann (1.36) bei fixiertem ε zur Berechnung von Näherungswerten für die Lösung verwendet werden.

Beispiel 1.14 Der VAN DER POL-OSZILLATOR beschreibt z.B. die Eigenschwingungen in einem Triodenschaltkreis mit einer kubischen Stromstärke-Spannungscharakteristik. Der Prozess wird durch die nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} + x = \varepsilon (1 - x^2) \dot{x} \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (1.37)$$

beschrieben, wobei der Parameter ε eine kleine Selbstinduktivität bezeichnet.

Ist $\varepsilon = 0$, so erhält man eine **homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**:

$$\ddot{y} + y = 0 \quad (1.38)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t. \quad (1.39)$$

Für $0 < \varepsilon \ll 1$ setzen wir

$$x(t, \varepsilon) = g_0(t) + g_1(t) \varepsilon + g_2(t) \varepsilon^2 + \dots \quad (1.40)$$

Einsetzen von (1.40) in (1.37) liefert

$$\begin{aligned} & \ddot{g}_0 + g_0 + \varepsilon(\ddot{g}_1 + g_1) + \varepsilon^2(\ddot{g}_2 + g_2) \\ &= \varepsilon[1 - (g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon g_2 + \dots)^2] [\dot{g}_0 + \varepsilon \dot{g}_1 + \varepsilon^2 \dot{g}_2 + \dots] \\ &= \varepsilon(1 - g_0^2) \dot{g}_0 + \varepsilon^2 [(1 - g_0^2) \dot{g}_1 - 2g_0 g_1 \dot{g}_0] + \dots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei gleichen ε -Potenzen ergibt das rekursive System

$$\begin{aligned} \text{bei } \varepsilon^0 : & \quad \ddot{g}_0 + g_0 = 0 \\ \text{bei } \varepsilon^1 : & \quad \ddot{g}_1 + g_1 = (1 - g_0^2) \dot{g}_0 \\ \text{bei } \varepsilon^2 : & \quad \ddot{g}_2 + g_2 = (1 - g_0^2) \dot{g}_1 - 2g_0 g_1 \dot{g}_0 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Man erhält für die Berechnung der $g_i(t)$ mit $i > 0$ **inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**, wobei in die rechten Seiten die vorher schon berechneten Größen eingehen. Die DGL bei ε^0 ist von der Form (1.38) und besitzt die allgemeine Lösung (1.39). Inhomogene DGL 2. Ordnung lassen sich nach Berechnungen ihrer rechten Seiten mittels Konstantenvariation lösen. Somit erhält man eine asymptotische Lösungsdarstellung von (1.37) durch ausschließlich lineare Operationen. Für $\varepsilon = 0$ beschreibt (1.38) einen ungedämpften Schwingungsvorgang. Mit wachsendem ε tritt eine Verzerrung der ungedämpften Schwingung ein, wobei sich auch die Periode vergrößert. Für $\varepsilon \gg 1$ hat (1.37) ebenfalls technische Anwendungen, z.B. werden die Schwingungen beim Flattern von Flugzeugtragflügeln und Autorädern beschrieben. Die DGL (1.37) besitzt für beliebige $\varepsilon > 0$ eine periodische Lösung.

1.6 Regulär und singular gestörte Probleme aus den Anwendungen

Eine von einem kleinen Parameter abhängige DGL, die für $\varepsilon \rightarrow 0$ ihre Struktur ändert, bezeichnen wir als asymptotisches Modell. Einen realen Prozess nennen wir asymptotisch, wenn er bei der mathematischen Formulierung auf ein asymptotisches Modell führt. Wichtige Strukturänderungen für $\varepsilon \rightarrow 0$ sind

- die Erniedrigung der Ordnung der DGL
- die Änderung des Typs (z.B. elliptisch \rightarrow parabolisch, partielle DGL \rightarrow gewöhnliche DGL, nichtlineare DGL \rightarrow lineare DGL).

1. Umströmung eines Körpers

Wird ein Körper von einem Medium mit geringer Zähigkeit (Luft, Wasser) umströmt, so lässt sich dieser Vorgang durch die NAVIER–STOKES DGL beschreiben. Setzt man im ebenen Fall für die Geschwindigkeitskomponenten

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

mit einer Stromfunktion $\varphi = \varphi(x, y)$, so gilt

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \varphi.$$

Dabei ist ν die Zähigkeit des Strömungsmediums und Δ der LAPLACE–Operator. Für kleine ν (geringe Zähigkeit) erhält man eine partielle DGL 4. Ordnung, für $\nu = 0$ erniedrigt sich die Ordnung auf 3. Als RB dienen hier die sogenannten **Haftbedingungen**, d.h. unmittelbar an der Berandung des Körpers müssen die Geschwindigkeitskomponenten u und v verschwinden. Außerdem streben u und v bei unbegrenzt wachsender Entfernung vom Körper gegen die entsprechenden Komponenten der Anströmung. Es zeigt sich, dass man mit den Lösungen der reduzierten DGL ($\nu = 0$) die **Haftbedingungen** nicht erfüllen kann und demzufolge die völlige Vernachlässigung der Zähigkeit für die mathematische Beschreibung realer Strömungen ungeeignet ist. PRANDTL wies nach, dass es für kleine Zähigkeiten genügt, diese nur in einer dünnen, den Körper unmittelbar umgebenden Schicht, der sogenannten GS, zu berücksichtigen, während außerhalb der GS die Zähigkeit vernachlässigt werden kann. Diese Situation ist typisch für ein SGP.

2. Elliptische Probleme mit kleinem Parameter

Wir betrachten folgendes DIRICHLET–Problem für die Funktion $\varphi(x, y, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varepsilon \varphi_{yy} - \varphi_y &= 0 & Q &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}, \\ \varphi(0, y) &= a(y), \\ \varphi(x, 0) &= b(x), \\ \varphi(1, y) &= c(y), \\ \varphi(x, 1) &= d(x). \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ ist dieses Problem korrekt gestellt und besitzt eine eindeutige Lösung. Ist $\varepsilon = 0$, so geht das Ausgangsproblem über in die parabolische Gleichung

$$\varphi_{xx} - \varphi_y = 0,$$

welche Wärmeleitungs– und Diffusionsprozesse beschreibt. Die Lösung der letzten Gleichung kann i.a. nicht alle RB des DIRICHLET–Problems erfüllen. Aus der Theorie der parabolischen DGL folgt, dass die Bedingung $\varphi(x, 1) = d(x)$ wegzulassen ist. Die Lösung des parabolischen Problems ist als Näherungslösung des Ausgangsproblems in der Nähe der Geraden $y = 1$ nicht brauchbar. Sie liefert jedoch außerhalb einer Umgebung dieser Geraden eine gute Approximation der Lösung des DIRICHLET–Problems. Es liegt ein SGP vor.

Die singuläre Natur einer Aufgabe hängt nicht nur von der Typänderung der Gleichung ab, sondern auch vom betrachteten Gebiet. Es gibt Beispiele, in denen eine Typänderung der Gleichung nicht zu einem SGP führt.

3. Strömung in einem Flachwasserkanal der Tiefe h

Das Geschwindigkeitspotenzial einer ebenen Potenzialströmung genügt der ebenen LAPLACEgleichung

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Wir wählen die Kanalachse als x-Achse und $y \in [0, h]$. Ist bei einem Anwendungsproblem die Abmessung einer Dimension im Verhältnis zu den übrigen klein, so kann dieses Problem durch Entdimensionierung der entsprechenden Koordinate auf ein asymptotisches Modell zurückgeführt werden. In unserem Beispiel führen wir durch

$$\eta = \frac{y}{h}, \quad h \ll 1$$

eine neue Variable ein, dann geht $\Delta\varphi = 0$ über in

$$h^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \eta^2} = 0.$$

Für $h = 0$ liegt eine Typänderung von einer partiellen DGL in eine gewöhnliche DGL vor.

4. Chemische Reaktionsänderung

Fließt einem isothermen Strömungsreaktor kontinuierlich Reaktionsmasse zu und verlässt ein entsprechendes Produkt den Reaktor, so berechnet sich die Konzentrationsverteilung $c(x,y,z,t)$ im Reaktor aus der Stoffbilanzgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\operatorname{div}(\mathbf{w} c) + \operatorname{div}(D \operatorname{grad} c) + r(c).$$

Dabei bezeichnet \mathbf{w} die Strömungsgeschwindigkeit, $r(c)$ das Reaktionsglied und D den Diffusionskoeffizienten. Beschränken wir uns zur Vereinfachung auf einen stationären Reaktorbetrieb, d.h. $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$, und vernachlässige die Konzentrationsänderung in radialer Richtung, d.h. $c=c(x)$, so reduziert sich die Stoffbilanzgleichung auf

$$D \frac{d^2 c}{dx^2} - w \frac{dc}{dx} - r(c) = 0 \quad x \in [0, L],$$

wobei w die Geschwindigkeit längs der Reaktorachse und L die Reaktorlänge bezeichnet. Mit den dimensionslosen Variablen

$$z = \frac{x}{L} \quad \text{und} \quad C = \frac{c}{c_0},$$

wobei c_0 die Anfangskonzentration bezeichnet, ergibt sich

$$\frac{1}{Pe} \frac{d^2 C}{dz^2} - \frac{dC}{dz} - R(C) = 0, \quad (1.41)$$

mit der PECELET-Zahl $Pe = \frac{wL}{D}$. Die zugeordneten RB lauten

$$C(0) - \frac{1}{Pe} \frac{dC(0)}{dz} = 1 \quad \frac{dC(1)}{dz} = 0.$$

Bei geringer Axialvermischung ist $Pe \gg 1$, während bei großer Axialvermischung $Pe \ll 1$ gilt. Sei $Pe \gg 1$. Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{Pe} \ll 1$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$, d.h. bei geringer Axialvermischung erniedrigt sich die Ordnung der DGL (1.41).

Sei $Pe \ll 1$. Multiplikation von (1.41) mit Pe liefert

$$\frac{d^2 C}{dz^2} - Pe \frac{dC}{dz} - Pe R(C) = 0.$$

Für $Pe \rightarrow 0$, d.h. bei großer Axialvermischung liegt eine Typänderung von einer nichtlinearen in eine lineare DGL vor.

5. Modellerweiterung

Häufig reichen mathematische Modelle nicht aus, um bestimmte Effekte realer Prozesse zu erfassen. Diese Effekte sind auf Einflussgrößen zurückzuführen, die bei der mathematischen Modellierung des Prozesses vernachlässigt werden. Zur Berücksichtigung dieser Einflussgrößen muss das mathematische Modell erweitert werden. Modellerweiterungen dieser Art führen in vielen Fällen auf asymptotische Modelle. Gesucht ist ein mathematisches Modell des Einschaltvorgangs in einem Stromkreis mit einem Widerstand R und einer Kapazität C .

Nach den KIRCHHOFFSchen Gesetzen gilt

$$\dot{U}(t) + \frac{1}{RC} U(t) = \frac{1}{RC} U_0 \quad I(t) = C \dot{U}(t).$$

Zum Zeitpunkt $t=0$ des Einschaltens sei der Stromkreis stromlos, d.h. es gelten die AB

$$U(0) = 0 \quad \dot{U}(0) = \frac{1}{C} I(0) = 0.$$

Da bezüglich U eine DGL 1. Ordnung vorliegt, kann nur die erste AB berücksichtigt werden. Man erhält

$$U(t) = U_0 \left(1 - e^{(-\frac{1}{RC})t}\right) \quad I(t) = \frac{U_0}{R} e^{(-\frac{1}{RC})t}.$$

Es ist $U(0) = 0$, während wegen $I(0) = \frac{U_0}{R}$ die zweite AB nicht erfüllt wird. Der Effekt, dass am Anfang kein Strom fließt, kann also mit diesem mathematischen Modell nicht berücksichtigt werden, d.h. zur Beschreibung des realen Prozesses ist eine Modellerweiterung erforderlich.

Jeder elektrische Stromkreis kann als Spule mit einer sehr geringen Induktivität L aufgefasst werden. Aus dem KIRCHHOFFSchen Gesetzen erhält man unter Berücksichtigung dieser Einflussgröße L

$$\frac{L}{R} \ddot{U}(t) + \dot{U}(t) + \frac{1}{RC} U(t) = \frac{1}{RC} U_0 \quad \frac{L}{R} \ll 1,$$

womit auch die zweite AB berücksichtigt werden kann. Diese DGL ist ein asymptotisches Modell vom Typ der Erniedrigung der Ordnung.

Es ist i.a. schwierig zu entscheiden, ob ein gegebenes Problem ein RGP oder ein SGP ist. Dies hängt vom betrachteten Gebiet, von der Größe des oder der Parameter, von den Koeffizienten der Gleichungen, von den AB bzw. RB und von der Art der Gleichung selbst ab. Geht aus dem praktischen Hintergrund hervor, dass die Lösung Grenzschichtverhalten zeigt, wie bei der Umströmung eines Körpers, der chemischen Reaktionsänderung mit geringer Axialvermischung bzw. der Modellerweiterung, so liegt ein SGP vor. Grob gesprochen, das Problem der Lösung einer von einem kleinen Parameter ε abhängigen DGL mit zusätzlichen Bedingungen, die die Eindeutigkeit der Lösung gewährleisten, ist ein SGP, wenn sich die Ordnung der DGL bei $\varepsilon = 0$ erniedrigt.

1.7 Parameterabhängige Normalsysteme

Definition 1.7 Ein System von DGL 1.Ordnung der Gestalt

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (1.42)$$

wobei \mathbf{x} und \mathbf{f} m -dimensionale Vektorfunktionen sind und ε eine reelle Zahl ist, nennen wir parameterabhängiges Normalsystem. In ausführlicher Form schreibt man

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_m, \varepsilon) \\ \vdots \\ f_m(t, x_1, \dots, x_m, \varepsilon) \end{pmatrix} \quad \dot{x}_l = f_l(t, x_1, \dots, x_m, \varepsilon) \quad (l = 1, \dots, m) \quad (1.43)$$

Mit $\|\cdot\|$ bezeichnen wir im Weiteren die Euklidische Norm eines Vektors. Bekanntlich gilt

Theorem 1.5 Es gelte für das System (1.42):

(i) $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ sei definiert und stetig im abgeschlossenen Gebiet

$$|t - t_0| \leq a \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b \quad |\varepsilon| \leq d, \quad (1.44)$$

d.h., $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)\| \leq M = \text{const.}$ in diesem Gebiet.

(ii) $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ genügt im Gebiet (1.44) einer LIPSCHITZ-Bedingung bezüglich \mathbf{x}

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1, \varepsilon) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2, \varepsilon)\| \leq L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|,$$

wobei die Konstante $L > 0$ nicht von t, \mathbf{x} und ε abhängt.

Dann existiert für $|t - t_0| \leq h = \min(a, \frac{b}{M})$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \varepsilon)$ des Systems (1.42), welche der Bedingung $\mathbf{x}(t_0, \varepsilon) = \mathbf{x}_0$ genügt. Diese Lösung ist stetig nach t und ε für $|t - t_0| \leq h$ und $|\varepsilon| \leq d$.

Bemerkung 1.1 (Modifikationen)

(1) Sei $h < a$ und $\|\mathbf{x}(t_0 + h, \varepsilon) - \mathbf{x}_0\| < b$, d.h. für $t = t_0 + h$ liegt die Lösung $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ innerhalb von $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b$. Dann lässt sich die Lösung ausgehend vom Punkt $(t_0 + h, \mathbf{x}(t_0 + h, \varepsilon))$ von $t_0 + h$ bis $t_0 + h + h_1$ mit $h_1 > 0$ fortsetzen. Bei Fortsetzung auf diese Art und Weise wird entweder für einen gewissen Zeitpunkt $t = t_1 < t_0 + a$ die Gleichheit $\|\mathbf{x}(t, \varepsilon) - \mathbf{x}_0\| = b$ erreicht und die Lösung ist nicht weiter fortsetzbar oder die Lösung existiert für $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ und genügt der Ungleichung $\|\mathbf{x}(t, \varepsilon) - \mathbf{x}_0\| \leq b$. Analog lässt sich die Lösung links vom Punkt t_0 fortsetzen.

(2) Wir bezeichnen mit

$$M_0 = \max_{|t-t_0| \leq a, |\varepsilon| \leq d} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)\|.$$

Offensichtlich ist $M_0 \leq M$. Wenn

$$\frac{M_0}{L} [e^{aL} - 1] \leq b, \quad (1.45)$$

dann existiert eine Lösung $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ für $|t - t_0| \leq a$ (d.h. $h=a$), die den Bereich $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b$ nicht verlässt und welche für $|t - t_0| \leq a$ und $|\varepsilon| \leq d$ stetig bezüglich t und ε ist (ohne Beweis).

(3) Anstelle des Intervalls $|t-t_0| \leq a$ in Theorem 1.5 kann man auch eines der Intervalle $t_0 - a \leq t \leq t_0$ oder $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ betrachten.

Aus Theorem 1.5 folgt die Existenz einer Lösung nicht auf dem gesamten Intervall $|t-t_0| \leq a$, sondern nur für $|t-t_0| \leq h \leq a$. In Bemerkung 1.1 (2) wird der Fall der Existenz einer Lösung auf dem Intervall $|t-t_0| \leq a$ betrachtet. Es könnte aber sein, dass bei gewissen ε eine Lösung auf dem gesamten Intervall existiert und bei anderen ε für $|t-t_0| < a$ die Gleichheit $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = b$ erreicht wird und die Lösung nicht weiter fortgesetzt werden kann.

Im Weiteren ist die Antwort auf folgende Frage von Wichtigkeit: Für $\varepsilon = 0$ existiere eine Lösung auf dem gesamten Intervall $|t-t_0| \leq a$. Existiert dann auch für alle hinreichend kleinen $|\varepsilon|$ eine Lösung im gesamten Intervall $|t-t_0| \leq a$?

Wir betrachten zunächst ein Hilffsystem.

Lemma 1.1 Für das System

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \varepsilon), \quad (1.46)$$

wobei \mathbf{u} und \mathbf{f} m -dimensionale Vektorfunktionen sind und ε eine reelle Zahl ist, seien folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \varepsilon)$ sei definiert, stetig und genüge einer LIPSCHITZ-Bedingung nach \mathbf{u} mit einer LIPSCHITZ-Konstanten L im abgeschlossenen Gebiet

$$t_0 \leq t \leq t_0 + a, \quad \|\mathbf{u}\| \leq b, \quad |\varepsilon| \leq d.$$

(ii)

$$F(t, 0, 0) = 0 \quad \text{für } t_0 \leq t \leq t_0 + a \quad (1.47)$$

(iii) Sei $t_0(\varepsilon)$ eine stetige Funktion in ε für $|\varepsilon| \leq d$, für die gilt:

$$t_0 \leq t_0(\varepsilon) \leq t_0 + a \quad \text{falls } |\varepsilon| \leq d. \quad (1.48)$$

Dann gibt es ein ε_0 mit $0 < \varepsilon_0 \leq d$ derart, dass für $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ eine Lösung $\mathbf{u}(t, \varepsilon)$ des Systems (1.46), die der Bedingung

$$\mathbf{u}(t_0(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad (1.49)$$

genügt, auf dem gesamten Intervall $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ existiert. Dabei gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}(t, \varepsilon) = 0 \quad \text{gleichmäßig bezüglich } t \in [t_0, t_0 + a]. \quad (1.50)$$

Beweis: Wegen (1.48) ist für alle $t \in [t_0, t_0 + a]$ die Ungleichung $|t - t_0(\varepsilon)| \leq a$ erfüllt. Gemäß Bemerkung 1.1 (2) existiert eine Lösung $\mathbf{u}(t_0(\varepsilon), \varepsilon)$ des Problems (1.46)(1.49) für $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ auf dem gesamten Intervall $[t_0, t_0 + a]$, falls die Ungleichung (1.45) erfüllt ist.

In unserem Falle gilt wegen (1.49)

$$M_0 = \max_{t \in [t_0, t_0 + a], |\varepsilon| \leq \varepsilon_0} \|\mathbf{f}(t, 0, \varepsilon)\|.$$

Aus (1.47) folgt nun $\|\mathbf{f}(t, 0, \varepsilon)\|$ wird beliebig klein für $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, falls ε_0 hinreichend klein ist. Deshalb existiert ein ε_0 derart, dass bei $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ die Ungleichung (1.45) erfüllt ist. Folglich existiert für $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ eine Lösung $\mathbf{u}(t, \varepsilon)$ auf dem gesamten Intervall $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, welche eine stetige Funktion in t und ε ist. Wegen (1.47) ist die Lösung des Systems (1.46), die für $\varepsilon = 0$ die AB (1.49) erfüllt, gleich $\mathbf{u}(t, 0, \varepsilon) = 0$. Hieraus und aus der Stetigkeit von $\mathbf{u}(t, \varepsilon)$ folgt (1.50).

Sei D ein Gebiet (d.h. eine offene, einfach zusammenhängende Menge des Raumes $\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{1+n}$). Wir bezeichnen mit $G = D \times \{\varepsilon \in \mathbb{R} : |\varepsilon| \leq d\}$.

Theorem 1.6 Für das System (1.42) seien folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ sei definiert, stetig und genüge einer LIPSCHITZ-Bedingung nach \mathbf{x} in G .
- (ii) Das System

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, 0), \quad (1.51)$$

welches man aus (1.42) für $\varepsilon = 0$ erhält, besitze auf dem Intervall $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ eine Lösung $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$, die die AB

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.52)$$

erfüllt, wobei die Lösung $\mathbf{y}(t)$ das Gebiet D nicht verlässt, d.h.

$$(t, \mathbf{y}(t)) \in D \quad \text{für } t \in [t_0, t_0 + a]. \quad (1.53)$$

- (iii) Seien $t_0(\varepsilon)$ und $\mathbf{r}(\varepsilon)$ stetige Funktionen in ε für $|\varepsilon| \leq d$ mit folgenden Eigenschaften

$$t_0 \leq t_0(\varepsilon) \leq t_0 + a \quad t_0(0) = t_0 \quad \mathbf{r}(0) = 0. \quad (1.54)$$

Dann gibt es ein ε_0 mit $0 < \varepsilon_0 < d$ derart, dass für $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ eine Lösung $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ des Systems (1.42), die der Bedingung

$$\mathbf{x}(t_0(\varepsilon), \varepsilon) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}(\varepsilon) \quad (1.55)$$

genügt, auf dem gesamten Intervall $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ existiert. Dabei gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{x}(t, \varepsilon) = \mathbf{y}(t) \quad \text{gleichmäßig bezüglich } t \in [t_0, t_0 + a]. \quad (1.56)$$

Beweis: Offensichtlich erfüllt $\mathbf{y}(t)$ für $t = t_0(\varepsilon)$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{y}(t_0(\varepsilon)) - \mathbf{x}_0\| \leq M_0 (t_0(\varepsilon) - t_0)$$

mit $M_0 = \max_{t \in [t_0, t_0+a]} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), 0)\|$.

Da wegen (1.54) $t_0(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} t_0$ gilt, folgt hieraus $\mathbf{y}(t_0(\varepsilon)) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{w}(\varepsilon)$, wobei $\mathbf{w}(\varepsilon)$ für $|\varepsilon| \leq d$ stetig in ε ist und $\mathbf{w}(0) = 0$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathbf{l}(\varepsilon) = \mathbf{r}(\varepsilon) - \mathbf{w}(\varepsilon)$ und führen eine Hilfsfunktion ein

$$\mathbf{u}(t, \varepsilon) = \mathbf{x}(t, \varepsilon) - \mathbf{y}(t) - \mathbf{l}(\varepsilon). \quad (1.57)$$

Setzt man $\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \mathbf{u}(t, \varepsilon) + \mathbf{y}(t) + \mathbf{l}(\varepsilon)$ in (1.42) und (1.55) ein, so ergibt sich für $\mathbf{u}(t, \varepsilon)$ das System

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \varepsilon) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t, \varepsilon) + \mathbf{y}(t) + \mathbf{l}(\varepsilon), \varepsilon) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), 0) \quad (1.58)$$

und die AB

$$\mathbf{u}(t_0(\varepsilon), \varepsilon) = \mathbf{x}(t_0(\varepsilon), \varepsilon) - \mathbf{y}(t) - \mathbf{l}(\varepsilon) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}(\varepsilon) - \mathbf{x}_0 - \mathbf{w}(\varepsilon) - \mathbf{l}(\varepsilon) = 0. \quad (1.59)$$

Wir zeigen, dass für das AWP (1.58) (1.59) alle Voraussetzungen von Lemma 1.1 erfüllt sind.

Wegen $\mathbf{l}(0) = 0$ erhält man

$$\mathbf{f}(t, 0, 0) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), 0) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), 0) = 0 \quad \text{für } t_0 \leq t \leq t_0 + a.$$

Also genügt die Funktion \mathbf{f} aus (1.58) der Voraussetzung (1.47).

Wegen (1.53) existieren hinreichend kleine Zahlen $b > 0$ und $\varepsilon_0 > 0$ derart, dass für $\|\mathbf{u}\| \leq b$ und $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ gilt $(\mathbf{y}(t) + \mathbf{u} - \mathbf{l}(\varepsilon), t) \in D$ falls $t \in [t_0, t_0 + a]$ ist. Folglich ist die Funktion $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \varepsilon)$ definiert, stetig und genügt einer LIPSCHITZ-Bedingung nach \mathbf{u} im Bereich $\|\mathbf{u}\| \leq b$, $t \in [t_0, t_0 + a]$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Sie erfüllt somit alle Voraussetzungen von Lemma 1.1. Gemäß Lemma 1.1 gibt es ein ε_0 mit $0 < \varepsilon_0 \leq d$ derart, dass für $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ eine Lösung des Systems (1.42) (1.55) auf dem gesamten Segment $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ existiert. Dabei gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}(t, \varepsilon) = 0$ gleichmäßig bezüglich $t \in [t_0, t_0 + a]$. Hieraus und aus (1.57) ergibt sich die Existenz einer Lösung $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ des AWP (1.42) (1.55) auf dem gesamten Intervall $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ und es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{x}(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\mathbf{u}(t, \varepsilon) + \mathbf{y}(t) + \mathbf{l}(\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{y}(t)$$

gleichmäßig bezüglich $t \in [t_0, t_0 + a]$.

Bemerkung 1.2 (Wichtige Spezialfälle des Systems)

- (1) Ein System mit rechten Seiten wie in (1.42) enthält alle linearen DGL-Systeme 1. Ordnung. In diesem Falle hat \mathbf{f} die Form

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{A}(t, \varepsilon) \mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \varepsilon)$$

mit einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}(t, \varepsilon)$ der Ordnung m und dem m -dimensionalen Vektor $\mathbf{g}(t, \varepsilon)$ der rechten Seiten.

(2) Jede DGL n -ter Ordnung der Form

$$x^{(n)} = h(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, \varepsilon)$$

lässt sich mittels der Substitution

$$x_1 = x \quad x_2 = \dot{x} \quad x_3 = \ddot{x}, \dots, x_n = x^{(n-1)}$$

auf ein System der Gestalt (1.42) zurückführen. Man erhält

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2, & \dot{x}_2 &= \ddot{x} = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n &= x^{(n)} = h(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, \varepsilon) = h(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) \end{aligned}$$

Speziell gilt eine solche Umformung in ein Normalsystem auch für eine lineare DGL n -ter Ordnung der Form

$$x^{(n)} = a_{n-1}(t, \varepsilon) x^{(n-1)} + \dots + a_0(t, \varepsilon)x + g(t, \varepsilon).$$

Somit liefert Theorem 1.6 für eine umfangreiche Klasse parameterabhängiger gewöhnlicher DGL hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines RGP. Theorem 1.6 heißt auch Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösungen eines parameterabhängigen Normalsystems von dem in die rechte Seite des Systems und in die AB eingehenden Parameter. Theorem 1.6 sagt aus, dass

- kleine Änderungen des Parameters ε kleinen Änderungen der Lösung des AWP entsprechen,
- für kleine ε das AWP (1.42), $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$) näherungsweise durch das AWP (1.51), (1.52) ersetzt werden kann.

Wir betrachten jetzt das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \varepsilon \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad t \in [0, T], \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1.60)$$

wobei \mathbf{x}, \mathbf{f} m -dimensionale und \mathbf{y}, \mathbf{g} n -dimensionale Vektorfunktionen sind. Die AB seien an der Stelle t_0 gegeben und mögen nicht von ε abhängen:

$$\mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{y}(t, \varepsilon) = \mathbf{y}^0. \quad (1.61)$$

Setzen wir in (1.60) $\varepsilon = 0$, so erhalten wir das sogenannte **entartete System**

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}), \quad 0 = \mathbf{g}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \quad (1.62)$$

zum System (1.60), dessen Ordnung niedriger als die des Systems (1.60) ist, da n Gleichungen des Systems (1.62) algebraisch sind. Deshalb werden zur eindeutigen Lösung des Systems (1.62) weniger AB benötigt, als im System (1.60) vorgegeben waren. Es ist sinnvoll, dem System (1.62) die AB

$$\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}^0 \quad (1.63)$$

zuzuordnen und die zweite AB wegzulassen.

Wir fragen nun, ob und unter welchen Bedingungen sich die Lösung $\mathbf{x}(t, \varepsilon), \mathbf{y}(t, \varepsilon)$ des Systems (1.60), (1.61) für kleine ε in der Nähe der Lösung des **entarteten Systems** (1.62) befindet.

Theorem 1.6 ist auf das System (1.60) nicht anwendbar, denn wenn man es in der Form (1.42) schreibt, so besitzt die rechte Seite für $\varepsilon = 0$ eine Unstetigkeit. Im Theorem 1.6 sind die Systeme (1.42) und (1.51) von derselben Ordnung, während in den Systemen (1.60) und (1.62) die Ordnungen unterschiedlich sind.

Um das **entartete System** (1.62) zu lösen, ist die algebraische Gleichung $\mathbf{g}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0$ nach $\bar{\mathbf{y}}$ aufzulösen. Wegen der Nichtlinearität gibt es in der Regel mehrere Lösungen, von denen eine ausgewählt werden muss. Diese ausgewählte Lösung $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}})$ wird in die erste der Gleichungen (1.62) eingesetzt und man erhält das sogenannte **reduzierte entartete System**

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}(t, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}})), \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (1.64)$$

Es ist zu erwarten, dass die Lösung $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}})$ die AB (1.61) für \mathbf{y} nicht erfüllt, d.h. $\bar{\mathbf{y}}(0) \neq \mathbf{y}^0$. Deshalb wird sich wenigstens in einer gewissen Umgebung des Anfangspunktes $t = 0$ die Lösung $\bar{\mathbf{y}}(t)$ nicht in der Nähe der Lösung $\mathbf{y}(t, \varepsilon)$ des Systems (1.60) befinden.

Weitere Fragen sind

- Gilt außerhalb dieser Umgebung, dass sich $\bar{\mathbf{y}}(t)$ in der Nähe von $\mathbf{y}(t, \varepsilon)$ befindet?
- Liegt für $0 < t \leq T$ die Lösung $\bar{\mathbf{x}}(t)$ des Systems (1.64) in der Nähe der Lösung $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$? (Wegen (1.61) und (1.63)) sind sie für $t = 0$ gleich.)

Die Antwort auf diese Fragen kann positiv oder negativ sein und hängt von den Bedingungen ab, die den Systemen (1.60) und (1.62) auferlegt werden, speziell von der Auswahl der Lösung $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}})$.

Aufgabe 1.3 *Wir betrachten die skalare Gleichung $\varepsilon \dot{y} - a y = b$. Unter welchen Bedingungen strebt die exakte Lösung für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die Lösung der **entarteten Gleichung**?*

Aufgabe 1.4 *Wir betrachten das System*

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{y}_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + b_1 \\ \varepsilon \dot{y}_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + b_2. \end{aligned}$$

*Geben Sie Bedingungen an, unter denen die exakte Lösung für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die Lösung des **entarteten Systems** strebt.*

Sei D_m ein Gebiet des Raumes \mathbb{R}_x^m , $D_n(D_1)$ ein Gebiet des Raumes $\mathbb{R}_y^n(\mathbb{R}_t^1)$ entsprechend. Wir bezeichnen mit $D = D_m \times D_n$ und mit $D_0 = D_1 \times D_m \times D_n$.

Definition 1.8 *Eine Lösung $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}})$ der nichtlinearen Gleichung $\mathbf{g}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0$ heißt isoliert in $\bar{D}_1 \times \bar{D}_m$, wenn ein $\rho > 0$ existiert, derart, dass $\mathbf{g}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \neq 0$ für $0 < \|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}})\| \leq \rho$ mit $(t, \bar{\mathbf{x}}) \in \bar{D}_1 \times \bar{D}_m$ gilt, d.h. in einer Umgebung $\|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}})\| \leq \rho$ der Lösung $\mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}})$ gibt es keine weiteren Lösungen der Gleichung.*

Theorem 1.7 (Satz von TICHONOV) Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

- I. Die Funktionen $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ seien stetig und mögen einer LIPSCHITZ-Bedingung bezüglich \mathbf{x} und \mathbf{y} in einem Gebiet D_0 genügen.
- II. Die Gleichung $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ besitze in einem beschränkten Gebiet $\overline{D_1 \times D_m}$ eine isolierte Lösung $\mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x})$, die der Bedingung

$$\operatorname{Re} \lambda_j(t, \mathbf{x}(t)) < 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad t \in [0, T]$$

genügt, wobei $\lambda_j(t, \mathbf{x}(t))$ die (reellen bzw. komplexen) Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\operatorname{Det} \left| \frac{\partial \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}))}{\partial \mathbf{y}} - \lambda E_n \right| = 0$$

sind. (In diesem Falle spricht man von einer asymptotisch stabilen Lösung.)

Für die Funktion $\mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ gelte außerdem

1. $\mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ ist stetig in $\overline{D_1 \times D_m}$,
2. für $(t, \mathbf{x}) \in \overline{D_1 \times D_m}$ gilt $(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x})) \in D_0$.

- III. Es sei $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}))$ LIPSCHITZ-stetig nach \mathbf{x} in $D_1 \times D_m$. (Zusammen mit der Voraussetzung I garantiert dies die Existenz einer eindeutigen Lösung $\bar{\mathbf{x}}(t)$ des reduzierten entarteten Systems (1.64), die für $t \in [0, T]$ definiert ist und die der AB $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$) genügt).

- IV. Der Anfangspunkt $(0, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ liege im Einflussbereich einer asymptotisch stabilen Lösung. Dies ist der Fall, wenn die durch das zugeordnete System

$$\frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{d\tau} = \mathbf{g}(0, \mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{y}}(\tau)) \quad \tilde{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}^0 \quad (1.65)$$

definierte Funktion $\tilde{\mathbf{y}}(\tau)$ den Bedingungen

1. $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{y}}(\tau) = \mathbf{h}(0, \mathbf{x}^0)$,
2. $(0, \mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{y}}(\tau)) \in D_0$ für $\tau \geq 0$.

genügt. (I.a. ist $\mathbf{y}^0 \neq \mathbf{h}(0, \mathbf{x}^0)$, also konvergiert die Lösung $\tilde{\mathbf{y}}$ des Problems (1.65) für $\tau \rightarrow \infty$ nicht notwendig gegen $\mathbf{h}(0, \mathbf{x}^0)$.)

Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ derart, dass für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{x}(t, \varepsilon), \mathbf{y}(t, \varepsilon)$ des AWP (1.60), (1.61) auf dem Intervall $[0, T]$ existiert, die folgenden Grenzwertbeziehungen genügt:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{x}(t, \varepsilon) &= \bar{\mathbf{x}}(t) && \text{für } 0 \leq t \leq T, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{y}(t, \varepsilon) &= \bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}}(t)) && \text{für } 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.5 Lösen Sie das entartete System zu den Systemen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y & \dot{x} &= -kxy + ky^2 \\ \varepsilon \dot{y} &= 3x - 4y. & \varepsilon \dot{y} &= k_1x - (k_1 + k_2)y \end{aligned}$$

mit den AB $x(0) = 1, y(0) = 1$. Dabei sind k, k_1, k_2 positive Konstanten. Überprüfen Sie außerdem die Voraussetzungen I–IV von Theorem 1.7 für diese Systeme.

2 Methode der Grenzschichtverbesserung für SGP mit Ordnungserniedrigung

Diese Methode wurde von VISIK und LJUSTERNIK für lineare gewöhnliche sowie für lineare partielle DGL entwickelt. VASILJEVA gelang die Übertragung der Methode auf Systeme gewöhnlicher DGL 1. Ordnung und somit auf nichtlineare DGL.

2.1 RWP für lineare DGL 2. Ordnung

Aufgabenstellung:

$$\varepsilon \ddot{x} + a(t) \dot{x}(t, \varepsilon) + b(t) x(t, \varepsilon) = f(t) \quad t \in [0, 1] \quad (2.1)$$

$$x(0, \varepsilon) = \alpha \quad x(1, \varepsilon) = \beta \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2.2)$$

Voraussetzungen:

- (i) Das RWP (2.1) (2.2) sei eindeutig lösbar.
- (ii) Die Koeffizienten $a(t)$ und $b(t)$ seien analytisch in $[0, 1]$.
- (iii) $a(t) > 0 \quad \forall t \in [0, 1]$.

Wegen (ii) können $a(t)$ und $b(t)$ durch konvergente Potenzreihen der Form

$$a(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s^0 t^s \quad b(t) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s^0 t^s \quad (2.3)$$

$$a(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s^1 (t-1)^s \quad b(t) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s^1 (t-1)^s \quad (2.4)$$

dargestellt werden.

Wie aus Beispiel 1.12 ersichtlich setzt sich für SGP eine im gesamten Intervall $[0, 1]$ gültige asymptotische Lösungsdarstellung zusammen aus dem Lösungsanteil in Form einer asymptotischen Potenzreihe in ε und den GSF.

1. SCHRITT: Ermittlung des Lösungsanteils in Form einer APR

Diese APR approximiert die Lösung des gestörten Problems (2.1) (2.2) mit Ausnahme einer Umgebung der GS. Deshalb heißt dieser Lösungsanteil globale asymptotische Lösung (GAL). Eine GAL erhält man aus dem Ansatz

$$u_N(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j. \quad (2.5)$$

Nach Differentiation, Einsetzen in die DGL (2.1) und Koeffizientenvergleich in ε ergibt sich das rekursive System

$$\begin{aligned} a(t) \dot{g}_0(t) + b(t) g_0(t) &= f(t) \\ a(t) \dot{g}_j(t) + b(t) g_j(t) &= -\ddot{g}_{j-1}(t) \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die durch (2.5) eingeführten Funktionen $g_j(t)$ sind Lösungen linearer DGL 1. Ordnung und enthalten somit nur eine frei wählbare Konstante. Mit der Ansatzstruktur (2.5) kann daher nur eine der Randbedingungen (RB) erfüllt werden. Die Wahl dieser RB ist vom Vorzeichen des Koeffizienten $a(t)$ abhängig.

Für $a(t) > 0$, $t \in [0, 1]$, wählen wir im Ansatz (2.5) die RB $x(1, \varepsilon) = \beta$. Diese Bedingung wird von (2.5) erfüllt, wenn wir $g_0(1) = \beta$ fordern und alle weiteren Glieder durch $g_j(1) = 0$ ($j = 1, \dots, N$) festlegen. Damit sind die $g_j(t)$ eindeutig aus (2.6) bestimmbar.

Die Funktion (2.5), deren Koeffizientenfunktionen $g_j(t)$ Lösungen der RWP

$$\begin{aligned} a(t) \dot{g}_0(t) + b(t) g_0(t) &= f(t) & g_0(1) &= \beta \\ a(t) \dot{g}_j(t) + b(t) g_j(t) &= -\ddot{g}_{j-1}(t) & g_j(1) &= 0 \quad (j = 1, \dots, N) \end{aligned}$$

sind, liefert im Falle $a(t) > 0$, $t \in [0, 1]$, die GAL, die mit Ausnahme einer Umgebung des linken Randpunktes eine asymptotische Darstellung der exakten Lösung des RWP (2.1) (2.2) liefert.

2. SCHRITT: Bestimmung des GSF

Wir ermitteln zunächst die Fehlergleichung. Durch Einsetzen von (2.5) in die linke Seite von (2.1) erhält man unter Berücksichtigung von (2.6)

$$\varepsilon \ddot{u}_N(t, \varepsilon) + a(t) \dot{u}_N(t, \varepsilon) + b(t) u_N(t, \varepsilon) = f(t) + \varepsilon^{N+1} \ddot{g}_N(t).$$

Subtrahiert man diese DGL von der exakten DGL (2.1), so gewinnt man für die Differenz $x(t, \varepsilon) - u_N(t, \varepsilon) = v_N(t, \varepsilon)$ die Fehlergleichung

$$\varepsilon \ddot{v}_N(t, \varepsilon) + a(t) \dot{v}_N(t, \varepsilon) + b(t) v_N(t, \varepsilon) = -\varepsilon^{N+1} \ddot{g}_N(t). \quad (2.7)$$

Die RB (2.2) übertragen sich auf $v_N(t, \varepsilon)$ zu

$$\begin{aligned} v_N(0, \varepsilon) &= x(0, \varepsilon) - u_N(0, \varepsilon) = \alpha - \sum_{j=0}^N g_j(0) \varepsilon^j, \\ v_N(1, \varepsilon) &= x(1, \varepsilon) - u_N(1, \varepsilon) = \beta - \beta = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Da die Funktionen $g_j(t)$ im 1. Schritt bereits eindeutig bestimmt wurden, sind die Werte $g_j(0)$ bekannt, und damit auch die RB von $v_N(t, \varepsilon)$. Um den Einfluss der GSF auf eine Umgebung des noch nicht berücksichtigten Randpunktes $t = 0$ einzuschränken, führen wir eine Variablenstreckung der Form

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad t = \varepsilon \tau$$

durch. Die Fehlergleichung (2.7) geht mit dieser Substitution wegen

$$\frac{dv_N}{dt} = \frac{d\hat{v}_N}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\hat{v}_N}{d\tau} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \quad \frac{d^2v_N}{dt^2} = \frac{d^2\hat{v}_N}{d\tau^2} \cdot \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \frac{d\hat{v}_N}{d\tau} \cdot \frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{d^2\hat{v}_N}{d\tau^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}$$

in die DGL der GSF über

$$\varepsilon \frac{d^2\hat{v}_N}{d\tau^2} \frac{1}{\varepsilon^2} + a(\varepsilon\tau) \frac{d\hat{v}_N}{d\tau} \frac{1}{\varepsilon} + b(\varepsilon\tau) \hat{v}_N = -\varepsilon^{N+1} \ddot{u}_N(\varepsilon\tau, \varepsilon).$$

Multipliziert man die letzte Gleichung mit ε , so ergibt sich

$$\frac{d^2 \hat{v}_N}{d\tau^2} + a(\varepsilon\tau) \frac{d\hat{v}_N}{d\tau} + \varepsilon b(\varepsilon\tau) \hat{v}_N = -\varepsilon^{N+2} \ddot{u}_N(\varepsilon\tau, \varepsilon). \quad (2.9)$$

Der Korrekturterm $\hat{v}_N(t, \varepsilon)$ wird nun in der Form

$$\hat{v}_N(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N h_j(\tau) \varepsilon^j \quad (2.10)$$

angesetzt. Um einen Koeffizientenvergleich in ε durchführen zu können, entwickeln wir die Koeffizienten $a(t)$ und $b(t)$ in einer Umgebung des noch nicht berücksichtigten Randpunktes $t = 0$ in die TAYLORreihe. Aus (2.3) erhält man

$$\begin{aligned} a(\varepsilon\tau) &= \sum_{s=0}^{\infty} a_s^0 \tau^s \varepsilon^s & b(\varepsilon\tau) &= \sum_{s=0}^{\infty} b_s^0 \tau^s \varepsilon^s \quad \text{mit} \\ a_s^0 &= \frac{a^{(s)}(0)}{s!} & b_s^0 &= \frac{b^{(s)}(0)}{s!} \quad (s = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.9) geht somit über in

$$\sum_{j=0}^N h_j''(\tau) \varepsilon^j + \left(\sum_{s=0}^{\infty} a_s^0 \tau^s \varepsilon^s \right) \left(\sum_{j=0}^N h_j'(\tau) \varepsilon^j \right) + \left(\sum_{s=0}^{\infty} b_s^0 \tau^s \varepsilon^s \right) \left(\sum_{j=0}^N h_j(\tau) \varepsilon^{j+1} \right) + \varepsilon^{N+2} \ddot{u}_N(\varepsilon\tau, \varepsilon) = 0,$$

bzw.

$$\sum_{j=0}^N h_j''(\tau) \varepsilon^j + \sum_{j=0}^N \left[h_j'(\tau) \left(\sum_{s=0}^{\infty} a_s^0 \tau^s \varepsilon^s \right) \varepsilon^j + h_j(\tau) \left(\sum_{s=0}^{\infty} b_s^0 \tau^s \varepsilon^s \right) \varepsilon^{j+1} \right] + \varepsilon^{N+2} \ddot{u}_N = 0$$

woraus durch Ordnen nach ε -Potenzen

$$\begin{aligned} &\left[h_0''(\tau) + a_0^0 h_0'(\tau) \right] \varepsilon^0 + \sum_{j=1}^N \left[h_j''(\tau) + \sum_{r=0}^j a_{j-r}^0 \tau^{j-r} h_r'(\tau) + \sum_{r=0}^{j-1} b_{j-1-r}^0 \tau^{j-1-r} h_r(\tau) \right] \varepsilon^j \\ &+ \dots + \varepsilon^{N+2} \ddot{u}_N = 0 \end{aligned}$$

folgt. Für die ersten N Koeffizienten der Reihe (2.10) gewinnt man hieraus durch Koeffizientenvergleich in ε das rekursive System

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : h_0''(\tau) + a_0^0 h_0'(\tau) &= 0 \\ \varepsilon^1 : h_1''(\tau) + a_0^0 h_1'(\tau) &= -[a_1^0 \tau h_0'(\tau) + b_0^0 h_0(\tau)] \\ \varepsilon^2 : h_2''(\tau) + a_0^0 h_2'(\tau) &= -[a_2^0 \tau^2 h_0'(\tau) + a_1^0 \tau h_1'(\tau) + b_1^0 \tau h_0(\tau) + b_0^0 h_1(\tau)] \\ &\vdots \\ \varepsilon^N : h_N''(\tau) + a_0^0 h_N'(\tau) &= - \sum_{r=0}^{N-1} \left[a_{N-r}^0 \tau^{N-r} h_r'(\tau) + b_{N-1-r}^0 \tau^{N-1-r} h_r(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Funktionen $h_j(\tau)$ sind Lösungen linearer DGL 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten und enthalten demzufolge zwei frei wählbare Konstanten. In Übereinstimmung mit den Forderungen an eine GSF $v_N(t, \varepsilon)$ (vgl. Bsp. 1.12) fordern wir

1. Die Erfüllung der Rb (2.8)

$$\hat{v}_N(0, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N h_j(\tau) \varepsilon^j = \alpha - \sum_{j=0}^N g_j(0) \varepsilon^j.$$

2. Für fixierte $t > 0$ aus dem Gültigkeitsbereich der GAL soll $\hat{v}_N(\tau, \varepsilon)$ vernachlässigbar klein sein (wegen $\varepsilon \ll 1$ ist $\tau = \frac{t}{\varepsilon} \gg 1$), d.h. $\hat{v}_N(\tau, \varepsilon)$ muss der Abklingbedingung (oder Matchingbedingung)

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{v}_N(\tau, \varepsilon) = 0$$

genügen.

Beide Bedingungen sind erfüllt, wenn die Funktionen $h_j(\tau)$ durch folgende Bedingungen festgelegt werden:

$$h_0(0) = \alpha - g_0(0) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} h_j(0) &= -g_j(0) & j \geq 1 \\ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_j(\tau) &= 0 & j \geq 0. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun $h_0(\tau)$ und $h_1(\tau)$ explizit aus den AWP:

$$h_0''(\tau) + a_0^0 h_0'(\tau) = 0, \quad h_0(0) = \alpha - g_0(0), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_0(\tau) = 0, \quad (2.13)$$

$$h_1''(\tau) + a_0^0 h_1'(\tau) = -[a_1^0 \tau h_0'(\tau) + b_0^0 h_0(\tau)], \quad h_1(0) = -g_1(0), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_1(\tau) = 0. \quad (2.14)$$

Die erste der DGL (2.11) ist homogen. Mit dem Ansatz $h_0(\tau) = \exp(\lambda \tau)$ ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a_0^0 \lambda = \lambda(\lambda + a_0^0) = 0 \quad (2.15)$$

mit den Wurzeln $\lambda_1 = -a_0^0$ und $\lambda_2 = 0$.

Die restlichen DGL in (2.11) sind inhomogen mit spezieller Struktur der rechten Seiten in der Form $f(\tau) = \exp(-a_0^0 \tau) P_m(\tau)$, wobei die Polynome $P_m(\tau)$ vom Grade m aus den vorhergehenden Berechnungen bekannt sind. Aus der Theorie der gewöhnlichen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten ist bekannt: Besitzen die DGL eine rechte Seite der Form $\exp(\gamma \tau) P_m(\tau)$, so gibt es eine eindeutig bestimmte partikuläre oder spezielle Lösung in der Gestalt

$$z_s(\tau) = \tau^s Q_m(\tau) \exp(\gamma \tau).$$

Dabei ist $Q_m(\tau)$ wieder ein Polynom vom Grade m , dessen Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich ermittelt werden. Ist γ keine Wurzel des charakterisierenden Polynoms (2.15) der homogenen DGL, so setzen wir $s = 0$. Ist γ Wurzel von (2.15), so bezeichnet s die Vielfachheit der Wurzel. Da in unserem Falle $-a_0^0$ stets eine einfache Wurzel von (2.15) ist, lautet der Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL in unserem Falle

$$h(\tau) = \tau Q_m(\tau) \exp(-a_0^0 \tau).$$

Lösung des AWP (2.13) Die DGL ist homogen. Ihre charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a_0^0 \lambda = \lambda(\lambda + a_0^0) = 0$$

besitzt die Wurzeln $\lambda_1 = -a_0^0$, $\lambda_2 = 0$. Die allgemeine Lösung lautet folglich

$$h_0(\tau) = (h_0) a^h(\tau) = C_1^0 + C_2^0 \exp(-a_0^0 \tau). \quad (2.16)$$

Man erkennt, dass sich die Abklingbedingung nur für $a_0^0 = a(0) > 0$ erfüllen lässt. Einsetzen der RB in (2.16) liefert

$$\begin{aligned} h_0(0) &= C_1^0 + C_2^0 = \alpha - g_0(0) \\ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_0(\tau) &= C_1^0 = 0, \end{aligned}$$

also $C_1^0 = 0$, $C_2^0 = \alpha - g_0(0)$ und

$$h_0(\tau) = [\alpha - g_0(0)] \exp(-a_0^0 \tau).$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$h_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = [\alpha - g_0(0)] \exp\left(-\frac{a_0^0}{\varepsilon} t\right).$$

Lösung des AWP (2.14) Die DGL ist inhomogen mit der rechten Seite

$$-[a_1^0 \tau h_0'(\tau) + b_0^0 h_0(\tau)] = \exp(-a_0^0 \tau)(\alpha - g_0(0))[a_1^0 a_0^0 \tau - b_0^0],$$

wobei a_1^0, a_0^0, b_0^0 Koeffizienten in den TAYLORreihenentwicklungen (2.3) sind und $[a_1^0 a_0^0 \tau - b_0^0]$ ein Polynom 1. Grades ist. Die allgemeine Lösung der DGL (2.14) lautet folglich

$$\begin{aligned} h_1(\tau) \equiv (h_1)_a^{inh}(\tau) &= (h_1)_a^h(\tau) + (h_1)_s^{inh}(\tau) = (h_1)_a^h(\tau) + \exp(-a_0^0 \tau) \tau Q_1(\tau) \\ &= C_1^1 + C_2^1 \exp(-a_0^0 \tau) + \exp(-a_0^0 \tau) \tau [q_1 \tau + q_0] \\ &= C_1^1 + (C_2^1 + \tau [q_1 \tau + q_0]) \exp(-a_0^0 \tau). \end{aligned}$$

Einsetzen der RB (2.14) liefert

$$\begin{aligned} h_1(0) &= C_1^1 + C_2^1 = -g_1(0) \\ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_1(\tau) &= C_1^1 = 0 \end{aligned}$$

also $C_1^1 = 0$, $C_2^1 = -g_1(0)$ und

$$h_1(\tau) = [\tau (q_1 \tau + q_0) - g_1(0)] \exp(-a_0^0 \tau).$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$h_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \left[\frac{t}{\varepsilon} \left(q_1 \frac{t}{\varepsilon} + q_0\right) - g_1(0)\right] \exp\left(\frac{-a_0^0 \varepsilon}{t}\right).$$

Für $N = 1$ erhält man eine asymptotische Darstellung der exakten Lösung des RWP (2.1),(2.2) in der Gestalt

$$\begin{aligned} x_1(t, \varepsilon) &= u_1(t, \varepsilon) + v_1(t, \varepsilon) \\ &= g_0(t) + g_1(t) \varepsilon + h_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + h_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \varepsilon \\ &= g_0(t) + g_1(t) \varepsilon + [\alpha - g_0(0)] \exp\left(\frac{-a_0^0}{\varepsilon} t\right) \\ &+ \left[\frac{t}{\varepsilon} \left(q_1 \frac{t}{\varepsilon} + q_0\right) - g_1(0)\right] \exp\left(\frac{-a_0^0}{\varepsilon} t\right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Die RB im linken Randpunkt wird exakt erfüllt, denn

$$x_1(0, \varepsilon) = g_0(0) + g_1(0) \varepsilon + [\alpha - g_0(0)] - g_1(0) \varepsilon = \alpha.$$

Die RB im rechten Randpunkt wird nur asymptotisch für $\varepsilon \rightarrow 0$ erfüllt, denn

$$\begin{aligned} x_1(1, \varepsilon) &= g_0(1) + g_1(1) \varepsilon + [\alpha - g_0(1)] \exp\left(-\frac{a_0^0}{\varepsilon}\right) \\ &+ \left[\frac{1}{\varepsilon}(q_1 \frac{1}{\varepsilon} + q_0) - g_1(1)\right] \exp\left(-\frac{a_0^0}{\varepsilon}\right) \varepsilon \\ &= \beta + (\alpha - \beta) \exp\left(-\frac{a_0^0}{\varepsilon}\right) + \left[\frac{1}{\varepsilon}\left(q_1 \frac{1}{\varepsilon} + q_0\right)\right] \exp\left(-\frac{a_0^0}{\varepsilon}\right) \varepsilon \end{aligned}$$

und $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} x_1(1, \beta) = \beta$.

Man erhält eine asymptotische Darstellung der exakten Lösung, die jedoch keine reine Potenzreihenentwicklung bezüglich ε ist.

Bemerkung 2.1 Sei jetzt in Bedingung (iii) $a(t) < 0 \quad \forall t \in [0, 1]$. Diesen Fall kann man völlig analog behandeln, es ist nur die Rolle der Randpunkte $t = 0$ und $t = 1$ zu vertauschen. Wir wählen im Falle $a(t) < 0 \quad \forall t \in [0, 1]$ für den Ansatz (2.5) die Rb $x(0, \varepsilon) = \alpha$. Diese Bedingung wird von (2.5) erfüllt, wenn wir $g_0(0) = \alpha$ fordern und alle weiteren Glieder durch $g_j(0) = 0$ ($j = 1, \dots, N$) festlegen. Die Variablenstreckung wird in der Form

$$\omega = \frac{1-t}{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad 1-t = \varepsilon \omega \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{t-1}{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad t-1 = \varepsilon \sigma$$

betrachtet. Die Koeffizienten $a(t)$ und $b(t)$ werden jetzt in einer Umgebung des Punktes $t = 1$ gemäß (2.4) in konvergente Potenzreihen entwickelt. Die GS tritt in einer Umgebung des rechten Randpunktes auf.

Beispiel 2.1 Wir betrachten ein RWP für die homogene DGL

$$\varepsilon \ddot{x}(t, \varepsilon) - (1+t) \dot{x}(t, \varepsilon) + x(t, \varepsilon) = 0 \tag{2.17}$$

$$x(0, \varepsilon) = \alpha \quad x(1, \varepsilon) = \beta \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{2.18}$$

Es ist $a(t) = -(1+t) < 0 \quad \forall t \in [0, 1]$ $b(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 1]$.

1. Schritt: Bestimmung der GAL

Aus dem Ansatz $u_N(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j$ erhält man das rekursive System (2.6) in der Gestalt

$$\begin{aligned} -(1+t) \dot{g}_0(t) + g_0(t) &= 0, \\ -(1+t) \dot{g}_j(t) + g_0(t) &= -\ddot{g}_{j-1}(t) \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Wegen $a(t) < 0 \quad \forall t \in [0, 1]$ wählen wir für die GAL die RB

$$g_0(0) = \alpha \quad \text{und} \quad g_j(0) = 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

Wir lösen zunächst das AWP

$$-(1+t)\dot{g}_0(t) + g_0(t) = 0 \quad g_0(0) = \alpha.$$

Nach Trennung der Variablen in der DGL und Integration ergibt sich die allgemeine Lösung

$$g_0(t) = g_{0a}^h(t) = C_0(1+t).$$

Aus der RB folgt für die spezielle Lösung

$$g_0(t) = \alpha(1+t).$$

Wegen $\ddot{g}_0(t) = 0$ sind alle weiteren $g_i(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1]$. Somit erhält man für die GAL

$$u_N(t, \varepsilon) = u_N(t) = g_0(t) = \alpha(1+t).$$

2. Schritt: Berechnung der GSF

Da $\ddot{g}_N(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1]$, ergibt sich hier

$$\varepsilon \ddot{g}_0(t) - (1+t)\dot{g}_0(t) + g_0(t) = 0.$$

Subtrahiert man diese DGL von der DGL (2.17), so reduziert sich die Fehlergleichung auf

$$\varepsilon \ddot{v}_N(t, \varepsilon) - (1+t)\dot{v}_N(t, \varepsilon) + v_N(t, \varepsilon) = 0.$$

Mit der Variablenstreckung $\omega = \frac{1-t}{\varepsilon}$ geht die Fehlergleichung wegen

$$\frac{dv_N}{dt} = \frac{d\hat{v}_N}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\hat{v}_N}{d\omega} \cdot \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \frac{d^2v_N}{dt^2} = \frac{d^2\hat{v}_N}{d\omega^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}$$

über in die Grenzschichtgleichung

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d^2\hat{v}_N}{d\omega^2} + \frac{(2-\varepsilon\omega)}{\varepsilon} \frac{d\hat{v}_N}{d\omega} + \hat{v}_N = 0$$

bzw.

$$\frac{d^2\hat{v}_N}{d\omega^2} + 2 \frac{d\hat{v}_N}{d\omega} + \varepsilon \left(\hat{v}_N - \omega \frac{d\hat{v}_N}{d\omega} \right) = 0.$$

Mit dem Ansatz $\hat{v}_N(\omega, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N h_j(\omega) \varepsilon^j$ ergibt sich hieraus durch Koeffizientenvergleich bezüglich ε das rekursive System

$$\begin{aligned} h_0''(\omega) + 2h_0'(\omega) &= 0 \\ h_j''(\omega) + 2h_j'(\omega) &= \omega h_{j-1}'(\omega) - h_{j-1}(\omega) \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Von der Funktion $\hat{v}_N(\omega, \varepsilon)$ fordern wir

1. Die Erfüllung der RB im rechten Randpunkt: Wegen

$$\begin{aligned} v_N(t, \varepsilon) &= x(t, \varepsilon) - g_0(t) \quad \text{folgt für } t = 1 \\ v_N(1, \varepsilon) &= x(1, \varepsilon) - g_0(1) = \beta - 2\alpha. \end{aligned}$$

Entsprechend der Variablenstreckung $\omega = \frac{1-t}{\varepsilon}$ ist $\omega = 0$ für $t = 1$. Somit gilt

$$v_N(t, \varepsilon)|_{t=1} = \hat{v}_N(\omega, \varepsilon)|_{\omega=0} = \sum_{j=0}^N h_j(0) \varepsilon^j = \beta - 2\alpha.$$

Koeffizientenvergleich bezüglich ε liefert die RB

$$\begin{aligned} h_0(0) &= \beta - 2\alpha \\ h_j(0) &= 0 \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

2. Die Erfüllung der Abklingbedingung: Außerhalb der GS soll der Einfluss der GSF vernachlässigbar klein sein. Die GS ist hier die linke ε -Umgebung des Punktes $t = 1$, d.h. es muss gelten

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +0 \\ t < 1}} v_N(t, \varepsilon) = 0.$$

Wegen $\frac{1-t}{\varepsilon}$ und $\varepsilon \ll 1$ ist dies der Fall, wenn wir die Erfüllung der Abklingbedingung

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} h_j(\omega) = 0 \quad j = 0, \dots, N$$

fordern. In der Tat, es gilt dann

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^N h_j(\omega) \varepsilon^j = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \hat{v}_N(\omega, \varepsilon) = \lim_{\substack{t \rightarrow +0 \\ t < 1}} v_N(t, \varepsilon) = 0.$$

Wir lösen das AWP

$$h_0''(\omega) + 2h_0'(\omega) = 0 \quad h_0(0) = \beta - 2\alpha \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} h_0(\omega) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$h_0(\omega) = C_1^0 + C_2^0 \exp(-2\omega).$$

Einsetzen in die RB liefert

$$\begin{aligned} h_0(0) &= C_1^0 + C_2^0 = \beta - 2\alpha \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} h_0(\omega) &= C_1^0 = 0 \end{aligned}$$

also $C_1^0 = 0$ und $C_2^0 = \beta - 2\alpha$ und

$$h_0(\omega) = (\beta - 2\alpha) \exp(-2\omega).$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$h_0\left(\frac{1-t}{\varepsilon}\right) = (\beta - 2\alpha) \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)\right).$$

Wir lösen das AWP

$$h_1''(\omega) + 2h_1'(\omega) = \omega h_0'(\omega) - h_0(\omega) \quad h_1(0) = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} h_1(\omega) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen DGL lautet

$$h_{1a}^h(\omega) = C_1^1 + C_2^1 \exp(-2\omega).$$

Die rechte Seite der DGL berechnet sich zu

$$\omega h_0'(\omega) - h_0(\omega) = -(\beta - 2\alpha)(2\omega + 1) \exp(-2\alpha).$$

Wir setzen zur Abkürzung $\kappa = \beta - 2\alpha$. Da $\lambda = -2$ eine einfache Wurzel des charakteristischen Polynoms der zugeordneten homogenen DGL ist, wird eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL wie folgt angesetzt

$$h_{1s}^{inh}(\omega) = \omega (q_1 \omega + q_0) \exp(-2\omega) = (q_1 \omega^2 + q_0 \omega) \exp(-2\omega).$$

Wir differenzieren den letzten Ausdruck zweimal

$$\begin{aligned} h_{1s}^{inh}(\omega) &= [-2q_1 \omega^2 + (2q_1 - 2q_0)\omega + q_0] \exp(-2\omega) \\ h_{1s}^{inh}(\omega) &= [4q_1 \omega^2 + (4q_0 - 8q_1)\omega + (2q_1 - 4q_0)] \exp(-2\omega), \end{aligned}$$

setzen die Ableitungen in die DGL ein, kürzen $\exp(-2\omega)$ und erhalten

$$\begin{aligned} &[4q_1 \omega^2 + (4q_0 - 8q_1)\omega + (2q_1 - 4q_0)] + [-4q_1 \omega^2 + (4q_1 - 4q_0)\omega + 2q_0] \\ &= -\kappa(2\omega + 1) - 4q_1 \omega + (2q_1 - 2q_0) = -2\kappa\omega - \kappa. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich in ω ergibt sich

$$q_1 = \frac{\kappa}{2} \quad q_0 = \kappa.$$

Für die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL erhält man nun

$$h_1(\omega) = h_{1a}^{inh}(\omega) = h_{1a}^h(\omega) + h_{1s}^{inh}(\omega) = C_1^1 + [C_2^1 + \kappa\omega + \frac{\kappa}{2}\omega^2] \exp(-2\omega).$$

Einsetzen in die RB liefert

$$\begin{aligned} h_1(0) &= C_1^1 + C_2^1 = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow +0} h_1(\omega) &= C_1^1 = 0, \end{aligned}$$

also $C_1^1 = C_2^1 = 0$ und

$$h_1(\omega) = [(\beta - 2\alpha)\omega + \frac{(\beta - 2\alpha)}{2}\omega^2] \exp(-2\omega).$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$h_1\left(\frac{1-t}{\varepsilon}\right) = \left[(\beta - 2\alpha) \frac{(1-t)}{\varepsilon} + \frac{(\beta - 2\alpha)}{2} \frac{(1-t)^2}{\varepsilon^2} \right] \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)\right).$$

Für $N=1$ erhält man eine asymptotische Darstellung der exakten Lösung des RWP (2.17), (2.18) in der Gestalt

$$\begin{aligned} x_1(t, \varepsilon) &= g_0(t) + h_0\left(\frac{1-t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon h_1\left(\frac{1-t}{\varepsilon}\right) \\ &= \alpha(1+t) + (\beta - 2\alpha) \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)\right) + \\ &+ \varepsilon \left[(\beta - 2\alpha) \frac{(1-t)}{\varepsilon} + \frac{(\beta - 2\alpha)}{2} \frac{(1-t)^2}{\varepsilon^2} \right] \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)\right). \end{aligned}$$

Die RB im rechten Randpunkt wird exakt erfüllt, denn

$$x_1(1, \varepsilon) = 2\alpha + (\beta - 2\alpha) = \beta,$$

Die RB im linken Randpunkt wird nur asymptotisch für $\varepsilon \rightarrow 0$ erfüllt, denn

$$x_1(0, \varepsilon) = \alpha + (\beta - 2\alpha) \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \left[\frac{(\beta - 2\alpha)}{\varepsilon} + \frac{(\beta - 2\alpha)}{2\varepsilon^2} \right] \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon}\right)$$

und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} x_1(0, \varepsilon) = \alpha.$$

Außerdem gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} x_1(t, \varepsilon) = \begin{cases} \alpha(1+t) & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ \beta & \text{für } t = 1. \end{cases}$$

Wir überprüfen mit welcher Genauigkeit die gefundene asymptotische Darstellung $x_1(t, \varepsilon)$ der exakten Lösung die DGL (2.17) erfüllt. Mit $\kappa = \beta - 2\alpha$ nimmt $x_1(t, \varepsilon)$ die Gestalt

$$x_1(t, \varepsilon) = \alpha(1+t) + \kappa \exp\left(2\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right) \left[2-t + \frac{1}{2} \frac{(t-1)^2}{\varepsilon}\right]$$

an. Zweimalige Differentiation liefert

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t, \varepsilon) &= \alpha + \kappa \exp\left(2\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right) \left[-1 + \frac{3}{\varepsilon} - \frac{t}{\varepsilon} + \frac{(t-1)^2}{\varepsilon^2}\right] \\ \ddot{x}_1(t, \varepsilon) &= \kappa \exp\left(2\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right) \left[-\frac{3}{\varepsilon} + \frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon^3}(t-1)^2\right]. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen in die DGL und elementaren Umformungen erhält man

$$\begin{aligned} &\varepsilon \ddot{x}_1(t, \varepsilon) - (1+t) \dot{x}_1(t, \varepsilon) + x_1(t, \varepsilon) \\ &= \varepsilon \kappa \exp\left(2\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right) \left[-\frac{3}{\varepsilon} + \frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon^3}(t-1)^2\right] \\ &- (1+t) \left\{ \alpha + \kappa \exp\left(2\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right) \left[-1 + \frac{3}{\varepsilon} - \frac{t}{\varepsilon} + \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)^2\right] \right\} \\ &+ \alpha(1+t) + \kappa \exp\left(2\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right) \left[2-t + \frac{1}{2} \frac{(t-1)^2}{\varepsilon}\right] \\ &= \varepsilon \kappa \exp\left(2\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)^3\right]. \end{aligned}$$

Subtrahiert man diese DGL von der exakten DGL (2.17), so gewinnt man für die Differenz $\tilde{x}(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - x_1(t, \varepsilon)$ die DGL

$$\varepsilon \ddot{\tilde{x}}(t, \varepsilon) - (1+t)\dot{\tilde{x}}(t, \varepsilon) + \tilde{x}(t, \varepsilon) = -\varepsilon \kappa \exp\left(\frac{2(t-1)}{\varepsilon}\right) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)^3 \right].$$

Außerdem gilt $\tilde{x}(1, \varepsilon) = 0$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{x}(0, \varepsilon) = 0$. Wir bezeichnen mit

$$L_2 := \varepsilon \frac{d^2}{dt^2} - (1+t) \frac{d}{dt} + I$$

den Differentialoperator mit homogenen RB (I bezeichnet den Einheitsoperator) und mit

$$R_1(t, \varepsilon) = -\kappa \exp\left(2 \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)^3 \right]$$

das Restglied. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_1(0, \varepsilon) &= -\kappa \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon}\right) \left[\frac{3}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^3} \right] = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_1(1, \varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $R_1(t, \varepsilon)$ bezüglich ε und t beschränkt ist, d.h.

$$|R_1(t, \varepsilon)| \leq c \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \text{ und alle } \varepsilon \in]0, 1]$$

gilt, wobei die Konstante c nur von κ abhängt. Aus diesem Grunde bestimmen wir die Extremwerte der Funktion $R_1(t, \varepsilon)$ bezüglich t . Die ersten beiden Ableitungen haben die Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(t, \varepsilon) &= -\kappa \exp\left(2 \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right) \left[\frac{3(t-1)}{\varepsilon^2} - \frac{2(t-1)^3}{\varepsilon^4} \right], \\ \ddot{R}_1(t, \varepsilon) &= -\kappa \exp\left(2 \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right) \left[\frac{3}{\varepsilon^2} + \frac{6(t-1)}{\varepsilon^3} - \frac{6(t-1)^2}{\varepsilon^4} - \frac{4(t-1)^3}{\varepsilon^5} \right]. \end{aligned}$$

Aus $\dot{R}_1(t, \varepsilon) = 0$ erhält man mit

$$(t-1)(3\varepsilon^2 - 2(t-1)^2) = 0$$

die stationären Punkte $t_1 = 1$, $t_2 = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon$, $t_3 = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon$, wobei t_3 entfällt, da der Punkt außerhalb des Intervalls liegt. Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(t_1, \varepsilon) &= -\kappa \frac{3}{\varepsilon^2} \neq 0 \quad \text{für } \kappa \neq 0 \text{ mit } R_1(t_1, \varepsilon) = 0 \text{ und} \\ \ddot{R}_1(t_2, \varepsilon) &= -\kappa \exp\left(-2\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \left(-\frac{6}{\varepsilon^2}\right) \neq 0 \quad \text{für } \kappa \neq 0 \text{ mit} \\ R_1(t_2, \varepsilon) &= -\kappa \exp\left(-\sqrt{6}\right) \left[-\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{6}\right]. \end{aligned}$$

Somit hängt der maximale bzw. minimale Wert von $R_1(t, \varepsilon)$ nicht von ε ab und es gilt

$$|R_1(t, \varepsilon)| \leq c,$$

wobei die Konstante c nur von den RB abhängt.

Für das Weitere benötigen wir eine a-priori Abschätzung der Lösung des RWP (2.17) (2.18) in der Form

$$\|\tilde{x}\|_E \leq k \|L_2 \tilde{x}\|_F,$$

wobei die Konstante k nicht von \tilde{x} abhängt und E und F ein geeignetes Paar von Banachräumen ist. Dann gilt

$$\|\tilde{x}\|_E \leq k \|L_2 \tilde{x}\|_F = k \|-\varepsilon R_1(t, \varepsilon)\|_F = \varepsilon k \|R_1(t, \varepsilon)\|_F,$$

d.h. der Abstand der exakten Lösung $x(t, \varepsilon)$ von der asymptotischen Lösung $x_1(t, \varepsilon)$ in der Norm des Banachraumes E lässt sich abschätzen durch $\varepsilon k \|R_1(t, \varepsilon)\|_F$. Betrachtet man eine asymptotische Entwicklung der Lösung bis zum N -ten Term, so lautet die Abschätzung

$$\|\tilde{x}\|_E \leq \varepsilon^N k \|R_N(t, \varepsilon)\|_F.$$

Beispiel 2.2 Wir berechnen die Konzentrationsänderung eines eindimensionalen stationären Strömungsreaktors für PECLETzahlen $Pe \leq 1$. Aus Gleichung (1.41) (Kapitel 1.6 4. erhält man mit $\varepsilon = \frac{1}{Pe} = \frac{D}{wL}$ und $z = \frac{x}{l}$, $C = \frac{c}{c_0}$

$$\varepsilon \frac{d^2 C(z, \varepsilon)}{dz^2} - \frac{dC(z, \varepsilon)}{dz} - R(C(z, \varepsilon)) = 0 \quad (2.19)$$

$$C(0, \varepsilon) - \varepsilon \frac{dC(0, \varepsilon)}{dz} = 1 \quad \frac{dC(1, \varepsilon)}{dz} = 0. \quad (2.20)$$

1. SCHRITT: Bestimmung der GAL

Der Koeffizient bei der ersten Ableitung in (2.19) ist negativ. Folglich besitzt die Lösung des RWP (2.19), (2.20) in einer Umgebung des rechten Randpunktes $z=1$ eine GS. Die GAL wird folglich durch die RB im linken Randpunkt $z=0$ festgelegt. Für die GAL machen wir den Ansatz

$$u_N(z, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N g_j(z) \varepsilon^j. \quad (2.21)$$

Zur Linearisierung der DGL (2.19) ist der Reaktionsterm $R(C(z))$ an einer geeigneten Stelle nach TAYLOR zu entwickeln. Als Entwicklungsstelle wählen wir $u_N(z, 0) = g_0(z) := g_0$, welche das Konzentrationsprofil eines idealen Strömungsreaktors ist, von dem sich der Strömungsreaktor unseres Problems bei $Pe \gg 1$ nur wenig unterscheidet. Damit ist

$$R(C) = R(g_0) + R'(g_0)(C - g_0) + \dots$$

Dabei sind $R(g_0), R'(g_0)$ ebenfalls Funktionen in z . Anstelle der DGL (2.19) legen wir für die Bestimmung der GAL das folgende Ersatzproblem zugrunde

$$\varepsilon C''(z, \varepsilon) - C'(z, \varepsilon) - R'(g_0(z))(C(z, \varepsilon) - g_0) = R(g_0(z)). \quad (2.22)$$

Nach Einsetzen von (2.21) in (2.22) erhält man

$$\varepsilon \sum_{j=0}^N g_j''(z) \varepsilon^j - \sum_{j=0}^N g_j'(z) \varepsilon^j - R'(g_0)(u_N(z, \varepsilon) - g_0) = R(g_0).$$

Unter Berücksichtigung von

$$u_N(z, \varepsilon) - g_0 = \sum_{j=0}^N g_j(z) \varepsilon^j$$

ergibt sich

$$\sum_{j=0}^N g_j''(z) \varepsilon^{j+1} - \sum_{j=0}^N g_j'(z) \varepsilon^j - R'(g_0) \sum_{j=1}^N g_j(z) \varepsilon^j = R(g_0)$$

und durch Ordnen nach ε -Potenzen

$$-[g_j'(z) + R(g_0)] + \sum_{j=1}^N [g_{j-1}''(z) - g_j'(z) - R'(g_0) g_j(z)] \varepsilon^j = -\varepsilon^{N+1} g_N''(z).$$

Zur Berechnung der Funktionen $g_j(z)$ in (2.21) erhält man das rekursive System

$$\begin{aligned} g_0'(z) + R(g_0(z)) &= 0, \\ g_j'(z) + R'(g_0) g_j(z) &= g_{j-1}''(z) \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Die AB für die $g_j(z)$ findet man aus

$$u_N(0, \varepsilon) - \varepsilon u_N'(0, \varepsilon) - 1 = [g_0(0) - 1] + \sum_{j=1}^N [g_j(0) - g_{j-1}'(0)] \varepsilon^j = 0,$$

woraus

$$\begin{aligned} g_0(0) &= 1 && \text{und} \\ g_j(0) &= g_{j-1}'(0) && \text{für } j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

folgt. Für $g_0(z)$ erhält man das AWP

$$g_0'(z) + R(g_0(z)) = 0 \quad g_0(0) = 1. \quad (2.23)$$

Nach Trennung der Veränderlichen findet man

$$\frac{dg_0}{R(g_0)} = -dz,$$

woraus für eine gegebene Funktion $R(C)$ der erste Term der GAL berechnet werden kann. Für $g_1(z)$ erhält man das AWP

$$g_1'(z) + R'(g_0) g_1(z) = g_0''(z) \quad g_1(0) = g_0'(0).$$

Unter Benutzung von $g_0'(z) = -R(g_0)$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{dg_0} \frac{dg_0}{dz} + R'(g_0) g_1 &= -\frac{dR}{dg_0} \frac{dg_0}{dz} \quad \text{oder} \\ -\frac{dg_1}{dg_0} R(g_0) + R'(g_0) g_1 &= R'(g_0) R(g_0). \end{aligned}$$

Dividiert man diesen Ausdruck durch $[R(g_0)]^2$, so findet man schließlich

$$-\frac{d}{dg_0} \left(\frac{g_1}{R} \right) = \frac{R'(g_0)}{R(g_0)} = \frac{d \ln |R(g_0)|}{dg_0},$$

woraus sich durch Integration

$$g_1(z) = R(g_0(z)) [D - \ln |R(g_0(z))|]$$

mit einer beliebigen Konstanten D ergibt. Aus der AB

$$g_1(0) = R(g_0(0)) [D - \ln |R(g_0(0))|] = g_0'(0) = -R(g_0(0))$$

folgt $D = \ln |R(g_0(0))| - 1$.

Beschränkt man sich auf $N=1$, so hat die GAL die Gestalt

$$\begin{aligned} u_1(z, \varepsilon) &= g_0(z) + g_1(z) \varepsilon \\ &= g_0(z) + \varepsilon R(g_0(z)) [\ln |R(g_0(0))| - 1 - \ln |R(g_0(z))|]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2. SCHRITT: Bestimmung der GSF

Setzt man die GAL anstelle von $C(z, \varepsilon)$ in die DGL (2.22) ein, so erhält man

$$\varepsilon u_1''(z, \varepsilon) - u_1'(z, \varepsilon) - R'(g_0(z)) (u_1(z, \varepsilon) - g_0(z)) = R(g_0(z)) + \varepsilon^2 g_1''(z).$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der DGL (2.22) ergibt sich mit

$$v_N(z, \varepsilon) = C(z, \varepsilon) - u_1(z, \varepsilon)$$

die Fehlergleichung

$$\varepsilon v_N''(z, \varepsilon) - v_N'(z, \varepsilon) - R'(g_0(z)) v_N(z, \varepsilon) = -\varepsilon^2 g_1''(z).$$

Mit der Variablenstreckung

$$\omega = \frac{1-z}{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad z = 1 - \varepsilon \omega$$

geht die letzte DGL über in die Grenzschichtgleichung

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2 \hat{v}_N}{d\omega^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\hat{v}_N}{d\omega} - R'(g_0(z)) \hat{v}_N(\omega, \varepsilon) &= -\varepsilon^2 g_1''(z) \quad \text{bzw.} \\ \frac{d^2 \hat{v}_N}{d\omega^2} + \frac{d\hat{v}_N}{d\omega} - \varepsilon R'(g_0(z)) \hat{v}_N(\omega, \varepsilon) &= -\varepsilon^3 g_1''(z). \end{aligned}$$

Zur Linearisierung der letzten DGL wird der Koeffizient $R'(g_0(z))$ nach Potenzen von $(1-z)$ entwickelt:

$$R'(g_0(z)) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i (1-z)^i = \sum_{i=0}^{\infty} r_i \omega^i \varepsilon^i.$$

Mit dem Ansatz

$$\hat{v}_1(\omega, \varepsilon) = h_0(\omega) + h_1(\omega) \varepsilon$$

ergeben sich durch Koeffizientenvergleich in ε aus der Grenzschichtgleichung für die GSF $h_0(\omega)$ und $h_1(\omega)$ die DGL

$$\begin{aligned} h_0'' + h_0' &= 0 \\ h_1'' + h_1' &= r_0 h_0. \end{aligned}$$

Dem Punkt $z=1$ entspricht $\omega = 0$. Aus der RB $\frac{dC(1)}{dz} = 0$ in (2.20) erhält man deshalb wegen $C_1(z, \varepsilon) = u_1(z, \varepsilon) + v_1(z, \varepsilon) = u_1(z, \varepsilon) + \hat{v}_1(\omega, \varepsilon)$

$$\frac{dC(1, \varepsilon)}{dz} = \frac{du_1(1, \varepsilon)}{dz} + \frac{dv_1(1, \varepsilon)}{dz} = \frac{du_1(1, \varepsilon)}{dz} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{dh_0(0)}{d\omega} - \frac{dh_1(\omega)}{d\omega} = 0.$$

Wir setzen $\frac{dh_0(0)}{d\omega} = 0$, und $\frac{dh_1(0)}{d\omega} = \frac{du_1(1, \varepsilon)}{dz}$. Weiterhin müssen die Funktionen h_k ($k = 0, 1$) der Abklingbedingung

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} h_k(\omega) = 0$$

genügen. Wir lösen das AWP

$$h_0'' + h_0' = 0 \quad \frac{dh_0(0)}{d\omega} = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} h_0(\omega) = 0.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$h_0(\omega) = C_1 + C_2 \exp(-\omega).$$

Die Abklingbedingung liefert zunächst $C_1 = 0$. Aus $\frac{dh_0(0)}{d\omega} = 0$ folgt $C_2 = 0$ und somit $h_0(\omega) \equiv 0$. Damit ist im nächsten Schritt ein AWP für eine homogene DGL zu lösen:

$$h_1'' + h_1' = 0 \quad \frac{dh_1(0)}{d\omega} = \frac{du_1(1, \varepsilon)}{dz} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} h_1(\omega) = 0.$$

Die allgemeine Lösung hat wieder die Gestalt

$$h_1(\omega) = D_1 + D_2 \exp(-\omega),$$

woraus wegen der Abklingbedingung $D_1 = 0$ folgt. Für D_2 ergibt sich

$$\frac{dh_1(0)}{d\omega} = -D_2 = \frac{du_1(1, \varepsilon)}{dz}.$$

Wir berechnen $\frac{du_1(1, \varepsilon)}{dz}$. Zunächst ist wegen (2.24)

$$\begin{aligned} \frac{du_1(z, \varepsilon)}{dz} &= g_0'(z) + \varepsilon g_1'(z) \\ &= g_0'(z) + \varepsilon R'(g_0(z)) g_0'(z) \left[\ln \left| \frac{R(g_0(0))}{R(g_0(z))} \right| - 1 \right] \\ &\quad + \varepsilon R(g_0(z)) \left(-\frac{R'(g_0(z))}{R(g_0(z))} g_0'(z) \right) \\ &= g_0'(z) \left(1 + \varepsilon R'(g_0(z)) \left[\ln \left| \frac{R(g_0(0))}{R(g_0(z))} \right| - 2 \right] \right). \end{aligned}$$

Mit (2.23) ist $g'_0(z) = -R(g_0(z))$, also

$$\frac{du_1(z, \varepsilon)}{dz} = -R(g_0(z)) \left(1 + \varepsilon R'(g_0(z)) \left[\ln \left| \frac{R(g_0(0))}{R(g_0(z))} \right| - 2 \right] \right).$$

Schließlich erhält man

$$D_2 = -\frac{du_1(1, \varepsilon)}{dz} = R(g_0(1)) \left(1 + \varepsilon R'(g_0(1)) \left[\ln \left| \frac{R(g_0(0))}{R(g_0(1))} \right| - 2 \right] \right)$$

und

$$h_1(\omega) = R(g_0(1)) \left(1 + \varepsilon R'(g_0(1)) \left[\ln \left| \frac{R(g_0(0))}{R(g_0(1))} \right| - 2 \right] \right) \exp(-\omega)$$

bzw. nach Rücksubstitution

$$h_1\left(\frac{1-z}{\varepsilon}\right) = R(g_0(1)) \left(1 + \varepsilon R'(g_0(1)) \left[\ln \left| \frac{R(g_0(0))}{R(g_0(1))} \right| - 2 \right] \right) \exp\left(-\left(\frac{1-z}{\varepsilon}\right)\right). \quad (2.25)$$

Das erste Glied der Asymptotik eines eindimensionalen Strömungsreaktors mit $\frac{1}{Pe} = \varepsilon \ll 1$ hat somit die Gestalt

$$C_1(z, \varepsilon) = u_1(z, \varepsilon) + v_1(z, \varepsilon) = g_0(z) + \varepsilon g_1(z) + \varepsilon h_1\left(\frac{1-z}{\varepsilon}\right)$$

mit $u_1(z, \varepsilon)$ in der Form (2.24) und $h_1\left(\frac{1-z}{\varepsilon}\right)$ in der Form (2.25). Die RB im rechten Randpunkt wird exakt erfüllt, denn es ist wegen (2.23)–(2.25)

$$\begin{aligned} \frac{dC_1(z, \varepsilon)}{dz} &= g'_0(z) + \varepsilon g'_1(z) + h'_1\left(\frac{1-z}{\varepsilon}\right) \\ &= -R(g_0(z)) \left(1 + \varepsilon R'(g_0(z)) \left[\ln \left| \frac{R(g_0(0))}{R(g_0(z))} \right| - 2 \right] \right) \\ &\quad + R(g_0(1)) \left(1 + \varepsilon R'(g_0(1)) \left[\ln \left| \frac{R(g_0(0))}{R(g_0(1))} \right| - 2 \right] \right) \exp\left(-\left(\frac{1-z}{\varepsilon}\right)\right) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \frac{dC_1(1, \varepsilon)}{dz} &= g'_0(1) + \varepsilon g'_1(1) + h'_1(0) \\ &= -R(g_0(1)) \left(1 + \varepsilon R'(g_0(1)) \left[\ln \left| \frac{R(g_0(0))}{R(g_0(1))} \right| - 2 \right] \right) \\ &\quad + R(g_0(1)) \left(1 + \varepsilon R'(g_0(1)) \left[\ln \left| \frac{R(g_0(0))}{R(g_0(1))} \right| - 2 \right] \right) = 0. \end{aligned}$$

Die RB im linken Randpunkt ist asymptotisch erfüllt, denn aus

$$C_1(0, \varepsilon) - \varepsilon \frac{dC_1(0, \varepsilon)}{dz} = g_0(0) + \varepsilon g_1(0) + \varepsilon h_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - \varepsilon g'_0(0) - \varepsilon^2 g'_1(0) - \varepsilon^2 h'_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

folgt wegen

$$\begin{aligned} g_0(0) &= 1, \\ g_1(0) &= g'_0(0), \\ g'_1(0) &= -2R'(1) g_1(0), \\ h_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) &= \varepsilon h'_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

die Beziehung

$$C_1(0, \varepsilon) - \varepsilon \frac{dC_1(0, \varepsilon)}{dz} = 1 + 2\varepsilon^2 R'(1) g_1(0).$$

Aufgabe 2.1 Werten Sie die asymptotische Lösungsdarstellung

$$C_1(z, \varepsilon) = g_0(z) + \varepsilon g_1(z) + \varepsilon h_1\left(\frac{1-z}{\varepsilon}\right)$$

aus Beispiel 2.2 für den nichtlinearen Term $R(C(z)) = [C(z)]^2$ aus.

2.2 AWP für lineare DGL 2.Ordnung

Aufgabenstellung: Wir betrachten die DGL (2.1) mit den AB

$$x(0, \varepsilon) = \alpha \quad \dot{x}(0, \varepsilon) = \alpha_1 \tag{2.26}$$

unter den Voraussetzungen (ii) und (iii).

Wegen $a(t) > 0$ tritt in der Umgebung des Punktes $t=0$ eine GS auf. Für die GAL $u_N(t, \varepsilon)$ und die GSF $v_N(t, \varepsilon)$ macht man wieder die Reihenansätze

$$u_N(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N g_j(t) \varepsilon^j, \quad \hat{v}_N(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N h_j(\tau) \varepsilon^j$$

und erhält analog wie beim RWP für die unbestimmt eingeführten Funktionen $g_j(t)$ sowie $h_j(\tau)$ die rekursiven Systeme (2.6) und (2.11), wobei eine Variablenstreckung der Form $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ durchgeführt wurde. Die AB der beiden rekursiven Systeme sind miteinander verknüpft, so dass die Bestimmung von $g_j(t)$ und $h_j(\tau)$ schrittweise im Wechsel vorgenommen werden muss. Wegen

$$x_N(t, \varepsilon) = u_N(t, \varepsilon) + \hat{v}_N(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N [g_j(t) + h_j(\tau)] \varepsilon^j$$

folgt zunächst aus der AB an der Stelle $t=0$

$$x_N(0, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N [g_j(0) + h_j(0)] \varepsilon^j = \alpha.$$

Diese Forderung an die Funktionen $g_j(t)$ und $h_j(\tau)$ wird erfüllt, wenn wir

$$\begin{aligned} g_0(0) + h_0(0) &= \alpha \\ g_j(0) + h_j(0) &= 0 \quad j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

festlegen. Entsprechend erhalten wir wegen $\frac{dh_j}{dt} = \frac{dh_j}{d\tau} \frac{1}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}\frac{dx_N(t, \varepsilon)}{dt} &= \sum_{j=0}^N \left[\frac{dg_j(t)}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dh_j(\tau)}{d\tau} \right] \varepsilon^j \\ \dot{x}_N(0, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^N \left[\dot{g}_j(0) + \frac{1}{\varepsilon} h'_j(0) \right] \varepsilon^j = \alpha_1\end{aligned}$$

bzw.

$$\dot{x}_N(0, \varepsilon) = \frac{h'_0(0)}{\varepsilon} + \sum_{j=0}^{N-1} \left[\dot{g}_j(0) + h'_{j+1}(0) \right] \varepsilon^j + \dot{g}_N(0) \varepsilon^N = \alpha_1.$$

Wählen wir $h'_0(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}\dot{g}_0(0) + h'_1(0) &= \alpha_1 \\ \dot{g}_j(0) + h'_{j+1}(0) &= 0 \quad (j = 1, \dots, N-1),\end{aligned}$$

so wird die zweite AB asymptotisch für $\varepsilon \rightarrow 0$ durch

$$\dot{x}_N(0) = \alpha_1 + \varepsilon^N \dot{g}_N(0)$$

erfüllt. Mit diesen Festlegungen können nun die rekursiven Systeme (2.6) und (2.11) sukzessive gelöst werden.

1. SCHRITT: Berechnung von $h_0(\tau)$

Gemäß (2.11) ist das Problem

$$h''_0(\tau) + a_0^0 h'_0(\tau) = 0, \quad h'_0(0) = 0 \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_0(\tau) = 0$$

zu lösen und anschließend $g_0(0)$ aus der Bedingung $g_0(0) = \alpha - h_0(0)$ zu berechnen. Die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{aligned}h_0(\tau) &= h_{0a}^h(\tau) = C_1^0 + C_2^0 \exp(-a_0^0 \tau) \\ h'_0(\tau) &= -C_2^0 a_0^0 \exp(-a_0^0 \tau).\end{aligned}$$

Aus $h'_0(0) = 0$ folgt $C_2^0 = 0$ und aus der Abklingbedingung erhält man $C_1^0 = 0$ somit ist $h_0(\tau) \equiv 0$, wodurch die AB $g_0(0) = \alpha$ festgelegt wird.

2. SCHRITT: Berechnung von $g_0(t)$

Gemäß (2.6) ist das AWP

$$a(t) \dot{g}_0(t) + b(t) g_0(t) = f(t), \quad g_0(0) = \alpha$$

zu lösen. Es liegt eine lineare inhomogene DGL 1. Ordnung vor. Die zugehörige homogene DGL wird durch Variablentrennung gelöst:

$$g_{0a}^h(t) = C_1^0 \exp\left(-\int_0^t \frac{b(s)}{a(s)} ds\right).$$

Nach Konstantenvariation ergibt sich

$$g_{0a}^{inh}(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{b(s)}{a(s)} ds\right) \left[C_0 + \int_0^t \exp\left(\int_0^s \frac{b(z)}{a(z)} dz\right) \frac{f(s)}{a(s)} ds \right]$$

und nach Einsetzen in die AB

$$g_0(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{b(s)}{a(s)} ds\right) \left[\alpha + \int_0^t \exp\left(\int_0^s \frac{b(z)}{a(z)} dz\right) \frac{f(s)}{a(s)} ds \right].$$

Mittels Differentiation wird daraus eine AB für den nächsten Schritt berechnet:

$$\dot{g}_0(0) = \frac{f(0) - \alpha b(0)}{a(0)}.$$

3. SCHRITT: Berechnung von $h_1(\tau)$

Die Funktion $h_1(\tau)$ genügt nach (2.11) dem Problem

$$h_1''(\tau) + a_0^0 h_1'(\tau) = -[a_1^0 \tau h_0'(\tau) + b_0^0 h_0(\tau)] \quad h_1'(0) = \alpha_1 - g_0'(0) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_1(\tau) = 0.$$

Da $h_0(\tau) \equiv 0$ ist, reduziert sich die DGL auf die zugeordnete homogene DGL. Die allgemeine Lösung ist wieder

$$\begin{aligned} h_1(\tau) &= h_{1a}^h(\tau) = C_1^1 + C_2^1 \exp(-a_0^0 \tau) \\ h_1'(\tau) &= -C_2^1 a_0^0 \exp(-a_0^0 \tau). \end{aligned}$$

Aus $h_1'(0) = \alpha_1 - \dot{g}_0(0)$ folgt $C_2^1 = \frac{\dot{g}_0(0) - \alpha_1}{a_0^0} = \alpha_2$. Die Abklingbedingung liefert $C_1^1 = 0$ und somit

$$h_1(\tau) = \alpha_2 \exp(-a_0^0 \tau) = \frac{\dot{g}_0(0) - \alpha_1}{a_0^0} \exp(-a_0^0 \tau),$$

woraus man aus $g_1(0) + h_1(0) = 0$ schließlich $g_1(0) = -\alpha_2$ erhält.

4. SCHRITT: Berechnung von $g_1(t)$

Die Funktion $g_1(t)$ genügt dem AWP

$$a(t) \dot{g}_1(t) + b(t) g_1(t) = -\ddot{g}_0(t) \quad g_1(0) = -\alpha_2.$$

Dies ist wieder eine lineare inhomogene DGL 1. Ordnung mit bekannter rechter Seite $\ddot{g}_0(t)$. Die Funktion $g_1(t)$ kann daher völlig analog wie $g_0(t)$ bestimmt werden. Aus der sich ergebenden Lösung wird die AB $\dot{g}_1(0)$ zur Berechnung von $h_2(\tau)$ ermittelt.

In analoger Weise kann der Algorithmus je nach gewünschter Genauigkeit der asymptotischen Lösung $x_N(t, \varepsilon)$ fortgesetzt werden. Für $N = 1$ ist

$$x_1(t, \varepsilon) = g_0(t) + h_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \left[g_1(t) + h_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right]$$

eine asymptotische Darstellung der exakten Lösung des AWP (2.1), (2.26). Dabei wird die AB $x(0, \varepsilon) = \alpha$ exakt erfüllt, während $\dot{x}(0, \varepsilon) = \alpha_1$ nur asymptotisch für kleine ε befriedigt wird:

$$\dot{x}_1(0, \varepsilon) = \alpha_2 + \varepsilon \dot{g}_1(0).$$

Allgemein besteht der j -te ($j > 1$) Gesamtschritt des Lösungsalgorithmus für AWP aus zwei Einzelschritten:

1. Berechnung der $h_j(\tau)$ aus dem System (2.11) zur Ermittlung der GSF unter den Zusatzbedingungen

$$h_j'(0) = -\dot{g}_{j-1}(0) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_j(\tau) = 0,$$

woraus anschließend die AB für die Funktion $g_j(t)$ berechnet wird:

$$g_j(0) = -h_j(0).$$

2. Berechnung von $g_j(t)$ aus dem System (2.6) der GAL mit der AB $g_j(0) = -h_j(0)$. Daraus lässt sich nun $\dot{g}_j(0)$ berechnen und mit $h'_{j+1}(0) = -\dot{g}_j(0)$ kann der $(j+1)$ -te Gesamtschritt des Algorithmus durchgeführt werden.

2.3 RWP für DGL höherer Ordnung

Wir betrachten ein RWP für eine lineare DGL n-ter Ordnung

$$L_n^\varepsilon x(t, \varepsilon) = L_{n-m}^\varepsilon x(t, \varepsilon) + L_m x(t, \varepsilon) = f(t) \quad t \in [0, 1]. \quad (2.27)$$

Hierbei bezeichne

$$L_{n-m}^\varepsilon x = \sum_{k=1}^{n-m} \varepsilon^k a_k(t) x^{(m+k)} \quad (2.28)$$

$$= \varepsilon a_1 x^{(m+1)} + \varepsilon^2 a_2 x^{(m+2)} + \dots + \varepsilon^{n-m} a_{n-m} x^{(n)},$$

$$L_m x = \sum_{l=0}^m b_l(t) x^{(m-l)} = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x. \quad (2.29)$$

OBdA setzen wir $a_{n-m}(t) = 1$ für alle $t \in [0, 1]$. Der DGL (2.27) seien die RB

$$\begin{aligned} x^{(i)}(0, \varepsilon) &= 0 & i &= 0, 1, \dots, r-1, \\ x^{(j)}(1, \varepsilon) &= 0 & j &= 0, 1, \dots, s-1 \end{aligned} \quad (2.30)$$

zugeordnet, wobei $r + s = n$ gelte. Zusammen mit (2.27) (2.30) betrachten wir das **entartete** Problem (bei $\varepsilon=0$):

$$L_m y(t) = f(t) \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} y^{(i)}(0) &= 0 & i &= 0, 1, \dots, r-p-1 & p &\leq r, \\ y^{(j)}(1) &= 0 & j &= 0, 1, \dots, s-p-1 & q &\leq s. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dabei sei $r - p + s - q = m$.

Voraussetzungen:

- (i) Das RWP (2.27), (2.30) sei eindeutig lösbar für alle hinreichend kleine $\varepsilon > 0$.
- (ii) Das **entartete** Problem (2.31), (2.32) sei eindeutig lösbar.

(iii) Die Koeffizienten $a_1(t), \dots, a_{n-(m-1)}(t)$ und $b_0(t), \dots, b_m(t)$ seien analytisch in $[0, 1]$.

Problem: Wie sind p und q zu wählen, um eine asymptotische Lösungsdarstellung des RWP (2.27), (2.30) für hinreichend kleine ε mit Hilfe der Methode der Grenzschichtverbesserung zu erhalten?

Wir führen in einer Umgebung des linken Randpunktes $t = 0$ die Variablenstreckung $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ in der homogenen DGL (2.27) durch. Man erhält mit $\frac{d^k x}{dt^k} = \frac{d^k \hat{x}}{d\tau^k} \frac{1}{\varepsilon^k}$

$$(L_n^\varepsilon)_0 \hat{x} = \sum_{k=1}^{n-m} \varepsilon^k a_k(\tau \varepsilon) \frac{d^{m+k} \hat{x}}{d\tau^{m+k}} \frac{1}{\varepsilon^{m+k}} + \sum_{l=0}^m b_l(\tau \varepsilon) \frac{d^{m-l} \hat{x}}{d\tau^{m-l}} \frac{1}{\varepsilon^{m-l}} = 0.$$

Multiplikation mit ε^m liefert

$$\varepsilon^m (L_n^\varepsilon)_0 \hat{x} = \sum_{k=1}^{n-m} a_k(\tau \varepsilon) \frac{d^{m+k} \hat{x}}{d\tau^{m+k}} + b_0(\tau \varepsilon) \frac{d^m \hat{x}}{d\tau^m} + \sum_{l=1}^m \varepsilon^l b_l(\tau \varepsilon) \frac{d^{m-l} \hat{x}}{d\tau^{m-l}} = 0.$$

Nach TAYLOR-Entwicklung der Koeffizienten an der Stelle $t = 0$ und Ordnen nach ε -Potenzen erhält man bei ε^0 die DGL

$$\hat{x}^{(n)} + a_{n-m-1}^0 \hat{x}^{(n-1)} + \dots + a_1^0 \hat{x}^{(m+1)} + b_0^0 \hat{x}^{(m)} = 0 \quad (2.33)$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$P_0(\lambda) = \lambda^m \left[\lambda^{n-m} + a_{n-m-1}^0 \lambda^{n-m-1} + \dots + a_1^0 \lambda + b_0^0 \right] = 0.$$

Analog führen wir in einer Umgebung des rechten Randpunktes $t = 1$ die Variablenstreckung $\omega = \frac{1-t}{\varepsilon}$ in der homogenen DGL (2.27) durch. Man erhält mit $\frac{d^k x}{dt^k} = \frac{d^k \hat{x}}{d\omega^k} \frac{(-1)^k}{\varepsilon^k}$

$$(L_{n-m}^\varepsilon)_1 \hat{x} = \sum_{k=1}^{n-m} \varepsilon^k a_k(1 - \varepsilon \omega) \frac{d^{m+k} \hat{x}}{d\omega^{m+k}} \frac{(-1)^{m+k}}{\varepsilon^{m+k}} + \sum_{l=0}^m (-1)^l \varepsilon^l b_l(1 - \varepsilon \omega) \frac{d^{m-l} \hat{x}}{d\omega^{m-l}} = 0.$$

Multiplikation mit ε^m liefert

$$\begin{aligned} \varepsilon^m (L_{n-m}^\varepsilon)_0 \hat{x} &= (-1)^m \left[\sum_{k=1}^{n-m} (-1)^k a_k(1 - \varepsilon \omega) \frac{d^{m+k} \hat{x}}{d\omega^{m+k}} + b_0(1 - \varepsilon \omega) \frac{d^m \hat{x}}{d\omega^m} \right] \\ &+ \sum_{l=1}^m b_l(\tau \varepsilon) \frac{d^{m-l} \hat{x}}{d\tau^{m-l}} \frac{1}{\varepsilon^{m-l}} = 0. \end{aligned}$$

Nach TAYLOR-Entwicklung der Koeffizienten an der Stelle $t = 1$ und Ordnen nach ε -Potenzen erhält man nun bei $\varepsilon = 0$ die DGL

$$(-1)^{n-m} \hat{x}^{(n)} + (-1)^{n-m-1} a_{n-m-1}^1 \hat{x}^{(n-1)} + \dots - a_1^1 \hat{x}^{(m+1)} + b_0^1 \hat{x}^{(m)} = 0 \quad (2.34)$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$P_1(\lambda) = \lambda^m \left[(-1)^{n-m} \lambda^{n-m} + (-1)^{n-m-1} a_{n-m-1}^1 \lambda^{n-m-1} + \dots - a_1^1 \lambda + b_0^1 \right] = 0.$$

Definition 2.1 Sei p die Anzahl der Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_0(\lambda) = 0$ mit $\operatorname{Re} \lambda < 0$ und q die Anzahl der Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_1(\lambda) = 0$ mit $\operatorname{Re} \lambda < 0$ (jeweils unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheiten). Das RWP (2.27), (2.30) heißt **regulär entartend** in das Problem (2.31), (2.32), falls p (q) gleich der Anzahl der RB in $t = 0$ ($t = 1$) ist, die beim Übergang von (2.27), (2.30) in (2.31), (2.32) nicht berücksichtigt wurden.

Auf Grund der Lösungsstruktur der DGL (2.33) bzw. (2.34) gibt es dann genau p Lösungen mit Abklingverhalten in einer Umgebung des linken Randpunktes und genau q Lösungen mit Abklingverhalten in einer Umgebung des rechten Randpunktes.

Für **regulär entartende** Probleme führt die Methode der Grenzschichtverbesserung zu einer asymptotischen Lösung.

Bemerkung 2.2 Verwendet man in einer Umgebung des Punktes $t = 1$ anstelle der Substitution $\omega = \frac{1-t}{\varepsilon}$ die Substitution $\sigma = \frac{t-1}{\varepsilon}$, so ist in Definition 2.1 zu fordern, dass das Polynom $\bar{P}_1(\lambda) = 0$ q Nullstellen mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$ (unter Berücksichtigung der Vielfachheiten) besitzt.

Aufgabe 2.2 Berechnen Sie für $N = 0$ eine asymptotische Lösungsdarstellung des RWP

$$\varepsilon^2 x''' + \varepsilon \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) x'' - x' = -1 \quad x(0) = x'(0) = x(1) = 0.$$

2.4 AWP für nichtlineare Systeme 1.Ordnung

Aufgabenstellung: Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y & x(0) &= 1 \\ \varepsilon \dot{y} &= x - y^2 & y(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Aufgabe 2.3 Überprüfen Sie die Voraussetzungen I–IV von Theorem 1.7 für das System (2.35).

1. SCHRITT: Bestimmung der DGL für die GAL

Für die Ermittlung der GAL führen wir den Ansatz

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \bar{x}_j(t) \varepsilon^j \quad \bar{y}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \bar{y}_j(t) \varepsilon^j \tag{2.36}$$

in das System (2.33) ein

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \dot{\bar{x}}_j(t) \varepsilon^j &= \sum_{j=0}^N \bar{y}_j(t) \varepsilon^j \\ \sum_{j=0}^N \dot{\bar{y}}_j(t) \varepsilon^{j+1} &= \sum_{j=0}^N \bar{x}_j(t) \varepsilon^j - \left(\sum_{j=0}^N \bar{y}_j(t) \varepsilon^j \right)^2. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{j=0}^N \bar{y}_j(t) \varepsilon^j \right)^2 \\
&= \left(\bar{y}_0 + \varepsilon \bar{y}_1 + \varepsilon^2 \bar{y}_2 + \cdots + \varepsilon^N \bar{y}_N \right) \left(\bar{y}_0 + \varepsilon \bar{y}_1 + \varepsilon^2 \bar{y}_2 + \cdots + \varepsilon^N \bar{y}_N \right) \\
&+ \bar{y}_0^2 + \varepsilon (\bar{y}_1 \bar{y}_0 + \bar{y}_0 \bar{y}_1) + \varepsilon^2 (\bar{y}_2 \bar{y}_0 + \bar{y}_1 \bar{y}_1 + \bar{y}_0 \bar{y}_2) + \cdots \\
&+ \varepsilon^N (\bar{y}_N \bar{y}_0 + \bar{y}_{N-1} \bar{y}_1 + \cdots + \bar{y}_1 \bar{y}_{N-1} + \bar{y}_0 \bar{y}_N) + \varepsilon^{N+1} (\bar{y}_N \bar{y}_1 + \cdots + \bar{y}_1 \bar{y}_N) \\
&+ \varepsilon^{N+2} (\bar{y}_N \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_2 \bar{y}_N) + \cdots + \varepsilon^{2N} \bar{y}_N \bar{y}_N \\
&= \bar{y}_0^2 + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=0}^j \bar{y}_{j-k} \bar{y}_k \right) \\
&+ \varepsilon^{N+1} \left[(\bar{y}_N \bar{y}_1 + \cdots + \bar{y}_1 \bar{y}_N) + \varepsilon (\bar{y}_N \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_2 \bar{y}_N) + \cdots + \varepsilon^{N-1} \bar{y}_N \bar{y}_N \right]
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^N \dot{\bar{x}}_j \varepsilon^j &= \sum_{j=0}^N \bar{y}_j \varepsilon^j \\
\sum_{j=0}^N \dot{\bar{y}}_j \varepsilon^{j+1} &= \sum_{j=0}^N \bar{x}_j \varepsilon^j - \sum_{j=0}^N \left(\sum_{k=0}^j \bar{y}_{j-k} \bar{y}_k \right) \varepsilon^j - \varepsilon^{N+1} R_N(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N, \varepsilon),
\end{aligned}$$

wobei

$$R_N(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N, \varepsilon) = [(\bar{y}_N \bar{y}_1 + \cdots + \bar{y}_1 \bar{y}_N) + \varepsilon (\bar{y}_N \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_2 \bar{y}_N) + \cdots + \varepsilon^{N-1} \bar{y}_N \bar{y}_N] \quad (2.37)$$

gesetzt wurde. Daraus ergibt sich das folgende rekursive System

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}_j(t) &= \bar{y}_j(t) & (j = 0, \dots, N) \\
(\bar{y}_0(t))^2 &= \bar{x}_0(t) \\
\dot{\bar{y}}_{j-1}(t) &= \bar{x}_j - \sum_{k=0}^j \bar{y}_{j-k} \bar{y}_k & (j = 1, \dots, N).
\end{aligned} \quad (2.38)$$

Die AB der GAL sind mit denen der GSF gekoppelt. Deshalb stellen wir zunächst die Grenzschtgleichung auf.

2. SCHRITT: Herleitung der Grenzschtgleichungen

Nach Einsetzen von (2.36) in (2.35) ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.38) und (2.37)

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}_N &= \bar{y}_N \\
\varepsilon \dot{\bar{y}}_N &= \bar{x}_N - \bar{y}_N^2 + \varepsilon^{N+1} R_N.
\end{aligned} \quad (2.39)$$

Die Differenz zwischen der exakten Lösung und der GAL bezeichnen wir durch

$$\hat{x} = x - \bar{x}_N \quad \hat{y} = y - \bar{y}_N. \quad (2.40)$$

Subtrahiert man (2.39) vom System (2.35), so ergibt sich unter Berücksichtigung von $y^2 - \bar{y}^2 = 2\bar{y}_N \hat{y} + \hat{y}^2$ die Fehlergleichung

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{y} \\ \varepsilon \dot{\hat{y}} &= \hat{x} - 2\bar{y}_N \hat{y} - \hat{y}^2 - \varepsilon^{N+1} R_N\end{aligned}\tag{2.41}$$

mit R_N in der Form (2.37). Wir führen nun in einer Umgebung des Anfangspunktes $t = 0$ eine Variablenstreckung der Form $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ durch. Nach Anwendung der Kettenregel geht (2.41) über in das System

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}}{d\tau} &= \varepsilon \hat{y} \\ \frac{d\hat{y}}{d\tau} &= \hat{x} - 2\bar{y}_N(\varepsilon\tau) \hat{y} - \hat{y}^2 - \varepsilon^{N+1} R_N.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Nach TAYLOR gilt für die Koeffizienten in (2.36)

$$\bar{y}_j(\varepsilon\tau) = \sum_{r=0}^N \frac{d^r \bar{y}_j(0)}{dt^r} \frac{\tau^k}{k!} \varepsilon^k.$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\bar{y}_N(\varepsilon\tau, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^N \bar{y}_j(\varepsilon\tau) \varepsilon^j = \sum_{j=0}^N z_j(\tau) \varepsilon^j \\ &= \bar{y}_0(0) + \varepsilon \left[\bar{y}_1(0) + \tau \frac{d\bar{y}_0(0)}{dt} \right] \\ &+ \varepsilon^2 \left[\bar{y}_2(0) + \tau \frac{d\bar{y}_1(0)}{dt} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 \bar{y}_0(0)}{dt^2} \right] + \dots\end{aligned}\tag{2.43}$$

Macht man nun für die Grenzschichtfunktion \hat{x}_N und \hat{y}_N die Ansätze

$$\hat{x}_N(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \hat{x}_j(\tau) \varepsilon^j \quad \hat{y}_N(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \hat{y}_j(\tau) \varepsilon^j,\tag{2.44}$$

dann erhält man aus (2.42) mit (2.43) durch Koeffizientenvergleich in ε die DGL der GSF

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}_0}{d\tau} &= 0 & \frac{d\hat{x}_j}{d\tau} &= \hat{y}_{j-1} & j &= 1, \dots, N \\ \frac{d\hat{y}_j}{d\tau} &= \hat{x}_j - \sum_{i=0}^j 2z_{j-i} \hat{y}_i - \sum_{i=0}^j 2\hat{y}_{j-i} \hat{y}_i & j &= 0, \dots, N.\end{aligned}\tag{2.45}$$

3. SCHRITT: Festlegung der AB

Nach (2.40) gilt auf Grund der Ansätze (2.36) und (2.44)

$$\begin{aligned} x_N &= \bar{x}_N + \hat{x}_N = \sum_{j=0}^N [\bar{x}_j(t) + \hat{x}_j(\tau)] \varepsilon^j \\ y_N &= \bar{y}_N + \hat{y}_N = \sum_{j=0}^N [\bar{y}_j(t) + \hat{y}_j(\tau)] \varepsilon^j. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Die asymptotische Lösungsdarstellung (2.46) genügt den AB (2.36), wenn wir fordern

$$\begin{aligned} \bar{x}_0(0) + \hat{x}_0(0) &= 1 & \bar{y}_0(0) + \hat{y}_0(0) &= 0 \\ \bar{x}_j(0) + \hat{x}_j(0) &= 0 & \bar{y}_j(0) + \hat{y}_j(0) &= 0 \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Weiterhin sollen die GSF \hat{x}_j, \hat{y}_j außerhalb der GS vernachlässigbar klein werden. Wegen $\tau = \frac{t}{\varepsilon} \leq 1$ für $\varepsilon \ll 1$ müssen \hat{x}_j, \hat{y}_j daher den Abklingbedingungen

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{x}_j(\tau) = 0 \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{y}_j(\tau) = 0 \quad (2.48)$$

genügen.

Die Lösung des rekursiven Systems (2.38) und der Grenzschichtgleichung (2.45) wird in folgenden Teilschritten durchgeführt:

1. *Teilschritt:* Bestimmung von $\hat{x}_0(\tau)$

Nach (2.45) ist $\frac{d\hat{x}_0}{d\tau} = 0$. Integration über das Intervall $[0, \tau]$ liefert $\hat{x}_0(\tau) - \hat{x}_0(0) = 0$, woraus sich aus der Abklingbedingung (2.48) $\hat{x}_0(0) = 0$, also $\hat{x}_0(\tau) \equiv 0$ ergibt.

2. *Teilschritt:* Bestimmung von $\bar{x}_0(t)$

Aus (2.27) folgt für die AB $\bar{x}_0(0) = 1 - \hat{x}_0(0) = 1$. Aus (2.38) erhält man das **entartete System**

$$\dot{\bar{x}}_0(t) = \bar{y}_0(t) \quad \bar{x}_0(t) - [\bar{y}_0(t)]^2 = 0.$$

Als rechte Seite der DGL ist eine asymptotische stabile Lösung der algebraischen Gleichung zu wählen. Die Gleichung $g(t, x, y) = x - y^2 = 0$ besitzt die beiden isolierten Wurzeln

$$y = h_1(t, x) = +\sqrt{x} \quad y = h_2(t, x) = -\sqrt{x}.$$

Die charakteristische Gleichung

$$\text{Det} \left| \frac{\partial \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}))}{\partial \mathbf{y}} - \lambda E_n \right| = 0$$

lautet in unserem skalaren Fall

$$\frac{\partial g(t, x, h(t, x))}{\partial y} - \lambda = -2h(t, x) - \lambda = 0.$$

Wir benötigen eine Wurzel, die der Bedingung $Re \lambda < 0$, also

$$\lambda = \frac{\partial g(t, x, h(t, x))}{\partial y} < 0$$

genügt. Es ist

$$\frac{\partial g(t, x, h_1(t, x))}{\partial y} = -2h_1(t, x) = -2\sqrt{x} < 0$$

$$\frac{\partial g(t, x, h_2(t, x))}{\partial y} = -2h_2(t, x) = 2\sqrt{x} > 0,$$

d.h. $y = h_1(t, x) = +\sqrt{x}$ ist die benötigte asymptotische stabile Lösung. Mit $\bar{y}_0 = +\sqrt{\bar{x}_0}$ genügt \bar{x}_0 dem AWP

$$\dot{\bar{x}}_0 = +\sqrt{\bar{x}_0} \quad \bar{x}_0(0) = 1.$$

Trennung der Veränderlichen liefert

$$\frac{d\bar{x}_0}{\sqrt{\bar{x}_0}} = dt \implies 2\sqrt{\bar{x}_0} = t + C.$$

Nach Einsetzen der AB erhält man

$$\bar{x}_0(t) = \left(\frac{t}{2} + 1\right)^2.$$

3. Teilschritt: Bestimmung von $\bar{y}_0(t)$

Aus der algebraischen Gleichung $\bar{x}_0(t) = [\bar{y}_0(t)]^2$ erhält man

$$\bar{y}_0(t) = +\sqrt{\bar{x}_0(t)} = \frac{t}{2} + 1,$$

woraus für den AW $\bar{y}_0(0) = 1$ folgt.

4. Teilschritt: Bestimmung von $\hat{y}_0(\tau)$

Nach (2.47) gilt für den AW $\hat{y}_0(0) = -\bar{y}_0(0) = -1$. Wegen $\hat{x}_0(\tau) \equiv 0$ genügt $\hat{y}_0(\tau)$ gemäß (2.45) dem AWP

$$\frac{d\hat{y}_0}{d\tau} = -2z_0(\tau)\hat{y}_0 - \hat{y}_0^2 \quad \hat{y}_0(0) = -1.$$

Hierbei ist wegen (2.43) mit

$$\bar{y}_0(\varepsilon\tau) = \frac{\varepsilon\tau}{2} + 1 \quad z_0(\tau) = \bar{y}_0(0) \equiv 1.$$

Somit lautet das AWP

$$\frac{d\hat{y}_0}{d\tau} = -2\hat{y}_0 - \hat{y}_0^2 \quad \hat{y}_0(0) = -1.$$

Nach Trennung der Variablen erhält man

$$\frac{d\hat{y}_0}{2\hat{y}_0 + \hat{y}_0^2} = -d\tau.$$

Zur Berechnung des Integrals auf der linken Seite führen wir eine Partialbruchzerlegung durch:

$$f(\hat{y}_0) = \frac{1}{\hat{y}_0(2 + \hat{y}_0)} = \frac{A}{\hat{y}_0} + \frac{B}{(2 + \hat{y}_0)} \implies A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Nach Integration und elementaren Umformungen erhält man

$$\left[\frac{1}{\hat{y}_0} - \frac{1}{2 + \hat{y}_0} \right] d\hat{y}_0 = -2d\tau \implies \left[\frac{1}{\hat{y}_0} - \frac{1}{\hat{y}_0 + 2} \right] d\hat{y}_0 = -2d\tau$$

$$\ln \left| \frac{\hat{y}_0}{C(\hat{y}_0 + 2)} \right| = -2\tau \implies \hat{y}_0 = (\hat{y}_0 + 2) C \exp(-2\tau) \implies \hat{y}_0 = \frac{2C \exp(-2\tau)}{1 - C \exp(-2\tau)}.$$

Einsetzen in die AB liefert $-1 = \frac{2C}{1 - C}$, also $C = -1$. Damit ergibt sich

$$\hat{y}_0(\tau) = -\frac{2 \exp(-2\tau)}{1 + \exp(-2\tau)}.$$

Damit ist der erste Gesamtschritt des Algorithmus abgeschlossen. Die weiteren Glieder der asymptotischen Lösungsdarstellung werden analog berechnet. Wir führen noch den zweiten Gesamtschritt durch.

1. Teilschritt: Bestimmung von $\hat{x}_1(\tau)$

Aus (2.45) folgt

$$\frac{d\hat{x}_1}{d\tau} = \hat{y}_0 = -\frac{2 \exp(-2\tau)}{1 + \exp(-2\tau)}.$$

Integration über das Intervall $[0, \tau]$ liefert mit der Substitution $1 + \exp(-2\xi) = z$

$$\hat{x}_1(\tau) - \hat{x}_1(0) = -2 \int_0^\tau \frac{\exp(-2\xi)}{1 + \exp(-2\xi)} d\xi = \ln(1 + \exp(-2\xi)) - \ln 2.$$

Aus der Abklingbedingung (2.48) folgt

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{x}_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\ln(1 + \exp(-2\tau)) + \hat{x}_1(0) - \ln 2] = 0,$$

also $\hat{x}_1(0) = \ln 2$, woraus sich

$$\hat{x}_1(\tau) = \ln(1 + \exp(-2\tau))$$

ergibt.

2. Teilschritt: Bestimmung von $\bar{x}_1(t)$

Gemäß (2.47) gilt $\bar{x}_1(0) = -\hat{x}_1(0) = -\ln 2$. Für $j = 1$ erhält man aus (2.38)

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{y}_1 \quad \frac{d\bar{y}_0}{dt} = \bar{x}_1 - 2\bar{y}_0\bar{y}_1 = \frac{1}{2} \quad \text{da} \quad \bar{y}_0(t) = \frac{t}{2} + 1.$$

Löst man die zweite Gleichung nach \bar{y}_1 auf, so ergibt sich $\bar{y}_1 = \frac{2\bar{x}_1 - 1}{4\bar{y}_0}$. Nach Einsetzen in die erste Gleichung gewinnt man das AWP

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \frac{2\bar{x}_1 - 1}{2t + 4} \quad \bar{x}_1(0) = -\ln 2,$$

woraus man durch Trennung der Veränderlichen und Einsetzen der allgemeinen Lösung in die AB

$$\bar{x}_1(t) = -\frac{1}{4}(2 \ln 2 + 1)t - \ln 2$$

erhält.

3. Teilschritt: Bestimmung von $\bar{y}_1(t)$

Es ist

$$\bar{y}_1(t) = \frac{d\bar{x}_1}{dt} = -\frac{1}{4}(2 \ln 2 + 1) = -\gamma.$$

4. Teilschritt: Bestimmung von $\hat{y}_1(\tau)$

Für den AW ergibt sich aus (2.47) $\hat{y}_1(0) = -\bar{y}_1(0) = \gamma$. Die entsprechende DGL folgt für $j = 1$ aus (2.45)

$$\frac{d\hat{y}_1}{d\tau} = \hat{x}_1 - 2z_0\hat{y}_1 - 2z_1(\tau)\hat{y}_0 - 2\hat{y}_0\hat{y}_1.$$

Auf Grund der bereits berechneten Ausdrücke für \bar{y}_0 und \bar{y}_1 ist wegen (2.43)

$$z_1(\tau) = \bar{y}_1(0) + \tau \frac{d\bar{y}_0(0)}{dt} = -\gamma + \frac{1}{2}\tau \quad z_0(\tau) = 1.$$

Setzt man diese Funktion und die bereits berechneten \hat{x}_1 und \hat{y}_0 in die DGL für \hat{y}_1 ein, so ergibt sich

$$\frac{d\hat{y}_1}{d\tau} = \ln(1 + \exp(-2\tau)) - 2 \cdot 1 \cdot \hat{y}_1 - 2 \left(\frac{\tau}{2} - \gamma \right) \left(\frac{-2 \exp(-2\tau)}{1 + \exp(-2\tau)} \right) - 2 \left(\frac{-2 \exp(-2\tau)}{1 + \exp(-2\tau)} \right) \hat{y}_1.$$

Umformung des Koeffizienten bei \hat{y}_1 :

$$\begin{aligned} -2 \left[1 - 2 \frac{\exp(-2\tau)}{1 + \exp(-2\tau)} \right] &= -2 \left[\frac{1 + \exp(-2\tau) - 2 \exp(-2\tau)}{1 + \exp(-2\tau)} \right] = \left[-2 \frac{1 - \exp(-2\tau)}{1 + \exp(-2\tau)} \right] \\ &= -2 \left[\frac{\exp(\tau) \exp(-\tau) - \exp(-2\tau)}{\exp(\tau) \exp(-\tau) + \exp(-2\tau)} \right] \\ &= -2 \left[\frac{\exp(\tau) - \exp(-\tau)}{\exp(\tau) + \exp(-\tau)} \right] = -2 \tanh \tau. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der DGL ergibt sich zu

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \ln(1 + \exp(-2\tau)) - 2 \left(\frac{\tau}{2} - \gamma \right) \left[\frac{-2 \exp(-2\tau)}{1 + \exp(-2\tau)} \right] \\ &= \ln(1 + \exp(-2\tau)) - 2 \left(\frac{\tau}{2} - \gamma \right) \left[1 - 2 \frac{\exp(-2\tau)}{1 + \exp(-2\tau)} - 1 \right] \\ &= \ln(1 + \exp(-2\tau)) + 2 \left(\frac{\tau}{2} - \gamma \right) (1 - \tanh \tau). \end{aligned}$$

Es ist also ein AWP für die lineare DGL 1. Ordnung

$$\frac{d\hat{y}_1}{d\tau} + 2 \tanh \tau \hat{y}_1 = f(\tau) \quad \hat{y}_1(0) = \gamma$$

zu lösen. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet $\hat{y}_1 = C (\cosh \tau)^{-2}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL und des AWP wurde mit Maple erzeugt:

$$\begin{aligned}\hat{y}_1(\tau) &= \frac{\ln(1 + e^{-2\tau}) \sinh(2\tau) + \tau(\tau + 1 - e^{-2\tau}) + 2\gamma(1 - 2\tau + e^{-2\tau})}{4 \cosh^2 \tau} \\ &+ \frac{\operatorname{dilog}(\ln(1 + e^{-2\tau}) + \frac{\pi^2}{12})}{4 \cosh^2 \tau}.\end{aligned}$$

Die nichtelementare Funktion dilog ist wie folgt erklärt:

$$\operatorname{dilog} = \int_1^x \frac{\ln u}{1 - u} du.$$

Eine asymptotische Lösungsdarstellung für das AWP (2.35) erhält man gemäß (2.46) für $N = 1$ in der Form

$$\begin{aligned}x_1(t, \varepsilon) &= \bar{x}_0(t) + \hat{x}_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \left[\bar{x}_1(t) + \hat{x}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right] \\ &= \left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 + \varepsilon \left[-\gamma t - \ln 2 + \ln \left(1 + \exp\left(-\frac{2t}{\varepsilon}\right) \right) \right] \\ y_1(t, \varepsilon) &= \bar{y}_0(t) + \hat{y}_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \left[\bar{y}_1(t) + \hat{y}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right] \\ &= -\frac{2 \exp\left(-\frac{2t}{\varepsilon}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2t}{\varepsilon}\right)} + \left(\frac{t}{2} + 1\right) + \varepsilon \left[-\gamma + \hat{y}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right].\end{aligned}$$

Die RB $x_1(0, \varepsilon) = 1$ ist exakt erfüllt. Die RB $y_1(0, \varepsilon) = \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{48}\right) \varepsilon$ ist nur asymptotisch erfüllt.

Zusammenfassung:

Der j -te Gesamtschritt wird nach folgendem Schema durchgeführt:

1. Bestimmung der GSF $\hat{x}_j(\tau)$ aus der zugeordneten DGL zur Bestimmung der GSF und Festlegung von $\hat{x}_j(0)$ mittels der Abklingbedingung

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{x}_j(\tau) = 0.$$

2. Mittels der AB $\bar{x}_j(0) = -\hat{x}_j(0)$ und der zugeordneten DGL zur Bestimmung der GAL lässt sich der Term $\bar{x}_j(t)$ der GAL berechnen.
3. Mit Hilfe von $\bar{x}_j(t)$ und der zugeordneten DGL zur Bestimmung der GAL lässt sich durch Differentiation $\bar{y}_j(t)$ und damit $\bar{y}_j(0)$ ermitteln.
4. Unter Berücksichtigung der AB $\hat{y}_j(0) = -\bar{y}_j(0)$ und der zugeordneten DGL zur Bestimmung der GSF kann man $\hat{y}_j(\tau)$ bestimmen.

2.5 RWP für nichtlineare Systeme 1.Ordnung

RWP können auf AWP zurückgeführt werden, indem man die RB am linken Rand als AB auffasst. Da diese AB zur Charakterisierung eines AWP nicht ausreichen, vervollständigt man sie durch Einführung unbestimmter Anfangsparameter. Nun löst man dieses unvollständige AWP mit Hilfe einer Lösungsmethode für AWP. Anschließend ermittelt man die unbestimmt eingeführten Anfangsparameter aus den noch nicht berücksichtigten RB am rechten Rand. Diese Vorgehensweise bezeichnen wir als Methode des unvollständigen AWP.

Aufgabe 2.4 *Lösen Sie das RWP*

$$x^{(4)} - x'' = 1 \quad x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0$$

mit Hilfe der Methode des unvollständigen AWP.

Das Prinzip der Ersetzung eines RWP durch ein unvollständiges AWP soll nun auf die asymptotische Lösung des RWP

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \varepsilon \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad t \in [0, 1]$$

$$R[\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{y}(1)] = 0$$

übertragen werden. Hervorgerufen durch die Nichtlinearität von $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ und die Nichtlinearität der RB können bei nichtlinearen RWP im Vergleich zu linearen RWP Besonderheiten auftreten, die bei der Konstruktion einer asymptotischen Lösung zu berücksichtigen sind. Diese Besonderheiten sind von den Wurzeln der Gleichung $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ und von der Struktur der RB abhängig.

Wir betrachten folgende Fälle:

1. Die Gleichung $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ besitze eine isolierte Lösung $\mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ die der Bedingung $\operatorname{Re} \lambda_j(t, \mathbf{x}(t)) < 0$, $j = 1, \dots, n$, $t \in [0, T]$ genügt, wobei $\lambda_j(t, \mathbf{x}(t))$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\operatorname{Det} \left| \frac{\partial \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}))}{\partial \mathbf{y}} - \lambda E_n \right| = 0$$

sind. In diesem Fall fasst man die RB im linken Randpunkt $t = 0$ als AB auf und vervollständigt sie durch Einführung unbestimmter Parameter. Dieses Problem löst man nach der oben dargelegten Methode (vgl. Aufgabe 2.4).

2. Die Gleichung $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ besitze eine isolierte Lösung $\mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x})$, die der Bedingung $\operatorname{Re} \lambda_j(t, \mathbf{x}(t)) > 0$, $j = 1, \dots, n$, $t \in [0, T]$ genügt, wobei $\lambda_j(t, \mathbf{x}(t))$ wieder die Nullstellen des obigen charakteristischen Polynoms sind. Dann fasst man die RB im rechten Randpunkt $t = 1$ als AB auf und vervollständigt sie durch Einführung unbestimmter Anfangsparameter. Nun löst man dieses unvollständige AWP für Werte $t < 1$ und ermittelt anschließend die unbestimmt eingeführten Anfangsparameter aus den noch nicht berücksichtigten RB im linken Randpunkt.

Die Bestimmung der Anfangsparameter aus den noch nicht berücksichtigten RB erfolgt in jedem Gesamtschritt des Algorithmus einzeln. Dabei erhält man im ersten Gesamtschritt i.a. ein nichtlineares Gleichungssystem. Von der Auflösbarkeit dieses Systems ist die Möglichkeit der Konstruktion einer asymptotischen Lösung auf dem eingeschlagenen Weg abhängig. Die Auflösbarkeit dieses Systems wird wesentlich durch die Form der RB bestimmt. Die entsprechenden Gleichungssysteme der folgenden Gesamtschritte sind stets linear mit einer von Null verschiedenen Koeffizientendeterminante.

Gelingt die Konstruktion einer asymptotischen Lösung im 1. Fall, so hat das RWP in einer Umgebung von $t = 0$ eine **GS** und entsprechend im Fall 2 in einer Umgebung von $t = 1$. Die zutreffende Möglichkeit ist durch Probieren zu ermitteln. Es können auch kompliziertere Fälle auftreten, z.B. **GS**en an beiden Intervallenden bzw. **GS**en im Inneren des Intervalls.

Beispiel 2.3 *Wir betrachten wieder das System aus Abschnitt 2.4*

$$\dot{x} = y \quad \varepsilon \dot{y} = x - y^2,$$

jetzt aber mit RB der Form

$$y(0) = 0 \quad x(1) = 1.$$

Gemäß (2.46) existiert eine asymptotische Lösung der Struktur

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \sum_{j=0}^N [\bar{x}_j(t) + \hat{x}_j(\tau)] \varepsilon^j & \tau &= \frac{t}{\varepsilon} \\ y_N(t) &= \sum_{j=0}^N [\bar{y}_j(t) + \hat{y}_j(\tau)] \varepsilon^j, \end{aligned}$$

wobei $\bar{x}_j(t), \bar{y}_j(t)$ dem rekursiven System (2.38) zur Bestimmung der GAL und $\hat{x}_j(\tau), \hat{y}_j(\tau)$ den Grenzschichtgleichungen (2.45) genügen. Da die Grenzschichtfunktion $\hat{x}(\tau)$ auf Grund der Abklingbedingung im rechten Randpunkt $t = 1$ vernachlässigbar klein ist, folgt aus den RB

$$\begin{aligned} x_N(1) &= \sum_{j=0}^N \bar{x}_j(1) \varepsilon^j = 1 \\ y_N(0) &= \sum_{j=0}^N [\bar{y}_j(0) + \hat{y}_j(0)] \varepsilon^j = 0. \end{aligned}$$

Zur Erfüllung dieser Bedingung treffen wir die Festlegungen

$$\bar{x}_0(1) = 1 \quad \bar{x}_j(1) = 0 \quad j = 1, \dots, N, \quad \bar{y}_j(0) + \hat{y}_j(0) = 0.$$

In Abschnitt 2.4 wurde gezeigt, dass eine asymptotische stabile Lösung der Form $y = h_1(t, x) = +\sqrt{x}$ existiert. Demzufolge liegt der 1. Fall vor und wir fassen die RB im linken Randpunkt $t = 0$ als AB auf.

1. GESAMTSCHRITT: Bestimmung von $\hat{x}_0(\tau), \bar{x}_0(t), \bar{y}_0(t), \hat{y}_0(\tau)$

In diesem Schritt ersetzen wir die RB durch die unvollständige AB

$$\bar{x}_0(0) + \hat{x}_0(0) = \alpha \quad \bar{y}_0(0) + \hat{y}_0(0) = 0$$

mit dem unbestimmten Anfangsparameter α .

1. Teilschritt: Bestimmung von $\hat{x}_0(\tau)$

Aus (2.45) folgt $\frac{d\hat{x}_0}{d\tau} = 0$ bzw. $\hat{x}_0(\tau) - \hat{x}_0(0) = 0$. Die Abklingbedingung liefert $\hat{x}_0(0) = 0$, also $\hat{x}_0(\tau) \equiv 0$.

2. Teilschritt: Bestimmung von $\bar{x}_0(t)$

Die AB lautet $\bar{x}_0(0) = \alpha - \hat{x}_0(0) = \alpha$. Aus (2.38) folgt für $j = 0$

$$\frac{d\bar{x}_0}{dt} = \bar{y}_0 \quad x_0(t) = [\bar{y}_0(t)]^2.$$

Da wir zur Konstruktion einer asymptotischen Lösungsdarstellung eine asymptotische stabile Lösung der Gleichung $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ausgewählt haben, gilt $\bar{y}_0 = +\sqrt{\bar{x}_0}$ und $\bar{x}_0(t)$ genügt dem AWP

$$\dot{\bar{x}}_0 = +\sqrt{\bar{x}_0} \quad \bar{x}_0(0) = \alpha,$$

woraus man durch Trennung der Variablen

$$\bar{x}_0(t) = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{\alpha}\right)^2$$

erhält.

3. Teilschritt: Bestimmung von $\bar{y}_0(t)$

Es ist

$$\bar{y}_0(t) = +\sqrt{\bar{x}_0(t)} = \frac{t}{2} + \sqrt{\alpha},$$

woraus für den AW $\bar{y}_0(0) = \sqrt{\alpha}$ folgt.

4. Teilschritt: Bestimmung von $\hat{y}_0(\tau)$

Die AB lautet $\hat{y}_0(0) = -\bar{y}_0(0) = -\sqrt{\alpha}$. Aus (2.45) folgt für $j = 0$, da $\hat{x}_0(\tau) \equiv 0$,

$$\frac{d\hat{y}_0}{d\tau} = -2\sqrt{\alpha}\hat{y}_0 - \hat{y}_0^2.$$

Nach Trennung der Variablen, Partialbruchzerlegung, Integration und Einsetzen der allgemeinen Lösung in die AB erhält man

$$\hat{y}_0(\tau) = -\frac{2\sqrt{\alpha} \exp(-2\sqrt{\alpha}\tau)}{1 + \exp(-\sqrt{\alpha}\tau)}.$$

5. Teilschritt: Bestimmung des unbekanntes Anfangsparameters α

Mittels der noch nicht berücksichtigten RB am rechten Randpunkt $\bar{x}_0(1) = 1$ wird nun der Anfangsparameter α berechnet:

$$\bar{x}_0(1) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\alpha}\right)^2 = 1 \implies \alpha = \frac{1}{4}.$$

Damit ist

$$\bar{x}_0(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 \quad \bar{y}_0(t) = \frac{t+1}{2} \quad \hat{y}_0(\tau) = -\frac{\exp(-\tau)}{1 + \exp(-\tau)}.$$

2. GESAMTSCHRITT: Bestimmung von $\hat{x}_1(\tau)$, $\bar{x}_1(t)$, $\bar{y}_1(t)$, $\hat{y}_1(\tau)$

Die RB ersetzen wir durch die unvollständigen AB

$$\bar{x}_1(0) + \hat{x}_1(0) = \beta, \quad \bar{y}_1(0) + \hat{y}_1(0) = 0$$

mit dem unbestimmten Anfangsparameter β .

1. Teilschritt: Bestimmung von $\hat{x}_1(\tau)$

Aus (2.45) folgt für $j = 1$

$$\frac{d\hat{y}_1}{d\tau} = \hat{y}_0(\tau) = -\frac{\exp(-\tau)}{1 + \exp(-\tau)}.$$

Integration über das Intervall $[0, \tau]$ liefert mit der Substitution $1 + \exp(-\tau) = z$

$$\hat{x}_1(\tau) - \hat{x}_1(0) = -\int_0^\tau \frac{\exp(-\xi)}{1 + \exp(-\xi)} d\xi = \ln(1 + \exp(-\tau)) - \ln 2.$$

Aus der Abklingbedingung (2.48) folgt

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{x}_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} [\ln(1 + \exp(-\tau)) + \hat{x}_1(0) - \ln 2] = 0,$$

also $\hat{x}_1(0) = \ln 2$. Somit ist

$$\hat{x}_1(\tau) = \ln(1 + \exp(-\tau)).$$

2. Teilschritt: Bestimmung von $\bar{x}_1(t)$

Die AB lautet $\bar{x}_1(0) = \beta - \hat{x}_1(0) = \beta - \ln 2$. Aus (2.38) folgt für $j = 1$

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{y}_1 \quad \frac{d\bar{y}_0}{dt} = \bar{x}_1 - 2\bar{y}_0\hat{y}_1 = \frac{1}{2} \quad \text{denn} \quad \frac{d\bar{y}_0}{dt} = \frac{1}{2}.$$

Auflösung der algebraischen Gleichung $\bar{x}_1 - 2\bar{y}_0\hat{y}_1 = \frac{1}{2}$ nach \bar{y}_1 liefert

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{x}_1 - \frac{1}{2}}{2\bar{y}_0} = \frac{\bar{x}_1 - \frac{1}{2}}{t + 1},$$

woraus man für $\bar{x}_1(t)$ das AWP

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \frac{\bar{x}_1 - \frac{1}{2}}{t + 1} \quad \bar{x}_1(0) = \beta - \ln 2$$

gewinnt. Mittels Trennung der Variablen erhält man als Lösung des AWP

$$\bar{x}_1(t) = \left(\beta - \ln 2 - \frac{1}{2}\right)t + \beta - \ln 2.$$

Somit können wir unter Verwendung der noch nicht berücksichtigten RB $\bar{x}_1(1) = 0$ im rechten Randpunkt den Anfangsparameter β bestimmen:

$$\bar{x}_1(1) = (\beta - \ln 2 - \frac{1}{2}) + \beta - \ln 2 = 0 \rightarrow \beta = \ln 2 + \frac{1}{4}.$$

Einsetzen in den Ausdruck $\bar{x}_1(t)$ liefert $\bar{x}_1(t) = \frac{1-t}{4}$.

3. Teilschritt: Bestimmung von $\bar{y}_1(t)$

Es ist $\bar{y}_1(t) = \frac{d\bar{x}_1}{dt} = -\frac{1}{4}$ und $\bar{y}_1(0) = -\frac{1}{4}$.

4. Teilschritt: Bestimmung von $\hat{y}_1(\tau)$

Die AB lautet $\hat{y}_1(0) = -\bar{y}_1(0) = \frac{1}{4}$. Aus (2.45) folgt für $j = 1$

$$\frac{d\hat{y}_1}{d\tau} = \hat{x}_1 - 2z_0\hat{y}_1 - 2z_1\hat{y}_0 - 2\hat{y}_0\hat{y}_1.$$

Die Koeffizienten z_0 und z_1 berechnen sich wie folgt

$$\begin{aligned} \bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) &= \bar{y}_0(\varepsilon\tau) + \varepsilon\bar{y}_1(\varepsilon, \tau) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon\tau}{2} + \varepsilon\left(-\frac{1}{4}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{\tau}{2} - \frac{1}{4}\right) + \dots = z_0 + \varepsilon z_1 + \dots \end{aligned}$$

mit $z_0 = \frac{1}{2}$ und $z_1 = \frac{\tau}{2} - \frac{1}{4}$. Die DGL für $\hat{y}_1(\tau)$ hat folglich die Gestalt

$$\frac{d\hat{y}_1}{d\tau} = \ln(1 + \exp(-\tau)) - \hat{y}_1 - 2\left(\frac{\tau}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{-\exp(-\tau)}{1 + \exp(-\tau)}\right) - 2\left(\frac{-\exp(-\tau)}{1 + \exp(-\tau)}\right)\hat{y}_1.$$

Umformung des Koeffizienten bei \hat{y}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{2\exp(-\tau)}{1 + \exp(-\tau)} - 1 &= \frac{2\exp(-\tau) - 1 - \exp(-\tau)}{1 + \exp(-\tau)} = \frac{\exp(-\tau) - 1}{\exp(-\tau) + 1} \\ &= \frac{\exp(-\frac{\tau}{2})\exp(-\frac{\tau}{2}) - \exp(-\frac{\tau}{2})\exp(\frac{\tau}{2})}{\exp(-\frac{\tau}{2})\exp(-\frac{\tau}{2}) + \exp(-\frac{\tau}{2})\exp(\frac{\tau}{2})} \\ &= -\frac{\exp(\frac{\tau}{2}) - \exp(-\frac{\tau}{2})}{\exp(\frac{\tau}{2}) + \exp(-\frac{\tau}{2})} = -\tanh\frac{\tau}{2}. \end{aligned}$$

Man erhält ein AWP für die lineare DGL 1. Ordnung

$$\frac{d\hat{y}_1}{d\tau} + \tanh\frac{\tau}{2}\hat{y}_1 = \ln(1 + \exp(-\tau)) + \left(\tau - \frac{1}{2}\right)\frac{\exp(-\tau)}{1 + \exp(-\tau)} \quad \hat{y}_1(0) = \frac{1}{4}$$

zu lösen. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet

$$\hat{y}_1(\tau) = C_1 \left(\tanh^2 h\left(\frac{\tau}{2}\right) - 1 \right) = C_1 \left(\cosh\frac{\tau}{2} \right)^{-2}.$$

$$\hat{y}_1(\tau) = \left[\frac{-2\tau^2 - \tau e^\tau + \tau e^{-\tau} + \ln(e^\tau + 1)(e^\tau - e^{-\tau})}{(1 + e^{-\tau})^2} \right] e^{-\tau} \\ + \frac{\left[-2 \operatorname{dilog}(e^\tau + 1) + \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} + \frac{3\tau^2}{2} + \frac{1}{2}e^{-\tau} - \tau e^{-\tau} - \frac{\pi^2}{6} \right] e^{-\tau}}{(1 + e^{-\tau})^2}.$$

Man erhält eine asymptotische Lösungsdarstellung für das RWP für $N = 1$ in der Form

$$x_1(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \hat{x}_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \left[\bar{x}_1(t) + \hat{x}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right] \\ = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + \varepsilon \left[\frac{1-t}{4} + \ln\left(1 + \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \right] \\ y_1(t, \varepsilon) = \bar{y}_0(t) + \hat{y}_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \left[\bar{y}_1(t) + \hat{y}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right] \\ = \left(\frac{t+1}{2}\right) - \frac{\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)} + \varepsilon \left[\hat{y}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{4} \right].$$

3 Integralmannigfaltigkeiten

3.1 Integralmannigfaltigkeiten autonomer Systeme 1. Ordnung

Definition 3.1 Gegeben sei das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, wobei \mathbf{x} und \mathbf{f} m -dimensionale Vektorfunktionen sind. Eine glatte Mannigfaltigkeit im Raum der Variablen x_1, \dots, x_m heißt **Integralmannigfaltigkeit** oder **invariante Mannigfaltigkeit** des Systems, wenn eine beliebige Lösungskurve, die wenigstens einen gemeinsamen Punkt mit dieser Mannigfaltigkeit besitzt, vollständig in ihr enthalten ist.

Einfachste Beispiele von Integralmannigfaltigkeiten sind singuläre Punkte, die Lösungskurven selbst, der Phasenraum (Er stellt eine m -dimensionale Integralmannigfaltigkeit dar.)

Von besonderem Interesse ist die Konstruktion von Integralmannigfaltigkeiten mit einer Dimension kleiner als m , die spezielle zusätzliche Eigenschaften besitzen, z.B. die Eigenschaft der Stabilität, d.h. die Fähigkeit, Lösungskurven anzuziehen. Man spricht dann von einer exponentiell anziehenden invarianten Mannigfaltigkeit (e.a.i.M.).

Beispiel 3.1 Wir betrachten ein lineares System 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Wir nehmen an, dass die charakteristische Gleichung dieses Systems

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

zwei voneinander verschiedene reelle Nullstellen λ_1, λ_2 besitzt, zu denen die Eigenvektoren $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ der Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ gehören. Dann besitzt die allgemeine Lösung des Systems die Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_a^h(t) = C_1 \mathbf{P}_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \mathbf{P}_2 \exp(\lambda_2 t). \quad (3.3)$$

Sei $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Dann nähert sich für $t \rightarrow \infty$ die Lösungskurve einer beliebigen Lösung unbegrenzt einer Geraden l durch den Koordinatenursprung mit dem Richtungsvektor \mathbf{P}_1 .

Für $C_2 = 0$ liegen die Lösungen des Systems (3.1) auf der Geraden l . Folglich ist die Gerade l invariant für das betrachtete System, d.h. wenn der Punkt $(x_1^0, x_2^0) \in l$, so liegt die Lösungskurve durch diesen Punkt für alle t auf l . Mehr noch, für einen beliebigen AW $\mathbf{x}_0 = C_1 \mathbf{P}_1 + C_2 \mathbf{P}_2$ lässt sich ein Punkt $\mathbf{y}_0 = C_1 \mathbf{P}_1 \in l$ angeben, derart, dass die Lösung (1.4), die die Bedingung $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ für $t = 0$ erfüllt, exponentiell zur Lösung

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{P}_1 \exp(\lambda_1 t) \quad (3.4)$$

die die Bedingung $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ für $t = 0$ erfüllt, konvergiert. Die Bahnkurve der Lösung (3.4) liegt auf der Geraden l . Wir vermerken, dass eine beliebige Lösungskurve in der $x_1 x_2$ -Ebene eine Integralmannigfaltigkeit ist. Jedoch nur die Gerade l besitzt die zusätzliche Stabilitätseigenschaft, d.h. ist eine e.a.i.M.

Aufgabe 3.1 Überprüfen Sie die Überlegungen aus Beispiel 3.1 für das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y & x(0) &= 0 \\ \dot{y} &= \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y & y(0) &= 1. \end{aligned}$$

3.2 E.a.i.M. für SGP der Form (1.60)

Wir betrachten das System (1.60) und nehmen an, dass die Voraussetzungen aus Theorem 1.7 erfüllt sind. Zusammen mit (1.60) betrachten wir das sogenannte **entartete** System (1.62). Nach Voraussetzung II von Theorem 1.7 besitze die Gleichung $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ eine isolierte Lösung

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}_0(t, \mathbf{x}) \quad (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_1 \times D_m}. \quad (3.5)$$

Dann gilt auf der durch (3.5) definierten Mannigfaltigkeit die Äquivalenz der Systeme (1.62) und

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}_0(t, \mathbf{x})). \quad (3.6)$$

Wir suchen nun nach einer Möglichkeit, das Ausgangssystem (1.60) der Dimension $m+n$ durch ein äquivalentes System von kleinerer Dimension zu ersetzen. Dies entspricht einer Reduzierung des Phasenraums. Unser Ziel ist es, die Existenz einer von ε abhängigen e.a.i.M.

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) \quad (3.7)$$

mit der Eigenschaft $\mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{h}_0(t, \mathbf{x})$ nachzuweisen. Einsetzen der Funktion (3.7) in $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ liefert das **reduzierte ε -abhängige System**

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)). \quad (3.8)$$

Es ist bewiesen, dass unter den Voraussetzungen von Theorem 1.7 eine e.a.i.M. existiert und dass sich die Lösungen des Systems (1.60), die sich in der Nähe der e.a.i.M. befinden, sehr schnell an die entsprechenden Lösungen des Systems (3.8) annähern. Genauer, eine beliebige Lösung $\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix}$ des Systems (1.60) mit $\text{AB} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{pmatrix}$ in der Nähe einer e.a.i.M., (d.h. der Abstand $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{h}(t_0, \mathbf{x}_0, \varepsilon)\|$ ist hinreichend klein) ist darstellbar in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{k}_1(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \tilde{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{k}_2(t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Hierbei ist $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ eine Lösung des Systems (3.8), die für $t = t_0$ den Wert $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0$ annimmt. Die Funktionen $\mathbf{k}_i(t)$, $i = 1, 2$, genügen für $t \geq t_0$ den Ungleichungen

$$\|\mathbf{k}_i(t)\| \leq C \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{h}_0(t_0, \mathbf{x}_0, \varepsilon)\| \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}(t - t_0)\right),$$

wobei γ und C positive Konstanten sind.

Folglich kann man auf einer e.a.i.M. der Form (3.7) das Ausgangssystem (1.60) durch das System (3.8) ersetzen. Damit reduziert sich die Dimension des Phasenraums von $m + n$ auf m .

E.a.i.M. lassen sich in der Regel nur näherungsweise berechnen. Der Algorithmus ist ähnlich wie bei der Berechnung von GSF. Es wird ein Ansatz der Form

$$h(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N h_j(t, \mathbf{x}) \varepsilon^j$$

verwendet.

Sind die Voraussetzungen von Theorem 1.7 für alle $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, so spricht man von einer globalen e.a.i.M., sind sie nur in einem Teilgebiet $D_0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ erfüllt, dann liegt eine lokale e.a.i.M. vor.

Beispiel 3.2 *Wir betrachten das lineare System*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \tag{3.10}$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Ferner seien a, b, c, d **konstant**, wobei $d < 0$ gelten möge. Dann sind (vgl. Aufgabe 1.5 (1)) die Voraussetzungen von Theorem 1.7 überall erfüllt. Man erhält eine globale e.a.i.M. Für lineare Systeme der Gestalt (3.10) vereinfacht sich der Ansatz für die e.a.i.M. zu

$$y = h(\varepsilon) x \quad \text{mit} \quad h(\varepsilon) = \sum_{j=0}^N h_j \varepsilon^j. \tag{3.11}$$

Einsetzen von (3.11) in die zweite Gleichung in (3.10) liefert

$$\varepsilon h \dot{x} = (c + dh) x.$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in die erste Gleichung von (3.10) ergibt

$$\varepsilon h(a + b h) x = (c + d h) x.$$

Aus der algebraischen Gleichung

$$\varepsilon h(a + b h) = c + d h$$

erhält man durch Koeffizientenvergleich in ε ein rekursives Gleichungssystem zur Berechnung der Zahlen h_j

$$h_0 = -\frac{c}{d}, \quad h_1 = \frac{h_0}{d} (a + b h_0), \dots$$

Allgemein gilt

$$h_i = \frac{1}{d} \left[h_{i-1} a + \sum_{j=0}^{i-1} h_j b h_{i-1-j} \right] \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Die reduzierte ε -abhängige Gleichung hat die Gestalt

$$\dot{x} = (a + b h) x = a + b (h_0 + h_1 \varepsilon + \dots + h_N \varepsilon^N) x. \quad (3.12)$$

Auf der globalen e.a.i.M. (3.11) braucht man anstelle des Systems (3.10) nur die Gleichung (3.12) zu lösen.

Wir zeigen noch, dass die Lösungen von (3.10) sich für $t \rightarrow \infty$ unbegrenzt den Lösungen auf der e.a.i.M. nähern. Eine Koordinatentransformation der Form $y = z + h x$ überführt das System (3.10) in das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a + b h) x + b z \\ \varepsilon \dot{z} &= d z - \varepsilon h b z. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Lösung des AWP

$$\varepsilon \dot{z} = d z - \varepsilon h b z \quad z(0) = z_0$$

schreiben wir in der Form

$$z(t) = z_0 \exp\left((d - \varepsilon h b) \frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Diese Lösung setzen wir in die rechte Seite der ersten Gleichung von (3.7) und lösen für diese das AWP mit der AB $x(0) = x_0$. Man erhält

$$x(t) = x_0 \exp((a + b h) t) + \int_0^t F(t, s) ds$$

mit

$$F(t, s) = z_0 \exp((a + b h)(t - s)) b \exp\left((d - \varepsilon h b) \frac{s}{\varepsilon}\right).$$

Da $d < 0$ vorausgesetzt war, besitzt das Integral

$$\int_0^{\infty} z_0 \exp(-(a + bh)s) b \exp\left(\left(d - \varepsilon hb\right)\frac{s}{\varepsilon}\right) ds =: \Delta x_0$$

einen endlichen Wert. Aus $\int_0^t F(t, s) ds = \int_0^{\infty} F(t, s) ds - \int_t^{\infty} F(t, s) ds$ folgt

$$x(t) = \exp((a + bh)t)(x_0 + \Delta x_0) - \int_t^{\infty} \exp((a + bh)(t - s)) b \exp\left(\left(d - \varepsilon hb\right)\frac{s}{\varepsilon}\right) z_0 ds.$$

Wir schreiben die Lösung des Systems (3.10) mit den AB $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ in der Form

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \mathbf{k}_1(t) \quad y(t) = h(\varepsilon) \tilde{x}(t) + \mathbf{k}_2(t), \quad (3.14)$$

wobei $\tilde{x}(t) = \exp((a + bh)t)(x_0 + \Delta x_0)$ die Lösung des AWP

$$\dot{x} = (a + bh)x \quad x(0) = \tilde{x}_0 = x_0 + \Delta x_0$$

ist und

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1(t) &= - \int_t^{\infty} \exp((a + bh)(t - s)) b \exp\left(\left(d - \varepsilon hb\right)\frac{s}{\varepsilon}\right) z_0 ds, \\ \mathbf{k}_2(t) &= \exp\left(\left(d - \varepsilon hb\right)\frac{t}{\varepsilon}\right) z_0, \quad z_0 = y_0 + hx_0. \end{aligned}$$

gilt. Offensichtlich genügen die Funktionen $\mathbf{k}_i(t)$, ($i = 1, 2$), den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{k}_1(t)\| &= \leq \varepsilon C_1 \|y_0 - hx_0\| \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon} t\right) \\ \|\mathbf{k}_2(t)\| &= \leq C_2 \|y_0 - hx_0\| \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon} t\right), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

mit gewissen Konstanten $\gamma, C_1, C_2 > 0$. Wenn der AW (x_0, y_0) auf der e.a.i.M. $y = h(\varepsilon)x$ liegt, so ist $z_0 = 0$, folglich $\mathbf{k}_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, 2$) und somit $x(t) = \tilde{x}(t)$. Dann ist $y(t) = h(\varepsilon)\tilde{x}(t)$ eine Lösung, deren Lösungskurve auf der Mannigfaltigkeit $y = h(\varepsilon)x$ liegt. Damit gilt: Für einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) haben wir einen Punkt $\tilde{x}_0 = x_0 + \Delta x_0$, $\tilde{y}_0 = h(\varepsilon)\tilde{x}_0$ gefunden, der auf der e.a.i.M. $y = h(\varepsilon)x$ liegt, derart, dass sich eine Lösung des Systems (3.8), die der AB $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ genügt, für $t \rightarrow \infty$ unbegrenzt einer Lösung $x = \tilde{x}(t)$, $y = h(\varepsilon)\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$ nähert, die auf der e.a.i.M. liegt.

3.3 Die Existenz einer e.a.i.M. für ein spezielles SGP

Vorbemerkung: In diesem und den nächsten Abschnitten werden Vektoren und Normen anders bezeichnet als bisher. Die dargelegten Ergebnisse sind in [2] zu finden.

In diesem Abschnitt wird die Existenz einer e.a.i.M. \mathcal{M}_ε für das folgende spezielle SGP

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= f(u_1, u_2, t), \\ \varepsilon \frac{du_2}{dt} &= Bu_2 + \varepsilon g(u_1, u_2, t)\end{aligned}\tag{3.16}$$

gezeigt. Wir betrachten das System (3.16) für hinreichend kleine ε ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$) unter folgenden Voraussetzungen:

(A₁) $f : G := \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind stetig und stetig differenzierbar nach allen Variablen.

(A₂) Wir bezeichnen mit $|\cdot|$ die Euklidische Norm. Es existieren positive Konstanten $c_1, c_2, c_{41}, c_{42}, c_{51}, c_{52}$ derart, dass f und g in G die Bedingungen

$$\begin{aligned}|f(u_1, u_2, t)| &\leq c_1, \\ |g(u_1, u_2, t)| &\leq c_2,\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$|f(u_1, u_2, t) - f(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, t)| \leq c_{41}|u_1 - \tilde{u}_1| + c_{42}|u_2 - \tilde{u}_2|,\tag{3.18}$$

$$|g(u_1, u_2, t) - g(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, t)| \leq c_{51}|u_1 - \tilde{u}_1| + c_{52}|u_2 - \tilde{u}_2|,\tag{3.19}$$

für alle $(u_1, u_2, t), (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, t) \in G$ erfüllen.

(A₃) Die Matrix B ist eine konstante $k \times k$ -Matrix, deren Eigenwerte λ_i negative Realteile besitzen, d.h. es existiert eine positive Zahl γ derart, dass $Re \lambda_i < -\gamma < 0 \forall i$.

Für $\varepsilon = 0$ besitzt (3.16) eine e.a.i.M. der Form $u_2 \equiv 0$. Man kann folglich erwarten, dass (3.16) für hinreichend kleine ε in der Nähe von $u_2 \equiv 0$ eine e.a.i.M. \mathcal{M}_ε besitzt. Folglich besteht unser Ziel im Nachweis der Existenz einer e.a.i.M. für (3.16) mit einer Darstellung der Form

$$u_2 = \eta^*(u_1, t, \varepsilon) := \varepsilon \phi(u_1, t) + O(\varepsilon^2) \text{ für } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$$

wobei die Funktionen η^* stetig von ihren Variablen abhängt. Speziell sind wir an einer Schranke für ε^* interessiert. Die grundlegende Idee des folgenden Beweises besteht darin, die Funktionen η^* als Fixpunkt eines geeigneten Operators in einem vollständigen metrischen Raum zu bestimmen. Wir führen den Funktionenraum $C(d, l)$ ein, wobei d und l positive Konstanten sind. Dieser besteht aus allen Funktionen η , welche $D := \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times [0, \bar{\varepsilon}]$ stetig in \mathbb{R}^k abbilden ($\bar{\varepsilon}$ ist dabei eine positive Zahl) und die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$|\eta(u_1, t, \varepsilon)| \leq d \quad \forall (u_1, t, \varepsilon) \in D,\tag{3.20}$$

$$|\eta(u_1, t, \varepsilon) - \eta(\tilde{u}_1, t, \varepsilon)| \leq l |u_1 - \tilde{u}_1| \quad \forall (u_1, t, \varepsilon), (\tilde{u}_1, t, \varepsilon) \in D.\tag{3.21}$$

Wenn wir $C(d, l)$ mit der Norm

$$\|\eta\| = \sup_{(u_1, t, \varepsilon) \in D} |\eta(u_1, t, \varepsilon)|,\tag{3.22}$$

versehen, so erhalten wir einen vollständigen metrischen Raum. Für $\eta \in C(d, l)$ betrachten wir das AWP

$$\frac{du_1}{dt} = f(u_1, \eta(u_1, t, \varepsilon), t), \quad u_1(t_0) = u_1^0,\tag{3.23}$$

mit irgendeinem fixierten Punkt u_1^0 in \mathbb{R}^m . Aus (A_1) und (A_2) folgt, dass $f(u_1, \eta(u_1, t, \varepsilon), t)$ eine stetige gleichmäßige beschränkte Funktion ist. Außerdem gilt

$$|f(u_1, \eta(u_1, t, \varepsilon), t) - f(\tilde{u}_1, \eta(\tilde{u}_1, t, \varepsilon), t)| \leq (c_{41} + c_{42}l)|u_1 - \tilde{u}_1| \quad \forall (u_1, t, \varepsilon), (\tilde{u}_1, t, \varepsilon) \in D. \quad (3.24)$$

Nach dem Satz von Picard-Cauchy besitzt (3.23) eine eindeutige Lösung $u_1 = \varphi^\eta(t, \varepsilon, u_1^0)$, die für $t \in \mathbb{R}$ definiert ist und für die $\varphi^\eta(t_0, \varepsilon, u_1^0) = u_1^0$ gilt. Setzt man $\varphi^\eta(t, \varepsilon, u_1^0)$ in die zweite Gleichung von (3.16) ein, so erhält man

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = Bu_2 + \varepsilon g(\varphi^\eta(t, \varepsilon, u_1^0), u_2, t). \quad (3.25)$$

Wir schließen wieder aus dem Satz von Picard-Cauchy, dass unter unseren Voraussetzungen das AWP für (3.25) eine eindeutige globale Lösung besitzt. Sei $X(t, \tau, \varepsilon)$ die Fundamentalmatrix des linearen Systems

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = Bu_2$$

Dabei gilt $X(\tau, \tau, \varepsilon) = I$ und

$$X(t, \tau, \varepsilon) = \exp\left(B \frac{t - \tau}{\varepsilon}\right).$$

Sei $|\cdot|$ die durch die Euklidische Vektornorm induzierte Matrixnorm, d.h. $|A| = \sqrt{\varrho(A^T A)}$, wobei ϱ den Spektralradius bezeichnet. Gemäß Voraussetzung (A_3) gibt es eine Konstante $c \geq 1$, so dass

$$|X(t, \tau, \varepsilon)| \leq c \exp\left(-\frac{\gamma(t - \tau)}{\varepsilon}\right) \quad \text{für } t \geq \tau \quad \text{und } \varepsilon > 0. \quad (3.26)$$

gilt. Wenn wir annehmen, dass $u_2 = \eta^*(u_1, t, \varepsilon)$ mit $\eta^* \in C(d, l)$ eine e.a.i.M. $\mathcal{M}_\varepsilon^{d, l}$ von (3.16) ist, dann ist $\eta^*(\varphi^{\eta^*}(t, \varepsilon, u_1^0), t, \varepsilon)$ eine gleichmäßig beschränkte Lösung von (3.25). Man kann zeigen, dass unter unseren Bedingungen eine gleichmäßig beschränkte globale Lösung von (3.25) der Integralgleichung

$$u_2(t, \varepsilon, u_1^0) = \int_{-\infty}^t X(t, \tau, \varepsilon) g(\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0), u_2(\tau, \varepsilon, u_1^0), \tau) d\tau. \quad (3.27)$$

genügt. Somit erfüllt $\eta^*(\varphi^{\eta^*}(t, \varepsilon, u_1^0), t, \varepsilon)$ die Integralgleichung (3.27) und wir führen einen Operator \mathcal{T} , definiert auf $C(d, l)$ mittels

$$(\mathcal{T}\eta)(u_1^0, t, \varepsilon) := \int_{-\infty}^t X(t, \tau, \varepsilon) g(\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0), \eta(\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0), \tau, \varepsilon), \tau) d\tau. \quad (3.28)$$

ein.

Lemma 3.1 *Es seien d und l positive Zahlen. Falls $(A_1) - (A_3)$ und die zusätzlichen Voraussetzungen*

$$\frac{\varepsilon c c_2}{\gamma} \leq d, \quad (3.29)$$

$$\frac{\varepsilon c(c_{51} + c_{52}l)}{\gamma - \varepsilon(c_{41} + c_{42}l)} \leq l, \quad (3.30)$$

$$\varepsilon(c_{41} + c_{42}l) < \gamma \quad (3.31)$$

erfüllt sind, bildet der Operator \mathcal{T} den vollständigen metrischen Raum $C(d, l)$ in sich selbst ab.

Beweis: Unter unseren Voraussetzungen kann man leicht zeigen, dass $\mathcal{T}\eta$ für $\eta \in C(d, l)$ stetig ist. Die gleichmäßige Beschränktheit folgt aus (3.28), (3.26) und (3.17). Wir erhalten

$$|(\mathcal{T}\eta)(u_1^0, t, \varepsilon)| \leq \int_{-\infty}^t c e^{-\gamma(t-\tau)/\varepsilon} c_2 d\tau = \frac{cc_2\varepsilon}{\gamma}.$$

Nun zeigen wir die Lipschitzstetigkeit von $(\mathcal{T}\eta)(u_1^0, t, \varepsilon)$ bezüglich u_1^0 . Gemäß (3.23) folgt

$$\begin{aligned} \varphi^\eta(s, \varepsilon, u_1^0) &= u_1^0 + \int_{t_0}^s f(\varphi^\eta(\sigma, \varepsilon, u_1^0), \eta(\varphi^\eta(\sigma, \varepsilon, u_1^0), \sigma, \varepsilon), \sigma) d\sigma, \\ \varphi^\eta(s, \varepsilon, \bar{u}_1^0) &= \bar{u}_1^0 + \int_{t_0}^s f(\varphi^\eta(\sigma, \varepsilon, \bar{u}_1^0), \eta(\varphi^\eta(\sigma, \varepsilon, \bar{u}_1^0), \sigma, \varepsilon), \sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Unter Verwendung von (3.18), (3.21), (3.24) gilt

$$\begin{aligned} |\varphi^\eta(s, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^\eta(s, \varepsilon, \bar{u}_1^0)| &\leq |u_1^0 - \bar{u}_1^0| \\ &\quad + \int_{t_0}^s (c_{41} + c_{42}l) |\varphi^\eta(\sigma, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^\eta(\sigma, \varepsilon, \bar{u}_1^0)| d\sigma. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gronwall-Ungleichung erhalten wir für $s \geq t_0$

$$|\varphi^\eta(s, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^\eta(s, \varepsilon, \bar{u}_1^0)| \leq |u_1^0 - \bar{u}_1^0| e^{(c_{41} + c_{42}l)(s-t_0)}. \quad (3.33)$$

Für $s \leq t_0$ ergibt sich aus (3.32)

$$\begin{aligned} |\varphi^\eta(s, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^\eta(s, \varepsilon, \bar{u}_1^0)| &\leq |u_1^0 - \bar{u}_1^0| \\ &\quad + \int_s^{t_0} (c_{41} + c_{42}l) |\varphi^\eta(\sigma, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^\eta(\sigma, \varepsilon, \bar{u}_1^0)| d\sigma. \end{aligned}$$

Die Anwendung einer modifizierten Gronwall-Ungleichung liefert

$$|\varphi^\eta(s, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^\eta(s, \varepsilon, \bar{u}_1^0)| \leq |u_1^0 - \bar{u}_1^0| e^{(c_{41} + c_{42}l)(t_0-s)}.$$

Aus (3.28), (3.26), (3.19), (3.21), (3.29), (3.31) und (3.33) mit $s = \tau$, $t_0 = t$ folgt

$$\begin{aligned} &|(\mathcal{T}\eta)(u_1^0, t, \varepsilon) - (\mathcal{T}\eta)(\bar{u}_1^0, t, \varepsilon)| \\ &\leq \int_{-\infty}^t c e^{-\gamma(t-\tau)/\varepsilon} |g(\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0), \eta(\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0), \tau, \varepsilon), \tau) \\ &\quad - g(\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, \bar{u}_1^0), \eta(\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, \bar{u}_1^0), \tau, \varepsilon), \tau)| d\tau \\ &\leq c(c_{51} + c_{52}l) \int_{-\infty}^t |\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^\eta(\tau, \varepsilon, \bar{u}_1^0)| e^{-\gamma(t-\tau)/\varepsilon} d\tau \\ &\leq c(c_{51} + c_{52}l) |u_1^0 - \bar{u}_1^0| \int_{-\infty}^t e^{-(\gamma - \varepsilon(c_{41} + c_{42}l))(t-\tau)/\varepsilon} d\tau = \frac{c\varepsilon(c_{51} + c_{52}l)}{\gamma - \varepsilon(c_{41} + c_{42}l)} |u_1^0 - \bar{u}_1^0|. \end{aligned}$$

Somit bildet der Operator \mathcal{T} unter den Voraussetzungen von 3.1 den Raum $C(d, l)$ in sich selbst ab.

Lemma 3.2 *Unter den Voraussetzungen von 3.1 ist die Abbildung $\mathcal{T} : C(d, l) \rightarrow C(d, l)$ lipschitzstetig bezüglich η .*

Beweis: Aus (3.28), (3.26), (3.21) und (3.19) erhalt man

$$\begin{aligned}
& |(\mathcal{T}\eta)(u_1^0, t, \varepsilon) - (\mathcal{T}\bar{\eta})(u_1^0, t, \varepsilon)| \\
& \leq \int_{-\infty}^t c e^{-\gamma(t-\tau)/\varepsilon} |g(\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0), \eta(\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0), \tau, \varepsilon), \tau) \\
& \quad - g(\varphi^{\bar{\eta}}(\tau, \varepsilon, u_1^0), \bar{\eta}(\varphi^{\bar{\eta}}(\tau, \varepsilon, u_1^0), \tau, \varepsilon), \tau)| d\tau \\
& \leq c \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-\tau)/\varepsilon} \left(c_{51} |\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^{\bar{\eta}}(\tau, \varepsilon, u_1^0)| \right. \\
& \quad + c_{52} (|\eta(\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0), \tau, \varepsilon) - \eta(\varphi^{\bar{\eta}}(\tau, \varepsilon, u_1^0), \tau, \varepsilon)| \\
& \quad \left. + |\bar{\eta}(\varphi^{\bar{\eta}}(\tau, \varepsilon, u_1^0), \tau, \varepsilon) - \bar{\eta}(\varphi^{\bar{\eta}}(\tau, \varepsilon, u_1^0), \tau, \varepsilon)|) \right) d\tau \\
& \leq c(c_{51} + c_{52}l) \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-\tau)/\varepsilon} |\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^{\bar{\eta}}(\tau, \varepsilon, u_1^0)| d\tau \\
& \quad + \frac{c\varepsilon c_{52}}{\gamma} \|\eta - \bar{\eta}\|. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Aus (3.32), (3.18) und (3.22) folgt

$$\begin{aligned}
& |\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^{\bar{\eta}}(\tau, \varepsilon, u_1^0)| \\
& \leq \int_\tau^t |f(\varphi^\eta(s, \varepsilon, u_1^0), \eta(\varphi^\eta(s, \varepsilon, u_1^0), s, \varepsilon), s) - f(\varphi^{\bar{\eta}}(s, \varepsilon, u_1^0), \bar{\eta}(\varphi^{\bar{\eta}}(s, \varepsilon, u_1^0), s, \varepsilon), s)| ds \\
& \leq \int_\tau^t \left(c_{41} |\varphi^\eta(s, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^{\bar{\eta}}(s, \varepsilon, u_1^0)| + c_{42} (|\eta(\varphi^\eta(s, \varepsilon, u_1^0), s, \varepsilon) - \eta(\varphi^{\bar{\eta}}(s, \varepsilon, u_1^0), s, \varepsilon)| \right. \\
& \quad \left. + |\bar{\eta}(\varphi^{\bar{\eta}}(s, \varepsilon, u_1^0), s, \varepsilon) - \bar{\eta}(\varphi^{\bar{\eta}}(s, \varepsilon, u_1^0), s, \varepsilon)|) \right) ds \\
& \leq \int_\tau^t \left((c_{41} + c_{42}l) |\varphi^\eta(s, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^{\bar{\eta}}(s, \varepsilon, u_1^0)| \right) ds + c_{42} \|\eta - \bar{\eta}\| (t - \tau).
\end{aligned}$$

Anwendung der Gronwall-Ungleichung liefert

$$|\varphi^\eta(\tau, \varepsilon, u_1^0) - \varphi^{\bar{\eta}}(\tau, \varepsilon, u_1^0)| \leq \frac{c_{42} \|\eta - \bar{\eta}\|}{c_{41} + c_{42}l} \left(e^{(c_{41} + lc_{42})(t-\tau)} - 1 \right). \tag{3.35}$$

Setzt man (3.35) in (3.34) ein und berucksichtigt (3.31), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& |(\mathcal{T}\eta)(u_1^0, t, \varepsilon) - (\mathcal{T}\bar{\eta})(u_1^0, t, \varepsilon)| \\
& \leq \frac{c(c_{51} + lc_{52})}{c_{41} + lc_{42}} c_{42} \|\eta - \bar{\eta}\| \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-\tau)/\varepsilon} (e^{(c_{41} + lc_{42})(t-\tau)} - 1) d\tau + \frac{c\varepsilon c_{52}}{\gamma} \|\eta - \bar{\eta}\| \\
& = \left(\frac{\varepsilon^2 c(c_{51} + lc_{52})c_{42}}{\gamma(\gamma - \varepsilon(c_{41} + lc_{42}))} + \frac{c\varepsilon c_{52}}{\gamma} \right) \|\eta - \bar{\eta}\| = \frac{c\varepsilon}{\gamma} \left(\frac{\varepsilon(c_{51} + lc_{52})c_{42}}{\gamma - \varepsilon(c_{41} + c_{42}l)} + c_{52} \right) \|\eta - \bar{\eta}\|.
\end{aligned}$$

Lemma 3.1, Lemma 3.2 und die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes liefern folgendes Resultat:

Lemma 3.3 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.1 und der Zusatzvoraussetzung*

$$\frac{c\varepsilon}{\gamma} \left(\frac{\varepsilon(c_{51} + lc_{52})c_{42}}{\gamma - \varepsilon(c_{41} + c_{42}l)} + c_{52} \right) \leq q < 1 \tag{3.36}$$

besitzt der Operator \mathcal{T} einen eindeutigen Fixpunkt $\eta^ \in C(d, l)$.*

Da $u_2 = \eta^*(u_1, t, \varepsilon)$ eine e.a.i.M. von (3.16) darstellt, folgt aus 3.3:

Theorem 3.1 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.3 besitzt das SGP (3.16) eine e.a.i.M. $\mathcal{M}_\varepsilon^{d,l} := \{(u_1, u_2) \in R^{m+k} : u_2 = \eta^*(u_1, t, \varepsilon)\}$ mit $\eta^* \in C(d, l)$.*

Bemerkung 3.1 *Es ist klar, dass die Ungleichungen (3.29), (3.30), (3.31) und (3.36) für hinreichend kleine ε erfüllt sind. Folglich kann 3.1 wie folgt formuliert werden:*

Theorem 3.2 *Unter den Voraussetzungen (A_1) – (A_3) und für hinreichend kleine ε besitzt das singular gestörte Problem (3.16) eine e.a.i.M. $\mathcal{M}_\varepsilon^{d,l} := \{(u_1, u_2) \in R^{m+k} : u_2 = \eta^*(u_1, t, \varepsilon)\}$ mit $\eta^* \in C(d, l)$.*

Für gegebene Zahlen d und l erhält man aus den Ungleichungen (3.29), (3.30), (3.31) und (3.36) ein maximales positives $\varepsilon^*(d, l)$, derart, dass (3.16) für $0 \leq \varepsilon < \varepsilon^*$ eine e.a.i.M. $\mathcal{M}_\varepsilon^{d,l}$ besitzt. Wir bestimmen dieses Maximum als Funktion von l .

Wenn $c_{41} = c_{42} = c_{51} = c_{52} = 0$ gilt, dann sind die Ungleichungen (3.30), (3.31) und (3.36) trivialerweise erfüllt. Es sei nun wenigstens eine dieser Konstanten positiv.

Aus (3.31) und (3.30) erhält man die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon &< \frac{\gamma}{c_{41} + c_{42}l} =: \varepsilon_1(l), \\ \varepsilon &\leq \frac{l\gamma}{c(c_{51} + c_{52}l) + l(c_{41} + c_{42}l)} =: \varepsilon_2(l). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$\varepsilon_1(l) \geq \varepsilon_2(l) \quad \text{für } l \geq 0.$$

Unter Bedingung (3.30) ist die Ungleichung (3.36) äquivalent zu

$$\varepsilon^2 c(c_{51}c_{42} - c_{52}c_{41}) + \varepsilon \gamma(c_{52}c + c_{41} + c_{42}l) < \gamma^2. \quad (3.37)$$

Wir führen folgende Bezeichnung ein

$$\kappa := c(c_{42}c_{51} - c_{41}c_{52}), \quad \mu := c c_{52} + c_{41} + c_{42}l.$$

Ist $\kappa = 0$, so hat (3.37) die Form

$$\varepsilon < \frac{\gamma}{c_{52}c + c_{41} + c_{42}l} := \varepsilon_3(l).$$

Wieder gilt $\varepsilon_2(l) \leq \varepsilon_3(l)$ für alle $l \geq 0$.

Der Fall $\kappa < 0$ kann auf den Fall $\kappa = 0$ zurückgeführt werden. Wir nehmen jetzt $\kappa > 0$ an. Dann ist (3.37) äquivalent zu

$$\varepsilon^2 + \varepsilon \frac{\gamma\mu}{\kappa} < \frac{\gamma^2}{\kappa}. \quad (3.38)$$

Offensichtlich ist (3.38) erfüllt für

$$\varepsilon < \frac{\gamma}{2\kappa} \left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\kappa} \right) = \frac{2\gamma}{\sqrt{\mu^2 + 4\kappa} + \mu} =: \varepsilon_4(l).$$

Der Beweis der Ungleichung $\varepsilon_2(l) \leq \varepsilon_4(l)$ für alle $l \geq 0$ ist äquivalent zum Nachweis, dass

$$\frac{l}{cc_{51} + l\mu} \leq \frac{2}{\sqrt{\mu^2 + 4\kappa} + \mu}.$$

gilt. Diese Ungleichung ist wahr, falls

$$l^2\kappa \leq c^2c_{51}^2 + cc_{51}l\mu. \quad (3.39)$$

richtig ist. Die Gültigkeit von (3.39) folgt aber aus der offensichtlichen Ungleichung

$$l\kappa \leq cc_{51}\mu.$$

Folglich müssen wir, um $\varepsilon^* = \varepsilon^*(l)$ zu maximieren, das Maximum von $\varepsilon_2(l)$ suchen. Man prüft leicht nach, dass die Funktion $\varepsilon_2(l)$ an der Stelle

$$l = l^* := \frac{\sqrt{cc_{42}c_{51}}}{c_{42}}.$$

ihren Maximalwert $\frac{\gamma}{cc_{52} + 2\sqrt{cc_{51}c_{42}} + c_{41}}$ annimmt. Somit gilt

Lemma 3.4 *Unter den Voraussetzungen*

$$c_{51} > 0, \quad c_{42} > 0,$$

nimmt die Funktion $\varepsilon^ = \varepsilon^*(l)$ ihr Maximum an der Stelle $l = l^*$ an.*

3.4 Lokale Reduktion des Zustandsraumes

Wir betrachten ein n-dimensionales System der Form

$$\frac{dz}{dt} = h(z, t) \quad (z, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (3.40)$$

unter der Annahme der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit der Funktion h nach z und t . Im Weiteren werden Bedingungen hergeleitet, welche sichern, dass eine Lösung des Systems (3.40) in einem gewissen Teilgebiet des (z, t) -Raumes durch eine Lösung eines Differentialgleichungssystems, dessen Dimension kleiner als n ist, approximiert werden kann. Zu diesem Zweck transformieren wir das System (3.40) in ein System der Form (3.16), um Theorem 3.1 anwenden zu können. Sei (z_0, t_0) ein beliebiger fixierter Punkt. In diesem Punkt führen wir eine **Taylor**-Entwicklung der Funktion $h(z, t)$ durch. Unter unseren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ist (3.40) äquivalent zum System

$$\frac{dz}{dt} = h^0 + J^0(z - z_0) + \tilde{h}(z, t, z_0, t_0), \quad (3.41)$$

wobei

$$\tilde{h}(z, t, z_0, t_0) = h(z, t) - h^0 - J^0(z - z_0), \quad J^0 = h_z(z_0, t_0)$$

und $h_z(z_0, t_0)$ die Jacobimatrix von $h(z, t)$ ist.

In einer Umgebung von (z_0, t_0) gilt

$$\tilde{h}(z, t, z_0, t_0) = O(|z - z_0|^2 + |t - t_0|).$$

Wir berechnen nun das Spektrum σ^0 von J^0 und zerlegen es in zwei disjunkte Mengen $\sigma_{-\nu}^0$ und σ_r^0 , wobei die Realteile aller zu $\sigma_{-\nu}^0$ gehörenden Eigenwerte kleiner als $-\nu$ mit $\nu > 0$ sind. Mittels Blockdiagonalisierung erhält man eine reguläre Matrix T mit der Eigenschaft

$$T^{-1}J^0T =: S^0 = \text{diag}(S_{11}^0, S_{22}^0), \quad (3.42)$$

wobei S_{11}^0 und S_{22}^0 obere Dreiecksmatrizen sind. Für die Spektren der Matrizen S_{11}^0 und S_{22}^0 gilt $\sigma(S_{11}^0) = \sigma_r^0$, $\sigma(S_{22}^0) = \sigma_{-\nu}^0$. Nach Anwendung der Koordinatentransformation $z = z_0 + Tu$ erhält man aus (3.41).

$$\frac{du}{dt} = T^{-1}h^0 + S^0u + T^{-1}\tilde{h}(z_0 + Tu, t, z_0, t_0). \quad (3.43)$$

Unter Berücksichtigung der Blockdiagonalstruktur von (3.42) lässt sich (3.43) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \hat{h}_1^0 + S_{11}^0u_1 + \bar{h}_1(u, t, z_0, t_0), \\ \frac{du_2}{dt} &= \hat{h}_2^0 + S_{22}^0u_2 + \bar{h}_2(u, t, z_0, t_0). \end{aligned} \quad (3.44)$$

darstellen. Nun multiplizieren wir die zweite Gleichung in (3.44) mit ε_ν , $\varepsilon_\nu := \nu^{-1}$ und führen die Bezeichnung $\overline{S_{22}^0} := \varepsilon_\nu S_{22}^0$ ein. Dann hat (3.44) die Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \hat{h}_1^0 + S_{11}^0u_1 + \bar{h}_1(u, t, z_0, t_0), \\ \varepsilon_\nu \frac{du_2}{dt} &= \varepsilon_\nu \hat{h}_2^0 + \overline{S_{22}^0}u_2 + \varepsilon_\nu \bar{h}_2(u, t, z_0, t_0), \end{aligned}$$

wobei alle Eigenwerte von $\overline{S_{22}^0}$ Realteile kleiner als -1 besitzen. Im Folgenden betrachten wir das singular gestörte System

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= S_{11}^0u_1 + \hat{h}_1^0 + \bar{h}_1(u, t, z_0, t_0), \\ \varepsilon \frac{du_2}{dt} &= \overline{S_{22}^0}u_2 + \varepsilon \hat{h}_2^0 + \varepsilon \bar{h}_2(u, t, z_0, t_0) \end{aligned} \quad (3.45)$$

für $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_\nu$, welches genau die Struktur von System (3.16) hat. Dabei gilt

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, t) &= S_{11}^0u_1 + \hat{h}_1^0 + \bar{h}_1(u_1, u_2, t, z_0, t_0), \\ g(u_1, u_2, t) &= \hat{h}_2^0 + \bar{h}_2(u_1, u_2, t, z_0, t_0). \end{aligned}$$

Für $\varepsilon = 0$ besitzt das System (3.45) die Integralmannigfaltigkeit $u_2 \equiv 0$. Wenn wir nachweisen können, dass für das System (3.45) die Voraussetzungen für Theorem 3.1 erfüllt sind, dann besitzt (3.45) für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_\nu$ eine e.a.i.M. der Form

$$u_2 = \eta^*(u_1, t, \varepsilon) = \varepsilon\varphi(u_1, t) + O(\varepsilon^2)$$

in einer d -Umgebung des Punktes $(u, t) = (0, t_0)$. In diesem Fall können wir schließen, dass auch (3.40) eine e.a.i.M. in einer Umgebung des Punktes (z_0, t_0) besitzt. Wenn (z_0, t_0) zusätzlich im Einflussbereich der e.a.i.M. liegt und d hinreichend klein ist, dann lässt sich die Lösungskurve von (3.40), die durch den Punkt (z_0, t_0) hindurchgeht durch eine Lösungskurve des reduzierten entarteten Systems

$$\frac{du_1}{dt} = S_{11}^0 u_1 + \hat{h}_1^0 + \bar{h}_1(u_1, \varepsilon\varphi(u_1, t), t, z_0, t_0). \quad (3.46)$$

ersetzen.

Wir beschreiben nun den Prozess der Bestimmung der wesentlichen Variablen des Systems (3.40) in einer Umgebung (z_0, t_0) mit Hilfe von Theorem 3.1. Dies ist equivalent einer lokalen Reduktion des Zustandsraumes.

Algorithmus:

- S1. Wir berechnen das Spektrum σ^0 von J^0 für einen Startwert (z_0, t_0) . Wenn σ^0 keine Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt, so wird (z_0, t_0) durch einen anderen Startwert ersetzt, den wir beispielsweise durch numerische Integration mit dem Startwert (z_0, t_0) erhalten. Falls sich kein Punkt (z_0, t_0) mit der oben genannten Eigenschaft finden lässt, so kann die Dimension des Phasenraumes mit Hilfe unserer Methode nicht reduziert werden.
- S2. Wir nehmen an, σ^0 besitzt (wenigstens einen) Eigenwert mit negativem Realteil. Wir wählen eine negative Zahl $-\nu$, den sogenannten Splitting-Parameter, derart, dass für einen gewissen Index j die Beziehung $-\lambda_j < -\nu < -\lambda_{j-1}$ gilt und berechnen die reelle Schur-Zerlegung $S^0 = \text{diag}(S_{11}^0, S_{22}^0)$ gemäß dem Splitting-Parameter $-\nu$, d.h.

$$\begin{aligned} \text{Re } \sigma(S_{22}^0) &\leq -\lambda_j \leq -\nu, \\ \text{Re } \sigma(S_{11}^0) &\geq -\nu. \end{aligned}$$

Falls alle Eigenwerte der Matrix S_{22}^0 mit einem Realteil $-\lambda_j$ einfach sind, sehen wir $\nu = \lambda_j$ in allen anderen Fällen $\nu < \lambda_j$. Anschließend sehen wir $\varepsilon_\nu := \nu^{-1}$. Somit gilt $\text{Re } \sigma(S_{22}^0) < \gamma = 1$.

- S3. Wir transformieren (3.40) in die Form (3.45).
- S4. Sei \sum_ϱ eine Kugel in $\mathbb{R}_{u_1}^m \times \mathbb{R}_{u_2}^k \times \mathbb{R}$ mit dem Radius ϱ und dem Mittelpunkt $(0, t_0)$. Wir wählen eine (kleine) Zahl d (siehe (3.20)) und berechnen die Konstanten $c_1, c_2, c_{41}, c_{42}, c_{51}, c_{52}$ in Annahme (A_2) für die Kugel \sum_d .
- S5. Wir berechnen die Konstante c in (3.26). Falls alle Eigenwerte der Matrix B einfach sind, so können wir $c = 1$ setzen.

- S6. Wir berechnen l^* und überprüfen die Gültigkeit der Ungleichungen (3.29) – (3.31) und (3.36) für $\gamma = 1$ und $\varepsilon = \varepsilon_\nu$. Sind die Ungleichungen erfüllt, dann existiert in Σ_d gemäß Theorem 3.1 eine e.a.i.M. von (3.16) und das System (3.40) kann zu (3.46) reduziert werden. Sind die Ungleichungen nicht erfüllt, so setzen wir mit S2. fort, indem wir einen größeren Splitting-Parameter wählen, so dass das entsprechende ε_ν kleiner wird.
- S7. Wenn ν nicht mehr vergrößert werden kann, so wählen wir einen anderen Startwert (z_0, t_0) und setzen mit S1. fort.

Ist d hinreichend klein, so können wir die Konstanten c_2, \dots, c_{52} näherungsweise wie folgt ansehen:

$$c_2 \approx |\hat{h}_2^0|, \quad c_{41} \approx |S_{11}^0|, \quad c_{42} \approx 0, \quad c_{51} \approx 0, \quad c_{52} \approx 0.$$

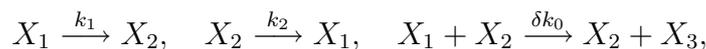
In diesem Fall sprechen wir vom vereinfachten Algorithmus. Für den vereinfachten Algorithmus erhält man $\varepsilon_1(l) \equiv \varepsilon_2(l) \equiv \varepsilon_3(l) \equiv \varepsilon_4(l) \equiv |S_{11}^0|^{-1}$. Somit hat die Lipschitz-Konstante l keinen Einfluss auf ε^* . Um die Existenz einer e.a.i.M. des Systems (3.45) für $\varepsilon = \varepsilon_\nu$ zu zeigen, müssen wir die Ungleichungen (3.29) – (3.31) und (3.36) nachweisen. Unter unseren Annahmen bezüglich der Konstanten $c_2, c_{41}, c_{42}, c_{51}, c_{52}$ sind diese Ungleichungen äquivalent zu

$$\frac{|S_{11}^0|}{\nu} < 1, \quad \frac{c|\hat{h}_2^0|}{\nu} < d. \quad (3.47)$$

Speziell gilt: Falls alle Eigenwerte von J^0 negative Realteile besitzen, so ist die erste der Ungleichungen (3.47) stets erfüllt.

3.5 Das Beispiel von Duchêne/Rouchon

Von Duchêne und Rouchon wurde folgendes einfaches chemisches Reaktionsschema betrachtet.



wobei X_1, X_2, X_3 chemische Substanzen und $k_1, k_2, \delta k_0$ konstante Reaktionsgeschwindigkeiten sind. Der kleine Parameter $\delta > 0$ weist darauf hin, dass die dritte Reaktion im Vergleich zu den anderen beiden langsam ist. Die Reaktionen lassen sich durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -k_1 x_1 + k_2 x_2 - \delta k_0 x_1 x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= k_1 x_1 - k_2 x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \delta k_0 x_1 x_2, \end{aligned}$$

wobei x_i die Konzentration des Stoffes $X_i, i = 1, 2, 3$ bezeichnet. Offensichtlich ist die dritte Gleichung eine Linearkombination der ersten und zweiten, so dass wir uns auf das System

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -k_1 x_1 + k_2 x_2 - \delta k_0 x_1 x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= k_1 x_1 - k_2 x_2.\end{aligned}\tag{3.48}$$

beschränken können.

3.5.1 Näherungsweise Berechnung einer e.a.i.M.

Mittels einer Koordinatentransformation der Form $\xi = x_1 + x_2$, $x_2 = x_2$ erhält man aus (3.48)

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= -\delta k_0 (\xi - x_2) x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= k_1 (\xi - x_2) - k_2 x_2.\end{aligned}\tag{3.49}$$

Die Substitution $t = \delta^{-1} \tau$ und die Einführung der Bezeichnungen

$$\xi(\delta^{-1} \tau) = y_1(\tau), \quad x_2(\delta^{-1} \tau) = y_2(\tau)$$

überführt das System (3.49) in das singular gestörte System

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\tau} &= -k_0 y_1 y_2 + k_0 y_2^2, \\ \delta \frac{dy_2}{d\tau} &= k_1 y_1 - (k_1 + k_2) y_2\end{aligned}\tag{3.50}$$

mit einem kleinen Parameter δ . Die entsprechende entartete Gleichung

$$0 = k_1 y_1 - (k_1 + k_2) y_2 := g(y_1, y_2)$$

besitzt eine eindeutige Lösung

$$y_2 = h_0(y_1) := \frac{k_1}{k_1 + k_2} y_1$$

für welche

$$J(y_1, h_0(y_1)) := \frac{\partial g}{\partial y_2} \Big|_{y_2=h_0(y_1)} = -(k_1 + k_2) < 0.$$

gilt. Mittels der Transformation

$$y_2 = w_2 + \frac{k_1}{k_1 + k_2} y_1,$$

erhält man aus (3.50) ein System der Gestalt (3.16):

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= -\frac{k_0 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} y_1^2 + \frac{k_0(k_1 - k_2)}{k_1 + k_2} y_1 w_2 + k_0 w_2^2, \\ \delta \frac{dw_2}{d\tau} &= -(k_1 + k_2) w_2 - \frac{\delta k_1}{k_1 + k_2} \left\{ -\frac{k_0 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} y_1^2 + \frac{k_0(k_1 - k_2)}{k_1 + k_2} y_1 w_2 + k_0 w_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Wie man leicht sieht, sind für kleine δ in einem kompakten Gebiet der Phasenebene alle Voraussetzungen von Theorem 3.1 erfüllt. Somit besitzt (3.51) eine e.a.i.M. \mathcal{M}_δ der Gestalt

$$w_2 = \delta \varphi_1(y_1) + O(\delta^2).$$

Man erhält nach elementaren Berechnungen

$$\varphi_1(y_1) := \frac{k_0 k_1^2 k_2}{(k_1 + k_2)^4} y_1^2,$$

und somit

$$w_2 = \delta \frac{k_0 k_1^2 k_2}{(k_1 + k_2)^4} y_1^2 + O(\delta^2).$$

In den Originalkoordinaten besitzt \mathcal{M}_δ eine implizite Darstellung der Form

$$x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} (x_1 + x_2) \left(1 + \delta \frac{k_0 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^3} (x_1 + x_2) + O(\delta^2) \right). \quad (3.52)$$

3.5.2 Anwendung des vereinfachten Algorithmus

Wir fixieren die Parameter mit den Werten $k_0 = 10$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $\delta = 0.01$ so dass (3.48) nun die Form

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_1 + 3x_2 - 0.01x_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 - 3x_2. \end{aligned}$$

annimmt. In Tabelle 1 sind vier Ausgangsstartwerte (x_1^0, x_2^0) aufgelistet.

	I _o	II _o	III _o	IV _o
x_1^0	2.0000	0.5000	3.0000	0.0000
x_2^0	5.0000	2.0000	0.5000	0.0000
$y_1(0)$	7.0000	2.5000	3.5000	0.0000
$w_2(0)$	0.0940	0.0120	0.0235	0.0000

Tabelle:1 Ausgangsstartwerte

Wir nutzen nun den vereinfachten Algorithmus, um zu überprüfen, ob diese Punkte in der Nähe einer e.a.i.M. des Systems (3.48) liegen und ob die Dimension des Phasenraumes in einer gewissen Umgebung dieser Punkte reduziert werden kann. Zuerst wenden wir die

Koordinatentransformation $x = x_0 + Tu$ auf (3.48) nacheinander für alle vier Startwerte $I_0 - IV_0$ an. Im Fall I_0 erhält man

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= -1.1889 - 0.3704u_1 - 0.0335u_1^2 - 0.0073u_1u_2 + 0.0356u_2^2 \\ \frac{du_2}{dt} &= -14.8091 - 5.1296u_2 + 0.0292u_1^2 + 0.0064u_1u_2 - 0.0311u_2^2,\end{aligned}$$

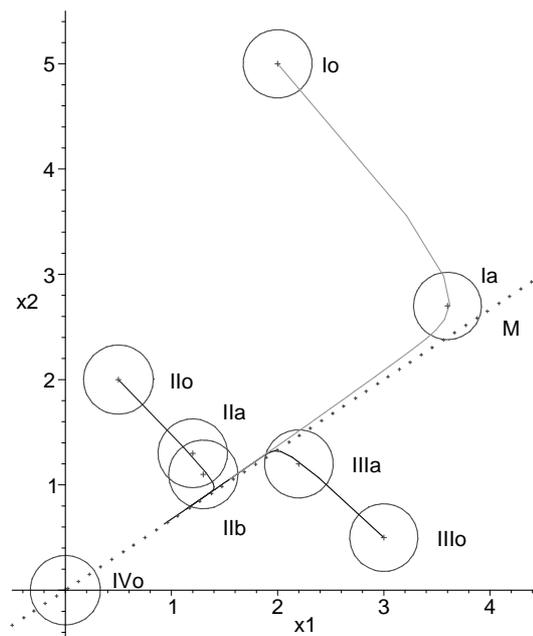
Analoge Systeme ergeben sich in den anderen Fällen.

Als Umgebung Σ_d von $u_1 = u_2 = 0$ wählen wir einen Kreis mit dem Radius $d = 0.3$ d.h., $\Sigma_{0.3} := \{u \in \mathbb{R}^2 : |u| \leq 0.3\}$. Aus $x - x^0 = Tu$ erhält man $|x - x^0| \leq |T|d := r_0$. Da die Eigenwerte einfach sind, setzen wir $\varepsilon_\nu^{-1} = \nu = |\lambda_2|$, so dass $\gamma = 1$ ist. Ferner gilt $c = 1$ und wir erhalten die Resultate in Tabelle 2.

	I_0	II_0	III_0	IV_0
λ_1	-0.3704	-0.1383	-0.1532	0
$\lambda_2 = -\nu$	-5.1296	-5.0617	-4.8968	-5
$ S_{11}^0 /\nu$	0.0722	0.0273	0.0313	0
$ \hat{h}_2^0 /\nu$	2.8870	1.3642	1.2978	0
d	0.3	0.3	0.3	0.3
$ T $	1.0876	1.1011	1.0765	1.1049
$ T d = r_0$	0.3263	0.3303	0.3229	0.3315

Tabelle 2: Charakteristische Daten des vereinfachten Algorithmus

Weil alle Eigenwerte negativ sind, ist die Bedingung $|S_{11}^0|/\nu < 1$ in allen Fällen erfüllt, jedoch die Ungleichung $|\hat{h}_2^0|/\nu < d = 0.3$ gilt nicht in den Fällen $I_0 - III_0$.



Figur 7

Figur 7 zeigt die e.a.i.M. M (gestrichelte Linie) und die Lösung von (3.48) für die Startwerte $I_0 - IV_0$. Dabei ist M die Approximation von \mathcal{M}_δ für $\delta = 0$ (s. 3.52), also $x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2}(x_1 + x_2)$ oder $x_2 = \frac{k_1}{k_2}x_1 = \frac{2}{3}x_1$.

Man sieht, dass die entsprechenden Lösungskurven sich der Geraden M nähern und dass er Punkt $(u_1, u_2) = (0, 0)$ auf M liegt. Die Kreise mit Mittelpunkten in den Startwerten haben die Radien $r_0 = |T|d$, wobei T und folglich r_0 vom Startwert abhängen. Wenn die Ungleichungen (3.47) für gewisse Punkte erfüllt sind, dann enthalten die entsprechenden Kreise ein Teilstück der e.a.i.M. von (3.48). Offensichtlich haben in den Fällen $I_0 - III_0$ die Startwerte einen Abstand von M , der größer als r_0 ist.

Nun berechnen wir die Lösungskurven für die Startwerte $I_0 - III_0$ für einige Zeitschritte und erhalten neue Startwerte, aufgelistet in Tabelle 3.

	Ia	IIa	IIb	IIIa
x_1^0	3.6247	1.2147	1.3204	2.2301
x_2^0	2.7154	1.3286	1.1027	1.2067

Tabelle 3: Geänderte Startwerte

Nach Wiederholung der Rechnungen erhalten wir die Resultate in Tabelle 4.

	Ia	IIa	IIb	IIIa
λ_1	-0.3084	-0.1262	-0.1182	-0.1613
$\lambda_2 = -\nu$	-4.9616	-5.0079	-4.9916	-4.9631
$ S_{11}^0 /\nu$	0.0622	0.0252	0.0237	0.0325
$ \hat{h}_2^0 /\nu$	0.1369	0.3995	0.1788	0.2555
d	0.3	0.3	0.3	0.3
$ T $	1.0711	1.0943	1.0933	1.0846
$ T d = r_0$	0.3213	0.3283	0.3279	0.3254

Tabelle 4: Charakteristisch Daten des vereinfachten Algorithmus

Wir sehen, dass die Ungleichung $|\hat{h}_2^0|/\nu < 0.3$ nur im Fall II_a nicht erfüllt ist. Außerdem zeigt Bild 1, dass die berechneten Punkte I_a, II_b, III_a einen Abstand kleiner als r_0 von M besitzen, d.h. die entsprechenden Kreise enthalten ein Teilstück der e.a.i.M.. Im Fall II_a ist jedoch dieser Abstand größer als r_0 . Folglich kann in den Fällen I_a, II_b und III_a die Dimension des Phasenraumes reduziert werden.