

# Vorlesungsskript Mathematik II für Chemiker

Verfasserin:  
HSD Dr. Sybille Handrock  
TU Chemnitz  
Fakultät für Mathematik  
e-mail: handrock@mathematik.tu-chemnitz.de

Sommersemester 2006

## Literatur

- [1] *Dallmann, H., Elster, K. H.*: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Bd. 1–2, Uni-TB GmbH, Stuttgart, 1991.
- [2] *Heuser, H.*: Gewöhnliche Differenzialgleichungen, B.G. Teubner, Stuttgart, 2004.
- [3] *Neumayer, B., Kaup, S.*: Mathematik für Ingenieure III, Shaker Verlag, Aachen, 2004.
- [4] *Papula, L.*: Mathematik für Chemiker, Enke-Verlag, Stuttgart, 1991.
- [5] *Reinsch, E.-A.*: Mathematik für Chemiker, B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 2004.
- [6] *Rösch, N.*: Mathematik für Chemiker, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [7] *Wenzel, H., Meinhold, P.*: Gewöhnliche Differenzialgleichungen, B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1994.

[8] *Zachmann, H.G.*: Mathematik für Chemiker, Wiley–VCH, Weinheim, 2003.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>1</b>
1.1	Vektorräume . . . . .	1
1.2	Matrizen und Determinanten . . . . .	3
1.2.1	Begriff der Matrix . . . . .	3
1.2.2	Rechenoperationen mit Matrizen . . . . .	5
1.2.3	Die Determinante einer quadratischen Matrix . . . . .	7
1.2.4	Der Rang einer Matrix . . . . .	9
1.2.5	Die inverse Matrix . . . . .	10
1.2.6	Spezielle Matrizen . . . . .	11
1.3	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	12
1.3.1	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	12
1.3.2	Lösungsstruktur IGS . . . . .	16
1.3.3	Lösungsverfahren . . . . .	17
1.4	Matrizeigenwertprobleme . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Vektoranalysis</b>	<b>23</b>
2.1	Vektorfunktionen . . . . .	23
2.2	Skalar- und Vektorfelder . . . . .	25
2.3	Produkte des Nabla-Operators mit einem SF bzw. VF . . . . .	26
2.4	Nabla-Rechnung . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Integralrechnung für reelle Funktionen einer reellen Variablen</b>	<b>30</b>
3.1	Das unbestimmte Integral . . . . .	30
3.1.1	Der Begriff der Stammfunktion . . . . .	30
3.1.2	Grundregeln zur Berechnung unbestimmter Integrale . . . . .	30
3.1.3	Integration gebrochen rationaler Funktionen . . . . .	31
3.2	Das bestimmte Integral . . . . .	35
3.2.1	Definition und Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . . .	35
3.2.2	Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung . . . . .	37
3.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	39
3.3.1	Uneigentliche Integrale über einem unbeschränkten Intervall . . . . .	39
3.3.2	Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Integralrechnung für reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen</b>	<b>41</b>

4.1	Ebene und räumliche Bereichsintegrale . . . . .	41
4.2	Kurvenintegrale . . . . .	43
4.3	Oberflächenintegrale . . . . .	45
4.4	Die Integralsätze . . . . .	46
4.4.1	Die Divergenz und der Integralsatz von Gauß . . . . .	46
4.4.2	Die Rotation und der Integralsatz von Stokes . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Gewöhnliche Differenzialgleichungen</b>	<b>49</b>
5.1	Gewöhnliche Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	49
5.1.1	Definition und einfachste Spezialfälle . . . . .	49
5.1.2	Geometrische Interpretation für gDG der Form $y' = f(x, y)$ . . . . .	50
5.1.3	GDG mit trennbaren Variablen . . . . .	51
5.1.4	Lineare gDG 1. Ordnung . . . . .	53
5.2	Systeme lgDG 1. Ordnung . . . . .	55
5.2.1	Allgemeine Bemerkungen . . . . .	55
5.2.2	Lösungsstruktur linearer Systeme . . . . .	56
5.2.3	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	58

# 1 Lineare Algebra

## 1.1 Vektorräume

**Definition 1.1 (Vektorraum, Unterraum, lineare Mannigfaltigkeit)**

1. Eine Menge  $L$  von Elementen beliebiger Natur, in der eine Addition  $(+)$  und eine Multiplikation mit einer reellen (komplexen) Zahl  $(\cdot)$  erklärt ist, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \text{für beliebige zwei } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L &\implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in L, \\ \text{für jedes } \mathbf{x} \in L \text{ und jedes } \alpha \in \mathbb{R} &\implies \alpha \cdot \mathbf{x} \in L, \end{aligned}$$

heißt **reeller linearer Raum (komplexer linearer Raum) oder Vektorraum**  $V = [L, +, \cdot]$ , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

I. Gesetze bezüglich der Addition

- 1° Für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$  gilt:  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ .
- 2° Für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$  gilt:  $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ .
- 3° Es existiert genau ein bezüglich der Addition neutrales Element  $\Theta$ , so dass für alle  $\mathbf{x} \in L$  gilt:  $\mathbf{x} + \Theta = \mathbf{x}$ . Das Element  $\Theta$  heißt **Nullvektor**.
- 4° Zu jedem  $\mathbf{x} \in L$  existiert ein bezüglich der Addition inverses Element  $(-\mathbf{x}) \in L$ , so dass  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \Theta$  gilt. Das Element  $(-\mathbf{x})$  heißt der zu  $\mathbf{x}$  entgegengesetzte Vektor.

II. Gesetze bezüglich der Multiplikation mit einer reellen Zahl

- 1° Für alle  $\mathbf{x} \in L$  und alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:  $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ .
- 2° Für alle  $\mathbf{x} \in L$  gilt:  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

III. Distributivgesetze: Für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$  und alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

- 1°  $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
- 2°  $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

2. Eine Teilmenge  $U$  eines Vektorraumes  $V$  heißt **Unterraum** von  $V$ , falls gilt:

$$\begin{aligned} \text{für beliebige zwei } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U &\implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in U, \\ \text{für jedes } \mathbf{x} \in U \text{ und jedes } \alpha \in \mathbb{R} &\implies \alpha \cdot \mathbf{x} \in U. \end{aligned}$$

3. Eine Teilmenge  $W \subset V$  heißt **lineare Mannigfaltigkeit** in  $V$ , wenn ein Element  $\mathbf{x}_0 \in V$  und ein Unterraum  $U$  von  $V$  existieren, so dass gilt:

$$W = U + \mathbf{x}_0 = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{x}_0, \mathbf{u} \in U\}.$$

**Beispiel 1.1 (Wichtige Vektorräume)**

- (1) Die Menge  $C[a, b]$  aller im Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktionen mit den Operationen

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x) \quad (\alpha f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

ist ein **Vektorraum**, den wir mit  $[C[a, b], +, \cdot]$  bezeichnen. Die Menge  $C^1[a, b]$  aller im Intervall  $[a, b]$  einmal stetig differenzierbaren Funktionen mit den obigen Operationen ist ein **Unterraum**  $[C^1[a, b], +, \cdot]$  des Vektorraumes  $[C[a, b], +, \cdot]$ .

(2) Die Menge  $\mathbb{R}^n$  aller geordneten n-Tupel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

reeller Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit den Operationen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

ist ein **Vektorraum**, den wir ebenfalls mit  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen.

Speziell erhält man für  $n = 2$  den **Vektorraum**  $\mathbb{R}^2$  aller geordneten Paare reeller Zahlen (vgl. Skript Mathematik I, S. 30). Jedes geordnete Paar  $(x_1, x_2)$  legt einen Punkt  $P$  in der Ebene fest und zwar den Punkt mit den (kartesischen) **Koordinaten**  $x_1$  und  $x_2$ . Wir schreiben  $P = (x_1, x_2)$ . Jedes geordnete Paar reeller Zahlen kann man folglich als **Koordinatenschreibweise** des **Ortsvektors**  $\overrightarrow{OP}$  bezüglich eines festen Koordinatensystems auffassen, was die Bezeichnung **Vektorraum** erklärt.

Für  $n = 3$  erhält man den **Vektorraum**  $\mathbb{R}^3$  aller geordneten Tripel reeller Zahlen, für den analoge Aussagen wie im Fall  $n = 2$  gelten.

Geraden (Ebenen) durch den Koordinatenursprung  $O$  sind **Unterräume**. Geraden (Ebenen), die nicht durch  $O$  hindurchgehen, sind **lineare Mannigfaltigkeiten**.

**Definition 1.2** Ist  $S$  eine nichtleere Menge von Elementen eines Vektorraumes  $V$ , so heißt jeder Ausdruck der Gestalt

$$r_1 \mathbf{x}^1 + r_2 \mathbf{x}^2 + \dots + r_l \mathbf{x}^l$$

mit  $r_1, r_2, \dots, r_l \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^l \in S$  eine **Linearkombination** von  $S$ .

**Definition 1.3** Die Vektoren  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$  ( $\mathbf{x}^i \in V \forall i$ ) heißen **linear unabhängig**, wenn es für die Gleichung  $r_1 \mathbf{x}^1 + r_2 \mathbf{x}^2 + \dots + r_k \mathbf{x}^k = \Theta$  nur die triviale Lösung  $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$  gibt, anderenfalls heißen sie **linear abhängig**.

**Beispiel 1.2 (Lineare Unabhängigkeit und lineare Abhängigkeit)**

(1) Die Vektoren  $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}^2$ .

(2) Die Vektoren  $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig in  $\mathbb{R}^2$ .

### Definition 1.4 (Dimension, Basis)

1. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes  $V$  heißt **Dimension** von  $V$ .
2. Je  $n$  linear unabhängige Elemente  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$  eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes nennt man eine **Basis** von  $V$ .

**Lemma 1.1** Bilden die Vektoren  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$  eine **Basis** des Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$ , so lässt sich jeder Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  in **eindeutiger** Weise als **Linearkombination** der **Basisvektoren** darstellen, d.h., es existieren Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , die **eindeutig** bestimmt sind und für die gilt  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{x}^i$ .

### Beispiel 1.3 (Dimension, Basis)

(1) In  $C[0, 1]$  ist jedes System von Potenzfunktionen

$$f_i(t) = t^i \quad (i = 1, \dots, p, \quad p \in \mathbb{N} \text{ beliebig})$$

ein System **linear unabhängiger Vektoren**. Es existiert also keine maximale Anzahl **linear unabhängiger Vektoren**, d.h.  $\dim C[0, 1] = \infty$ .

(2) Die Vektoren  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  aus Beispiel 1.2 (1) bilden die so genannte **kanonische Basis** in  $\mathbb{R}^2$ , während die Vektoren  $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2\}$  aus Beispiel 1.2 (2) in diesen Raum keine **Basis** bilden. Es gibt in jedem **Vektorraum** unendlich viele **Basen**, eine andere wäre z.B.  $\{\mathbf{i}, \mathbf{x}^1\}$ . Es gilt:  $\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ .

## 1.2 Matrizen und Determinanten

### 1.2.1 Begriff der Matrix

#### Definition 1.5 (Rechteckmatrizen und quadratische Matrizen)

1. Ein System von  $m \cdot n$  Zahlen  $a_{ik}$ , die in einem rechteckigen Schema, bestehend aus  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten, angeordnet sind, heißt  $(m, n)$ -**Matrix** **A** oder **Matrix vom Typ**  $(m, n)$ . Die Zahlen  $a_{ik}$  heißen **Elemente der Matrix A**.

Bezeichnungen:  $\mathbf{A} := (a_{ik}) \quad (i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Ist  $m = n$ , so heißt **A** **quadratische Matrix** der **Ordnung**  $n$ .

- Ist  $a_{ik} \in \mathbb{R}$  ( $a_{ik} \in \mathbb{C}$ ), so heißt  $\mathbf{A}$  reellwertige (komplexwertige) **Matrix**.
- Zwei  $(m, n)$ -**Matrizen**  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  heißen gleich, wenn die einander entsprechenden Elemente gleich sind, d.h.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \iff a_{ik} = b_{ik} \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n).$$

- Eine **Matrix vom Typ**  $(1, n)$  ( $(m, 1)$ ), die nur aus einer Zeile (Spalte) besteht, heißt **Zeilenvektor** (**Spaltenvektor**).

Bezeichnungen:  $\mathbf{a}_i := (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$  -  $i$ -ter **Zeilenvektor**,

$$\mathbf{a}^k := \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \text{ - } k\text{-ter Spaltenvektor.}$$

- Die Elemente  $a_{ii}$ , die in der Diagonale einer **quadratischen Matrix** von links oben nach rechts unten stehen, heißen **Hauptdiagonalelemente**, die Elemente  $a_{i, n-i+1}$ , die in der Diagonale von rechts oben nach links unten stehen, heißen **Nebendiagonalelemente**. Auch bei **Matrizen vom Typ**  $(m, n)$  nennt man die Elemente  $a_{ii}$  ( $i = 1, \dots, \min(m, n)$ ) **Hauptdiagonalelemente**.

Eine **Matrix**  $\mathbf{A}$  lässt sich als eine Spalte von **Zeilenvektoren** (Zeile von **Spaltenvektoren**) darstellen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1 \ \mathbf{a}^2 \ \dots \ \mathbf{a}^n)).$$

#### Beispiel 1.4

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = (6 \ -1 \ 3) \quad \mathbf{a}_2 = (2 \ 0 \ -4)$$

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

#### Definition 1.6 (Nullmatrix, transponierte Matrix)

- Eine **Matrix vom Typ**  $(m, n)$ , deren Elemente sämtlich Null sind, heißt  $(m, n)$  **Nullmatrix**  $\mathbf{O}$ .
- Transponierte**  $\mathbf{A}^T$  einer **Matrix**  $\mathbf{A}$  vom **Typ**  $(m, n)$  heißt die **Matrix vom Typ**  $(n, m)$ , die aus  $\mathbf{A}$  durch Vertauschen der Zeilen und Spalten hervorgeht, d.h.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



**Definition 1.7** Eine quadratische Matrix  $(a_{ik})$  der Ordnung  $n$  heißt

1. **obere Dreiecksmatrix**, wenn  $a_{ik} = 0$  für alle  $i > k$ ,
2. **untere Dreiecksmatrix**, wenn  $a_{ik} = 0$  für alle  $i < k$ ,
3. **Diagonalmatrix**, wenn  $a_{ik} = 0$  für alle  $i \neq k$ ,
4. **Einheitsmatrix**, wenn  $a_{ik} = \delta_{ik}$ . Dabei bezeichnet  $\delta_{ik}$  das Kroneckersymbol:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k. \end{cases}$$

Bei quadratischen Matrizen entsteht  $\mathbf{A}^T$  durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen. Für einen Zeilenvektor schreiben wir  $\mathbf{a}_i^T := (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})^T$ .

**Beispiel 1.5 (Transponierte)**

(1)  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}_n^T = \mathbf{E}_n$ ,  $\mathbf{D}_n^T = \mathbf{D}_n$ , wenn  $\mathbf{E}_n$  ( $\mathbf{D}_n$ ) die Einheitsmatrix (Diagonalmatrix) der Ordnung  $n$  ist.

(2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

## 1.2.2 Rechenoperationen mit Matrizen

**Definition 1.8** (Summe, Produkt mit einer reellen Zahl, Produkt zweier Matrizen)

1. **Summe  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$**  zweier  $(m, n)$ -Matrizen  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  und  $\mathbf{B} = (b_{ik})$  heißt die  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{C} = (c_{ik})$  mit den Elementen  $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$  ( $i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$ ).
2. **Produkt  $\alpha \mathbf{A}$**  der  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  mit der Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  heißt die  $(m, n)$ -Matrix mit den Elementen  $\alpha a_{ik}$  ( $i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$ ).
3. **Produkt  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$**  der  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  mit der  $(n, p)$  Matrix  $\mathbf{B}$  heißt die  $(m, p)$ -Matrix  $\mathbf{C} = (c_{il})$ , für die gilt:

$$c_{il} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \quad (i = 1, \dots, m; l = 1, \dots, p).$$

Unter Verwendung der Begriffe **Zeilen-** und **Spaltenvektor** erhält man das Element  $c_{il}$  als das **Skalarprodukt** des transponierten Zeilenvektors  $\mathbf{a}_i^T$  mit dem Spaltenvektor  $\mathbf{b}^l$  d.h.  $c_{il} = \langle \mathbf{a}_i^T, \mathbf{b}^l \rangle$  und es ist

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}^1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}^p \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2^T, \mathbf{b}^1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2^T, \mathbf{b}^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_2^T, \mathbf{b}^p \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{a}_m^T, \mathbf{b}^1 \rangle & \langle \mathbf{a}_m^T, \mathbf{b}^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_m^T, \mathbf{b}^p \rangle \end{pmatrix}.$$

Zur praktischen Ausführung der **Matrixmultiplikation** und Kontrolle der Rechnungen ist das **Falksche Schema** mit **Spalten-** bzw. **Zeilensummenprobe** nützlich:

	<b>B</b>	$\sum_Z(\mathbf{B})$
<b>A</b>	<b>A · B</b>	$\sum_Z(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
$\sum_S(\mathbf{A})$	$\sum_S(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$	

**Spaltensummenprobe:** Man bildet die Spaltensummen  $\sum_S(\mathbf{A})$  der **Matrix A**. Die entstehende zusätzliche Zeile wird mit **B** multipliziert und liefert in der Produktmatrix ebenfalls eine zusätzliche Zeile, deren Elemente bei fehlerloser Rechnung mit den Spaltensummen der Produktmatrix  $\sum_S(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  zusammenfallen. (**Zeilensummenprobe** analog: Bildung der Zeilensummen  $\sum_Z(\mathbf{B})$ , **A** wird mit zusätzlicher Spalte multipliziert).

Die **Matrixmultiplikation** ist nur ausführbar, wenn die Spaltenanzahl von **A** mit der Zeilenanzahl von **B** übereinstimmt.

### Beispiel 1.6 (Operationen mit Matrizen)

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = 3\mathbf{A} - 4\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -15 & 12 & 11 \\ 9 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_2$$

$$(3) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann existiert das **Produkt**  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{B}$  und ist eine  $(3, 2)$ -Matrix, das **Produkt**  $\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{B}$  existiert jedoch nicht.

Es gilt aber für jede  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_n = \mathbf{A}$       $\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ .

$$(4) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die **Matrizenmultiplikation** ist also i. Allg. **nicht kommutativ**.

$$(5) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{O}$  folgt also nicht notwendig  $\mathbf{A} = \mathbf{O}$  oder  $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ .

**Theorem 1.1** Die Menge aller  $(m, n)$ -Matrizen mit den in Definition 1.8 1. und 2. eingeführten Operationen ist ein **Vektorraum**  $L_{\mathbf{A}}$ , d.h. es gilt:

I Gesetze bezüglich der Addition

1. Für alle  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in L_{\mathbf{A}}$  gilt:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ .
2. Für alle  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in L_{\mathbf{A}}$  gilt:  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ .
3. Es existiert genau ein bezüglich der Addition neutrales Element  $\mathbf{O}$ , so dass für alle  $\mathbf{A} \in L_{\mathbf{A}}$  gilt:  $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$ .

4. Zu jedem  $\mathbf{A} \in L_{\mathbf{A}}$  existiert ein bezüglich der Addition inverses Element  $(-\mathbf{A}) \in L_{\mathbf{A}}$ , so dass  $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$  gilt.

II Gesetze bezüglich der Multiplikation mit einer reellen Zahl

1. Für alle  $\mathbf{A} \in L_{\mathbf{A}}$  und alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:  $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$ .
2. Für alle  $\mathbf{A} \in L_{\mathbf{A}}$  gilt:  $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ .

III Distributivgesetze: Für alle  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in L_{\mathbf{A}}$  und alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

1.  $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$
2.  $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

**Lemma 1.2 (Eigenschaften der Matrizenmultiplikation)** Alle auftretenden Produkte seien definiert.

$$(1) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

$$(2) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

- (3) Seien  $\mathbf{A}$  eine  $(m, n)$ -Matrix und  $\mathbf{O}$  eine Nullmatrix vom entsprechenden Typ. Dann erhält man bei Multiplikation mit einer  $(n, q)$ -Nullmatrix von rechts  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}$  eine  $(m, q)$ -Nullmatrix und bei Multiplikation mit einer  $(p, m)$ -Nullmatrix von links  $\mathbf{O} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$  eine  $(p, n)$ -Nullmatrix.

$$(4) (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(5) (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(6) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

### 1.2.3 Die Determinante einer quadratischen Matrix

**Definition 1.9** Sei  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  eine quadratische Matrix der Ordnung  $n$ . Determinante  $n$ -ter Ordnung von  $\mathbf{A}$ , bezeichnet als

$$\det \mathbf{A} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

heißt eine Zahl, die der Matrix  $\mathbf{A}$  wie folgt zugeordnet wird:

1. Für  $n = 1$  setzen wir  $\det \mathbf{A} = a_{11}$ .
2. Für  $n = 2$  lautet die Berechnungsvorschrift: Produkt der Elemente der Hauptdiagonale minus Produkt der Elemente der Nebendiagonale. Man spricht von Zeilen, Spalten, Haupt- und Nebendiagonale einer **Determinante** und versteht darunter Zeilen, Spalten, Haupt- und Nebendiagonale der zugehörigen **Matrix**.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. Für  $n = 3$  wird die Determinante nach der Regel von **Sarrus** berechnet.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33}. \end{matrix}$$

4. Für  $n \geq 4$  wird die Determinante mit Hilfe eines Entwicklungssatzes berechnet.

**Definition 1.10 (Unterdeterminante, Adjunkte)**

1. Die durch Streichung der  $i$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte aus einer **Determinante  $n$ -ter Ordnung** entstehende **Determinante  $(n-1)$ -ter Ordnung** heißt **Unterdeterminante  $D_{ik}$**  des Elementes  $a_{ik}$ .
2. Die vorzeichenbehaftete **Unterdeterminante  $A_{ik} = (-1)^{i+k}D_{ik}$**  heißt **Adjunkte** oder **algebraisches Komplement** des Elementes  $a_{ik}$ .

**Theorem 1.2 (Entwicklungssatz)** Eine **Determinante  $n$ -ter Ordnung** lässt sich nach den Elementen jeder Zeile sowie jeder Spalte entwickeln, wobei sich ihr Wert nicht ändert:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad i \in \{1, \dots, n\} \text{ Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile,}$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad k \in \{1, \dots, n\} \text{ Entwicklung nach der } k\text{-ten Spalte.}$$

**Lemma 1.3** Es seien  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  quadratische Matrizen der Ordnung  $n$  mit den Determinanten  $\det \mathbf{A}, \det \mathbf{B}$ .

- (1)  $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$
- (2) Vertauscht man in  $\mathbf{A}$  zwei Zeilen (Spalten), so ändert sich in  $\det \mathbf{A}$  das Vorzeichen.
- (3) Die Zeilen (Spalten) von  $\mathbf{A}$  sind **linear abhängig** gdw  $\det \mathbf{A} = 0$ , speziell, wenn  $\mathbf{A}$  zwei proportionale Zeilen (Spalten) oder eine Nullzeile (Nullspalte) enthält, so ist  $\det \mathbf{A} = 0$ .
- (4) Addiert man zu einer Zeile (Spalte) von  $\mathbf{A}$  Vielfache der entsprechenden Elemente einer anderen Zeile (Spalte), so ändert sich der Wert der Determinante nicht.
- (5) Multipliziert man die Elemente einer Zeile (Spalte) von  $\mathbf{A}$  mit einem Faktor  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so wird  $\det \mathbf{A}$  mit  $\alpha$  multipliziert. Man beachte den Unterschied zu Matrizen.
- (6)  $\det \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$  und  $\det \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \det \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ . Dies gilt auch, wenn  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  ist.
- (7) Ist  $\mathbf{A}$  eine **Diagonalmatrix** bzw. eine **obere oder untere Dreiecksmatrix**, so gilt:  $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ . Man erhält das Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen.

### Beispiel 1.7

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 5 & 7 \\ 0 & -11 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 10 & 5 & 7 \\ -11 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 102$$

### 1.2.4 Der Rang einer Matrix

Bekanntlich lässt sich jede  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  durch eine Zeile von Spaltenvektoren  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 \dots \mathbf{a}^n)$  darstellen.

**Definition 1.11** Der Rang  $r(\mathbf{A})$  einer  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  ist gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren.

**Theorem 1.3** Es gilt:

- (1)  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$  Also ist der Rang  $r(\mathbf{A})$  auch gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren der Matrix  $\mathbf{A}$ .
- (2)  $r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$
- (3) der Rang einer Matrix  $\mathbf{A}$  ändert sich nicht nach Ausführung folgender elementarer Umformungen:
  - Vertauschen von zwei Zeilen (Spalten) von  $\mathbf{A}$ ,
  - Multiplikation einer Zeile (Spalte) von  $\mathbf{A}$  mit einer Zahl  $\lambda \neq 0$ ,
  - Addition des Vielfachen einer Zeile von  $\mathbf{A}$  zu einer anderen Zeile von  $\mathbf{A}$ ,
  - Addition des Vielfachen einer Spalte von  $\mathbf{A}$  zu einer anderen Spalte von  $\mathbf{A}$ .

### Berechnung des Ranges:

Die Ausgangsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & a_{1(s+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & a_{2(s+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} & a_{s(s+1)} & \dots & a_{sn} \\ a_{(s+1)1} & a_{(s+1)2} & \dots & a_{(s+1)s} & a_{(s+1)(s+1)} & \dots & a_{(s+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} & a_{m(s+1)} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wird mittels elementarer Umformungen auf eine Trapezform

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} & b_{1(s+1)} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2s} & b_{2(s+1)} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{ss} & b_{s(s+1)} & \dots & b_{sn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht, wobei  $b_{ii} \neq 0$  ( $i = 1, \dots, s$ ) gilt, d.h. alle Elemente unterhalb der **Hauptdiagonalen** und alle Elemente der  $(s + 1)$ -ten bis zur  $m$ -ten Zeile verschwinden. Für jede von der **Nullmatrix** verschiedene **Matrix** ist dies möglich. Dann ist  $r(\mathbf{A}) = s$ .

Speziell entsteht für **quadratische Matrizen** der Ordnung  $n$  mit  $\det \mathbf{A} \neq 0$  eine **obere Dreiecksmatrix** mit von Null verschiedenen Elementen auf der Hauptdiagonalen, deren **Rang** gleich  $n$  ist, denn nach Lemma 1.3 (3) sind wegen  $\det \mathbf{A} \neq 0$  die Spalten von  $\mathbf{A}$  **linear unabhängig**, also  $r(\mathbf{A}) = n$ .

**Beispiel 1.8 (Rangbestimmung)** Für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -8 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

ergibt sich mittels elementarer Umformungen

$$r(\mathbf{A}) = r \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -8 & -7 & 4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

### 1.2.5 Die inverse Matrix

**Definition 1.12** Existiert zu einer quadratischen Matrix  $\mathbf{A}$  der Ordnung  $n$  eine Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  mit der Eigenschaft  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ , so heißt  $\mathbf{A}^{-1}$  die **inverse Matrix** von  $\mathbf{A}$ . Falls  $\mathbf{A}^{-1}$  existiert, so heißt  $\mathbf{A}$  **invertierbar**, falls nicht, heißt  $\mathbf{A}$  **nicht invertierbar**.

Wir setzen  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}$  und berechnen  $\mathbf{A}^{-1}$  aus der **Matrixgleichung**  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ .

**Beispiel 1.9** Die Lösung der Matrixgleichung  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_2$  führt bei gegebener Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

auf die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} 3x_{11} - 3x_{21} = 1 \\ -x_{11} + x_{21} = 0 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{l} 3x_{12} - 3x_{22} = 0 \\ -x_{12} + x_{22} = 1. \end{array}$$

Beide Gleichungssysteme sind nicht lösbar. Folglich ist  $\mathbf{A}$  **nicht invertierbar**.

**Theorem 1.4** Eine quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  der Ordnung  $n$  besitzt genau dann eine **inverse Matrix**, wenn  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . In diesem Falle ist  $\mathbf{A}^{-1}$  die eindeutige Lösung der Matrixgleichung  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$

### Das Gauß-Jordan-Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix

Sei  $\mathbf{A}$  **invertierbar**. Wie aus Beispiel 1.9 ersichtlich, führt die Lösung der Matrixgleichung  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$  auf lineare Gleichungssysteme, die wir gleichzeitig lösen. Dazu wird ein **Anfangstableau** der Form  $\boxed{\mathbf{A} \mid \mathbf{E}_n}$  mittels elementarer Umformungen auf ein **Endtableau** der Form  $\boxed{\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1}}$  gebracht, aus dem man  $\mathbf{A}^{-1}$  ablesen kann.

**Beispiel 1.10**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \det \mathbf{A} = 2 \neq 0$$

	$\mathbf{A}$	$\mathbf{E}_2$	Umformungen
Anfangstableau	$\begin{matrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \text{I} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow 1 \\ \text{I} \cdot \frac{3}{2} + \text{II} \longrightarrow 2 \end{matrix}$
$\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{matrix}$	$\text{II} + \text{I} \longrightarrow 1$
Endtableau	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{matrix}$	
	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{A}^{-1}$	

Es ist also  $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_2$ .

**1.2.6 Spezielle Matrizen**

**Definition 1.13** Eine quadratische Matrix  $(a_{ik})$  der Ordnung  $n$  heißt

1. **symmetrisch**, wenn  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ , d.h.  $a_{ik} = a_{ki}$  für  $i, k = 1, \dots, n$ ,
2. **schiefsymmetrisch**, wenn  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ , d.h.  $a_{ik} = -a_{ki}$  für  $i, k = 1, \dots, n$ ,
3. **hermitesch**, wenn  $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$ , wobei  $\overline{\mathbf{A}}^T$  die Transponierte der zu  $\mathbf{A}$  konjugiert komplexen Matrix ist,
4. **orthogonal**, wenn  $\mathbf{A}$  invertierbar und  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ .

**Beispiel 1.11** (symmetrische, schiefsymmetrische, hermitesche und orthogonale Matrizen)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ist symmetrisch}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist schiefsymmetrisch},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 - i3 \\ 2 + i3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist hermitesch}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{ist orthogonal}.$$

**Theorem 1.5** Es gilt:

- (1) Für jede Matrix sind  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$  und  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  symmetrische Matrizen.
- (2) Jede quadratische Matrix lässt sich in eine Summe aus einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix zerlegen:  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$ .
- (3) Wenn  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  orthogonal, so sind auch  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}^{-1}$  orthogonal.
- (4) Für orthogonale Matrizen ist  $\det \mathbf{A} = \pm 1$ , die Umkehrung gilt i. Allg. nicht.

## 1.3 Lineare Gleichungssysteme

### 1.3.1 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

**Beispiel 1.12** Aus handelsüblichem Aluminium kann man eine neue harte und relativ leichte Legierung herstellen, wenn diese Legierung genau 4% Titan und 2% Chrom enthält. Reines Titan und Chrom sind aber sehr teuer. Man versucht daher, die entsprechende Mischung aus Aluminium-Titan-Chrom-Legierungen herzustellen. Vier Legierungen werden angeboten. Der jeweilige Titan-bzw. Chromgehalt kann der folgenden Tabelle entnommen werden, ebenso der Preis pro Tonne in €.

	Anteil Titan (%)	Anteil Chrom (%)	Preis pro Tonne (€)
Legierung A	6%	1%	2000 €
Legierung B	1%	3%	1000 €
Legierung C	4%	0%	3000 €
Legierung D	3%	4%	2000 €

Man benötigt genau eine Tonne der neuen Legierung. Es ergeben sich folgende Fragen aus der Sicht des Anwenders:

1. Kann man die Legierungen A, B, C, D in genau solchen Mengen einkaufen, etwa  $x_1$  Tonnen von A,  $x_2$  Tonnen von B,  $x_3$  Tonnen von C und  $x_4$  Tonnen von D, so dass sich hieraus genau eine Tonne der neuen Legierung zusammenschmelzen lässt?
2. Gibt es, falls dies möglich ist, mehrere Möglichkeiten?
3. Welche Möglichkeit ist am preiswertesten?

Mathematische Formulierung zur 1. Frage: Bestimme  $x_1, x_2, x_3, x_4$  derart, dass die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
 \frac{6}{100}x_1 + \frac{1}{100}x_2 + \frac{4}{100}x_3 + \frac{3}{100}x_4 &= \frac{4}{100} \\
 \frac{1}{100}x_1 + \frac{3}{100}x_2 + \frac{4}{100}x_4 &= \frac{2}{100}.
 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung bedeutet, es soll genau 1 Tonne der Legierung produziert werden. Die zweite drückt aus, dass die produzierte Legierung 4% Titan enthalten soll. Die dritte





Sei  $m = n = 2$ . Wir betrachten das **inhomogene IGS**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= y_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

zusammen mit dem **homogenen IGS**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Durch (1.2) und (1.3) sind jeweils zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  in der Ebene festgelegt.

1. Sei (1.2) **unlösbar** (überbestimmtes System), dann sind  $g_1$  und  $g_2$  parallel zueinander, wobei  $g_1 \neq g_2$  gilt.
2. Ist (1.2) **lösbar**, so gibt es zwei Fälle:
  - (1) (1.2) besitzt **genau eine Lösung** (bestimmtes System), dann besitzen  $g_1$  und  $g_2$  genau einen Schnittpunkt.
  - (2) (1.2) besitzt **unendlich viele Lösungen** (unterbestimmtes System), dann fallen  $g_1$  und  $g_2$  zusammen:  $g_1 \equiv g_2$ .
3. (1.3) ist **stets lösbar** und es gibt zwei Fälle:
  - (1) (1.3) besitzt nur die **triviale Lösung**, dann schneiden sich  $g_1$  und  $g_2$  im Nullpunkt.
  - (2) (1.3) besitzt **unendlich viele nichttriviale Lösungen**, dann ist  $g_1 \equiv g_2$ .

**Ziel:** Untersuchung von **IGS** mit  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $m > n$ ,  $m = n$  oder  $m < n$ .

Im Weiteren betrachten wir das **inhomogene IGS**

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{1.4}$$

zusammen mit dem zugehörigen **homogenen IGS**

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{\Theta} \tag{1.5}$$

und die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  zusammen mit der erweiterten Koeffizientenmatrix  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & y_m \end{pmatrix}.$$

### Theorem 1.6 (Inhomogene IGS)

- (1)  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  ist lösbar  $\iff r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$  (Satz von Kronecker und Capelli).
- (2)  $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{B}) \iff \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  ist unlösbar.

(3) Es gelte  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$  (d.h. das IGS ist lösbar). Setzen  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = r$ .

$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  besitzt genau eine Lösung  $\iff r = n$  ( $n$  Variablenanzahl),

$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  ist nicht eindeutig lösbar  $\iff r < n$ .

### Theorem 1.7 (Homogene IGS)

(1)  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \Theta$  ist stets lösbar, denn  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$  ist immer erfüllt.

(2) Setzen  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = r$ .

$\mathbf{A} \mathbf{x} = \Theta$  besitzt nur die triviale Lösung  $\iff r = n$  ( $n$  Variablenanzahl),

$\mathbf{A} \mathbf{x} = \Theta$  besitzt nichttriviale Lösungen  $\iff r < n$ .

### Beispiel 1.13 (Lösbarkeit)

(1) Homogenes System ( $m < n$ )

$$\begin{array}{rccccrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ - & x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = 2 \implies$  Das homogene System ist lösbar.

$r(\mathbf{A}) = r = 2 < 4 = n \implies$  Das homogene System ist nicht eindeutig lösbar.

(2) Inhomogenes System ( $m > n$ )

$$\begin{array}{rccccrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$r(\mathbf{A}) = r \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \quad r(\mathbf{B}) = r \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 4.$$

$r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{B}) \implies$  Das inhomogene System ist nicht lösbar.

Die Lösungsmenge der Gleichung  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 6$  ist leer.

### 1.3.2 Lösungsstruktur IGS

Sei  $\mathbf{A}$  eine  $(m, n)$ -Matrix mit  $r(\mathbf{A}) = r$  und  $r < n$ . Gesucht sind **alle Lösungen** des IGS (1.5) bzw. des **lösbaren IGS** (1.4), bzw. gesucht ist eine geeignete Darstellung dieser (unendlichen) Lösungsmenge.

**Problem:** Kann man stets eine **endliche** Anzahl **linear unabhängiger Lösungen**  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p$  des Systems (1.5) auswählen, derart, dass sich **jede Lösung** von (1.5) als Linearkombination von  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p$  darstellen lässt?

**Lemma 1.4** Die Menge der **Lösungsvektoren** des IGS (1.5) bildet einen **Unterraum**  $L^h$  des **Vektorraumes**  $\mathbb{R}^n$  wobei  $\dim L^h = n - r$  gilt.

**Definition 1.15** (Fundamentalsystem, allgemeine Lösung des homogenen IGS)

1. Jede **Basis** des  $(n - r)$ -dimensionalen **Unterraumes**  $L^h$  heißt ein **Fundamentalsystem** von (1.5).
2. Bilden die **Lösungen**  $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^{n-r}$  ein **Fundamentalsystem** von (1.5), so heißt  $\mathbf{x}_a^h = c_1 \mathbf{b}^1 + c_2 \mathbf{b}^2 + \dots + c_{n-r} \mathbf{b}^{n-r}$  mit **beliebigen Konstanten**  $c_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n - r$ ) die **allgemeine Lösung** des **homogenen IGS** (1.5).

**Theorem 1.8** (Lösungsstruktur unter Verwendung des Begriffs allgemeine Lösung)

- (1) Die **allgemeine Lösung** von (1.5) bildet einen **Unterraum** der Dimension  $n - r$  des **Vektorraumes**  $\mathbb{R}^n$ . Jede **Lösung** von (1.5) lässt sich als **Linearkombination** eines **beliebigen Fundamentalsystems** von (1.5) darstellen.
- (2) Die **allgemeine Lösung** eines **lösbaren inhomogenen IGS** der Form (1.4) bildet eine **lineare Mannigfaltigkeit** in  $\mathbb{R}^n$ , d.h., sie setzt sich **additiv** zusammen aus einer **speziellen Lösung**  $\mathbf{x}_s^{inh}$  von (1.4) und der **allgemeinen Lösung**  $\mathbf{x}_a^h$  des zugehörigen **homogenen IGS** (1.5).

**Beispiel 1.14** Wir betrachten das **homogene IGS** aus Beispiel 1.13. Wegen  $n = 4$  und  $r = 2$  gilt  $\dim L^h = 2$ , d.h., je zwei **linear unabhängige Lösungsvektoren** bilden ein **Fundamentalsystem** des **homogenen IGS**. Dann gilt nach Theorem 1.8 (1):

$$\mathbf{x}_a^h = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun ein **inhomogenes System** zu diesem **homogenen System** mit einer rechten Seite  $\mathbf{y}^T = (1 \ 0 \ 1)$ . Dann gilt nach Theorem 1.8 (2):

$$\mathbf{x}_a^{inh} = \mathbf{x}_s^{inh} + \mathbf{x}_a^h = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 1.3.3 Lösungsverfahren

Wir unterscheiden exakte Verfahren (endlich viele Schritte führen zur exakten Lösung) und Iterationsverfahren (unendlich viele Schritte führen zur exakten Lösung, da nur endlich viele Schritte durchführbar sind, erhält man eine Näherungslösung). Das bekannteste exakte Verfahren ist der **Gauß-Algorithmus**. Dabei wird die Frage der **Lösbarkeit** automatisch geklärt. Es ist für beliebige (m,n)-**IGS** anwendbar. Iterationsverfahren zur Lösung von **IGS** sind z.B. das Jacobi-Verfahren oder das Gauß-Seidel-Verfahren (Verwendung bei der numerischen Lösung von **IGS**).

**Der Gauß-Algorithmus** Das (m,n)-**IGS**  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  wird mittels elementarer Umformungen der Matrix  $\mathbf{B}$  nach endlich vielen Schritten in das so genannte gestaffelte **IGS** überführt. Es treten folgende Fälle gestaffelter Systeme auf:

#### 1° IGS eindeutig lösbar

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{y}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{y}_2 \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{nn}x_n &= \tilde{y}_n.\end{aligned}$$

Sei  $\tilde{a}_{ii} \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Dann gilt  $r(\tilde{\mathbf{A}}) = r(\tilde{\mathbf{B}}) = n$ . Das gestaffelte System ist nach Theorem 1.6 **eindeutig lösbar** und somit auch  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

#### 2° IGS lösbar, aber nicht eindeutig lösbar

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r + \tilde{a}_{1(r+1)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{y}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2r}x_r + \tilde{a}_{2(r+2)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{y}_2 \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{rr}x_r + \tilde{a}_{r(r+1)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n &= \tilde{y}_r.\end{aligned}$$

Sei  $\tilde{a}_{ii} \neq 0$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Dann gilt  $r(\tilde{\mathbf{A}}) = r(\tilde{\mathbf{B}}) = r < n$ . Das gestaffelte System ist nach Theorem 1.6 **nicht eindeutig lösbar** und somit auch  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

#### 3° IGS unlösbar

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r + \tilde{a}_{1(r+1)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{y}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2r}x_r + \tilde{a}_{2(r+2)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{y}_2 \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{rr}x_r + \tilde{a}_{r(r+1)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n &= \tilde{y}_r \\ 0 &= \tilde{y}_{r+1} \neq 0 \\ &\vdots \\ 0 &= \tilde{y}_m \neq 0.\end{aligned}$$

Hier gilt  $r(\tilde{\mathbf{A}}) \neq r(\tilde{\mathbf{B}})$ . Das gestaffelte System ist nach Theorem 1.6 **unlösbar**, und somit auch  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Die Lösungsmenge der letzten  $m - r$  Gleichungen ist leer.

**Bemerkung 1.1** Die oberen Dreiecksmatrizen  $\tilde{\mathbf{A}}$  der Ordnung  $n$  bzw.  $r$  kann man ähnlich wie beim Gauß-Jordan-Verfahren (vgl. Beispiel 1.10) durch weitere elementare Umformungen auf Einheitsmatrizen der Ordnung  $n$  bzw.  $r$  bringen.

### Beispiel 1.15 (Gauß-Algorithmus)

(1) IGS eindeutig lösbar

$$\begin{array}{rclclcl} 4x_1 + x_2 & = & 6 & 4x_1 + x_2 & = & 6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 14 & 5x_2 - 20x_3 & = & -50 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & -3 & -10x_3 & = & -30 \end{array}$$

Die eindeutige Lösung lautet:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3.$$

(2) IGS lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (vgl. Beispiel 1.12)

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = & 4 & -5x_2 - 2x_3 - 3x_4 & = & -2 \\ x_1 + 3x_2 & + & 4x_4 & = & 2 & -9x_3 + 9x_4 = 1 \end{array}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\mathbf{x}_a^{inh} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/9 \\ -1/9 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) IGS unlösbar

$$\begin{array}{rclclcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ -x_1 - x_2 & + & x_4 & = & 2 & x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 1 & & & 0 = 4 \end{array}$$

Die letzte Gleichung des gestaffelten Systems ist nicht erfüllbar.

## 1.4 Matrixeigenwertprobleme

**Matrixeigenwertprobleme** spielen in der Theorie der chemischen Bindung eine bedeutende Rolle.

Wir betrachten das IGS  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$  mit einer quadratischen Matrix  $\mathbf{A}$  der Ordnung  $n$  als eine Abbildung  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Diese Abbildung ist **linear**, d.h., es gilt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

und suchen alle **Vektoren**  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} \neq \Theta$ ), die durch die **lineare Abbildung**  $\mathbf{A}$  in ein **Viel-faches** von sich selbst übergehen. In der Matrixschreibweise heißt dies: Gesucht sind alle **Vektoren**  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} \neq \Theta$ ), die das IGS

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{E}_n\mathbf{x} \iff (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_n)\mathbf{x} = \Theta \quad \lambda \in \mathbb{R} \vee \lambda \in \mathbb{C} \quad (1.6)$$

erfüllen, wobei  $\mathbf{E}_n$  die **Einheitsmatrix n-ter Ordnung** ist. Das **IGS** (1.6) besitzt die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_n$  und ist **homogen**, also stets lösbar. Wir sind nur an **nicht-trivialen Lösungen**  $\mathbf{x}$  des **IGS** (1.6) interessiert und solche existieren bekanntlich gdw  $r(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_n) < n$  gilt.

**Definition 1.16 (charakteristische Matrix, charakteristische Gleichung)**

(1) *Die Matrix*

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_n) = \begin{pmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

heißt **charakteristische Matrix** von  $\mathbf{A}$ .

(2) *Die Gleichung*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_n) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

heißt **charakteristische Gleichung** von  $\mathbf{A}$ .

Aus (1.8) erhält man ein Polynom  $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_n)$   $n$ -ten Grades in  $\lambda$  (das **charakteristische Polynom** von  $\mathbf{A}$ ), welches nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens  $n$  verschiedene (reelle oder komplexe) Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  hat. Für  $P(\lambda)$  gilt mit den Vielfachheiten  $n_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) der **NS** die Darstellung

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \quad \text{mit} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = n. \quad (1.9)$$

Für diese  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) besitzt das **IGS** (1.6) stets **nichttriviale Lösungen**, da die Koeffizientendeterminante des **IGS** verschwindet. Somit sind ihre Spalten nach Lemma 1.3 (3) **linear abhängig** und folglich ist  $r(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E}_n) < n$ .

**Definition 1.17** Die **NS** des charakteristischen Polynoms  $P(\lambda)$  heißen **Eigenwerte** der Matrix  $\mathbf{A}$ . Die zu  $\lambda = \lambda_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) gehörigen **nicht trivialen Lösungsvektoren** des **homogenen IGS**  $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  heißen **Eigenvektoren** der Matrix  $\mathbf{A}$ .

Die **Eigenvektoren** sind als **nichttriviale Lösungen** eines **homogenen IGS** bis auf einen von Null verschiedenen Zahlenfaktor bestimmt, d.h. ist  $\mathbf{x}$  eine Lösung, so gilt dies auch für  $c\mathbf{x}$ , falls  $c$  reell und verschieden von Null ist. Folglich bleibt der Betrag dieser Vektoren unbestimmt. Deshalb betrachtet man **normierte Eigenvektoren** mit dem Betrag Eins. Ein **Eigenvektor**  $\mathbf{x}$  von  $\mathbf{A}$  wird normiert, indem man ihn durch seinen Betrag dividiert. Wir setzen also  $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ , woraus  $|\mathbf{z}| = 1$  folgt.

**Lösung eines Matrixeigenwertproblems**

1. Man bestimmt aus (1.8) die **Eigenwerte** der Matrix.
2. Man löst für jeden **Eigenwert**  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) das zugehörige **homogene IGS**  $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}_n) \mathbf{x} = \Theta$  und bestimmt so den oder die zum **Eigenwert**  $\lambda_i$  zugehörigen **Eigenvektoren**.

**Theorem 1.9** Das **Matrixeigenwertproblem** (1.6) besitze  $n$  paarweise voneinander verschiedene  $i$ . Allg. komplexe **Eigenwerte**  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , d.h. in (1.9) ist  $n_i = 1$  für alle  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Dann gilt für die **Eigenvektoren** der Matrix  $\mathbf{A}$ :

- (1) zu **jedem Eigenwert**  $\lambda_i$  gibt es **genau einen Eigenvektor**  $\mathbf{x}^i$ ,
- (2) die **insgesamt  $n$  verschiedenen Eigenvektoren**  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$  der Matrix  $\mathbf{A}$  sind **linear unabhängig**.

**Beispiel 1.16**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} (1 - \lambda) & 0 \\ -1 & (2 - \lambda) \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

Zum **Eigenwert**  $\lambda_1 = 1$  gehört das **IGS**

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{array}{l} 0 \ x_{11} + 0 \ x_{21} = 0 \\ - \ x_{11} + \quad \ x_{21} = 0 \end{array} \quad \mathbf{z}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{z}^1| = 1.$$

Zum **Eigenwert**  $\lambda_2 = 2$  gehört das **IGS**

$$\lambda_2 = 2 \quad \begin{array}{l} - \ x_{12} + 0 \ x_{22} = 0 \\ - \ x_{12} + 0 \ x_{22} = 0 \end{array} \quad \mathbf{x}^2 = \mathbf{z}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{z}^2| = 1.$$

Der **Eigenvektor**  $\mathbf{x}^2$  ist bereits **normiert**. Die beiden **Eigenvektoren** sind gemäß **Theorem 1.9** **linear unabhängig**. Es gilt:  $\mathbf{A}\mathbf{x}^1 = \lambda_1\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^1$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \lambda_2\mathbf{x}^2 = 2\mathbf{x}^2$ .

Matrixeigenwertprobleme, bei denen unter den  $n$  **Eigenwerten** nur  $k < n$  **verschiedene** Werte auftreten, können unter Umständen **weniger als  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren** besitzen.

**Theorem 1.10** Das **Matrixeigenwertproblem** (1.6) besitze unter den **insgesamt  $n$  Eigenwerten** genau  $k$  paarweise voneinander verschiedene  $i$ . Allg. komplexe **Eigenwerte**  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  mit den **Vielfachheiten**  $n_1, n_2, \dots, n_k$  ( $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ), d.h. in (1.9) ist  $n_i > 1$  für **wenigstens ein**  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Ist  $\lambda_i$  der  $i$ -te **Eigenwert** der **Vielfachheit**  $n_i$  und ist  $r(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}_n) = r_i$ , so gibt es zu  $\lambda_i$  genau  $n - r_i$  mit  $1 \leq n - r_i \leq n_i$  **linear unabhängige Eigenvektoren**  $\mathbf{x}_1^i, \mathbf{x}_2^i, \dots, \mathbf{x}_{n-r_i}^i$ . Ingesamt besitzt das **Matrixeigenwertproblem** (1.6) dann **genau**

$$\sum_{i=1}^k (n - r_i) = (n - r_1) + (n - r_2) + \dots + (n - r_k)$$

**linear unabhängige Eigenvektoren** mit

$$k \leq \sum_{i=1}^k (n - r_i) \leq \sum_{i=1}^k n_i = n.$$



### Beispiel 1.17

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 0 \quad \text{ist Eigenwert der Vielfachheit } n_1 = 2.$$

$$r(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_2) = r \begin{pmatrix} (-\lambda_1) & 0 \\ 1 & (-\lambda_1) \end{pmatrix} = r_1 = 1.$$

Es ist  $1 = n - r_1 < n_1 = 2$ , also gibt es zum **Eigenwert**  $\lambda_1 = 0$  der Vielfachheit 2 genau einen **Eigenvektor**

$$\mathbf{x}_1^1 = \mathbf{z}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Theorem 1.11** Sei  $\mathbf{A}$  eine reelle symmetrische Matrix. Dann besitzt das **Matrixeigenwertproblem** (1.6) folgende **Eigenschaften**:

- (1) alle **Eigenwerte** sind reell,
- (2) es gibt insgesamt genau  $n$  **linear unabhängige Eigenvektoren**,
- (3) **Eigenvektoren**, die zu **verschiedenen Eigenwerten** gehören, sind **zueinander orthogonal**,
- (4) zu jedem **Eigenwert**  $\lambda_i$  der Vielfachheit  $n_i > 1$  existieren genau  $n_i$  **linear unabhängige Eigenvektoren**  $\mathbf{x}_1^i, \mathbf{x}_2^i, \dots, \mathbf{x}_{n_i}^i$ , d.h.  $n - r_i = n_i$  für alle  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Die **Eigenvektoren** können **normiert** und, falls sie nicht **orthogonal** sind, stets durch geeignete Verfahren **orthogonalisiert** werden.

### Beispiel 1.18

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 1 \quad \text{ist Eigenwert der Vielfachheit } n_1 = 2.$$

$$r(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_2) = r \begin{pmatrix} (1 - \lambda_1) & 0 \\ 0 & (1 - \lambda_1) \end{pmatrix} = r_1 = 0.$$

Es ist  $1 < n - r_1 = n_1 = 2$ , also gibt es zum **Eigenwert**  $\lambda_1 = 1$  der Vielfachheit 2 genau zwei **linear unabhängige Eigenvektoren**

$$\mathbf{x}_1^1 = \mathbf{z}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2^1 = \mathbf{z}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die schon **zueinander orthogonal** und **normiert (orthonormiert)** sind.

**Theorem 1.12** Für eine Matrix in **Diagonal- oder Dreiecksgestalt** stimmen die **Eigenwerte** mit den **Elementen in der Hauptdiagonalen** überein:

$$\lambda_i = a_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

**Problem:** Gibt es für eine **lineare Abbildung**  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , dargestellt durch eine **quadratische Matrix der Ordnung**  $n$ , eine **Basis** des  $\mathbb{R}^n$  bezüglich welcher  $\mathbf{A}$  durch eine **Diagonalmatrix** dargestellt wird?

**Theorem 1.13** *Zu jeder reellen symmetrischen Matrix  $\mathbf{A}$  lässt sich eine reelle orthogonale Matrix  $\mathbf{P}$  finden, derart, dass die transformierte Matrix  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$  Diagonalgestalt besitzt. Die Transformationsmatrix  $\mathbf{P}$  enthält in der  $j$ -ten Spalte die Koordinaten des  $j$ -ten normierten Eigenvektors  $\mathbf{z}^j$  der Matrix  $\mathbf{A}$ . Die Diagonalelemente  $b_{ii}$  der transformierten Matrix  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$  sind identisch mit den Eigenwerten  $\lambda_i$  der Matrix  $\mathbf{A}$ .*

Die gesuchte **Basis** besteht aus den **orthonormierten Eigenvektoren** der Matrix  $\mathbf{A}$ . Die Achsen des Koordinatensystems, erzeugt von den **Eigenvektoren**, heißen **Hauptachsen**. Die Matrix  $\mathbf{P}$  der **normierten Eigenvektoren** diagonalisiert die Matrix  $\mathbf{A}$ . Die durch  $\mathbf{B}$  erzeugte **lineare Abbildung** ist längs der **Hauptachsen** eine reine Streckung bzw. Stauchung mit dem Zentrum im Koordinatenursprung.

**Definition 1.18** *Die durch die reelle orthogonale Matrix  $\mathbf{P}$  erzeugte Transformation heißt Hauptachsentransformation der reellen symmetrischen Matrix  $\mathbf{A}$ .*

Zahlreiche Probleme in Physik und Chemie erfordern die Diagonalisierung einer **symmetrischen Matrix**, z.B. die Berechnung der Normalschwingungen eines Moleküls und die Lösung der Schrödinger-Gleichung.

**Beispiel 1.19** *In Zusammenhang mit der Behandlung des Äthylen-Moleküls  $C_2H_4$  nach der Hückel-Molekular-Orbital-Methode (HMO-Methode) tritt die folgende als Strukturmatrix bezeichnete reelle symmetrische Matrix auf:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} (-\lambda) & 1 \\ 1 & (-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Zu den **Eigenwerten**  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 1$  gehören die **normierten Eigenvektoren**

$$\mathbf{z}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathbf{P} = (\mathbf{z}^1 \ \mathbf{z}^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die **reelle orthogonale Matrix**, für die die Behauptung von Theorem 1.13 gilt:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Richtungen der **Hauptachsen** sind durch  $\mathbf{z}^1$  und  $\mathbf{z}^2$  bestimmt.

**Beispiel 1.20** *Die Energiematrix eines  $\pi$ -Elektronensystems vom linearen Molekültyp  $XYX$  besitzt in der HMO-Näherung (Hückel-Molekular-Orbital-Näherung) die Gestalt*

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta & 0 \\ \beta & \alpha_2 & \beta \\ 0 & \beta & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die (Energie-) **Eigenwerte** und **Eigenvektoren** der Matrix  $\mathbf{E}$ .

## 2 Vektoranalysis

### 2.1 Vektorfunktionen

**Definition 2.1** Wird jedem Wert einer skalaren Variablen  $t$  mit  $t \in [t_1, t_2]$  ein **Ortsvektor**  $\mathbf{r}(t)$  zugeordnet, dann heißt  $\mathbf{r}(t)$  **Vektorfunktion** der skalaren Variablen  $t$ . Die Endpunkte von  $\mathbf{r}(t)$  liegen in der Ebene auf einer **ebenen Kurve** bzw. im Raum auf einer **Raumkurve**, die wir mit  $C$  bezeichnen.

Deutet man die skalare Variable  $t$  als die Zeit, so beschreibt  $\mathbf{r}(t)$  die **Bahnkurve** eines Massenpunktes. Die skalare Variable kann auch andere Bedeutungen haben, z.B. kann  $t$  ein Winkel sein.

Wie für konstante **Ortsvektoren** gilt:

1. in der Ebene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \\ \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

2. im Raum

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \\ \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dabei gilt:  $D(\mathbf{r}) = [t_1, t_2]$ ,  $W(\mathbf{r}) = C$ ,  $\mathbf{r}(t_1)$  ( $\mathbf{r}(t_2)$ ) ist der **Ortsvektor** des Anfangspunktes  $P_1 = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$  (Endpunktes  $P_2 = (x(t_2), y(t_2), z(t_2))$ ) von  $C$ .

Die **Koordinatenfunktionen**  $(x(t), y(t))$  bzw.  $(x(t), y(t), z(t))$  einer **Vektorfunktion** nennt man auch eine **Parameterdarstellung** der **ebenen** bzw. **Raumkurve**. Eine Kurve kann durch mehrere **Parameterdarstellungen** beschrieben werden.

#### Beispiel 2.1 (Parameterdarstellungen von Kurven)

(1) *Kreislinie*  $x^2 + y^2 = a^2$  (implizite Darstellung)

1° Der Parameter  $t$  sei der Winkel zwischen dem Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  eines Punktes  $P$  auf der Kreislinie und der positiven Richtung der  $x$ -Achse. Dann gilt:

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

2° Der Parameter  $\tau$  sei der Anstieg der Geraden durch die Punkte  $O$  und  $P$ . Dann gilt:

$$\tau = \tan t = \frac{y}{x} \implies y = x\tau \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = a^2 \implies x^2 + x^2\tau^2 = a^2,$$

also

$$x(\tau) = \pm \frac{a}{\sqrt{1 + \tau^2}}, \quad y(\tau) = \pm \frac{a\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} \quad \tau \in ] -\infty, +\infty [.$$

(2) Die Schraubenlinie als Beispiel einer **Raumkurve**

Wir betrachten einen geraden Kreiszylinder mit dem Radius  $a$ , dessen Grundfläche in der  $xy$ -Ebene liegt und dessen Rotationsachse durch den Koordinatenursprung geht. Gesucht ist die **Bahnkurve** eines Punktes  $P = (x, y, z)$  auf dem Zylindermantel, der sich um die Rotationsachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht und gleichzeitig parallel zur Rotationsachse eine Aufwärtsbewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  ausführt. Wir setzen  $p := \frac{v}{\omega}$ . Ferner sei  $t$  der Winkel zwischen der Geraden durch die Punkte  $O$  und  $P'$ , wobei  $P'$  die senkrechte Projektion von  $P$  in die  $xy$ -Ebene ist, und der positiven Richtung der  $x$ -Achse. Die Aufwärtsbewegung erfolge proportional zu  $t$ . Dann gilt:

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t \quad z(t) = pt \quad t \in [0, 2\pi].$$

Der Höhenunterschied, den der Punkt  $P$  bei einer vollen Umdrehung durchläuft, heißt **Ganghöhe**  $h$ . Mithin ergibt sich, wenn  $T$  die Zeitdauer für eine volle Umdrehung bezeichnet

$$p = \frac{v}{\omega} = \frac{vT}{2\pi} = \frac{h}{2\pi}.$$

Deshalb heißt  $p$  auch die **reduzierte Ganghöhe**.

**Definition 2.2** Wird jedem Vektor  $\mathbf{g} \in D \subset \mathbb{R}^n$  ( $D$  - Bereich) **eindeutig** ein Vektor  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$  zugeordnet, so nennt man diese Abbildung eine  $m$ -dimensionale **Vektorfunktion** von  $n$  unabhängigen Variablen.

Bezeichnungen:  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{g}) \quad \mathbf{g} \in D(\mathbf{f}) \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $f_j(g_1, \dots, g_n) \quad (j = 1, \dots, m)$ .

Es sei speziell  $n = 2$  und  $m = 3$ . Mit den Bezeichnungen  $\mathbf{f} = \mathbf{r}$ ,  $f_1 = x$ ,  $f_2 = y$ ,  $f_3 = z$ ,  $g_1 = u$ ,  $g_2 = v$  beschreibt die dreidimensionale **Vektorfunktion** von zwei unabhängigen Variablen

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

eine **Fläche**  $S$  im Raum. Wir definieren die **Vektorfunktion** auf dem Rechteck

$$R_{u,v} = \{(u, v) \mid a_1 < u < a_2 \wedge b_1 < v < b_2; a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\},$$

d.h.  $D(\mathbf{r}) = R_{u,v}$  und es gilt  $W(\mathbf{r}) = S$ .

**Beispiel 2.2 (Parameterdarstellungen von Flächen)**

(1) Kugeloberfläche  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Sei  $\varphi$  der Winkel, den die Projektion der Strecke  $\overline{OP}$  auf die  $xy$ -Ebene mit der positiven  $x$ -Achse einschließt ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ), wobei der Winkel im mathematisch positiven Sinne gemessen wird, während  $\theta$  den Winkel, den die Strecke  $\overline{OP}$  mit der  $z$ -Achse einschließt ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), bezeichnet. Dann gilt:

$$x = a \cos \varphi \sin \theta, \quad y = a \sin \varphi \sin \theta, \quad z = a \cos \theta,$$

definiert auf dem Rechteck  $R_{\varphi,\theta} = \{(\varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi \wedge 0 \leq \theta \leq \pi\}$ .

(2) Zylindermantelfläche  $x^2 + y^2 = a^2$

Der Winkel  $\varphi$  habe dieselbe Bedeutung wie in Beispiel 2.2 (1). Dann gilt:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = z,$$

definiert auf dem Rechteck  $R_{\varphi,z} = \{(\varphi, z) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi \wedge z_1 \leq z \leq z_2\}$ .

## 2.2 Skalar- und Vektorfelder

### Definition 2.3 (Skalarfeld, Vektorfeld)

1. Eine in  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  definierte skalare Funktion

$$U = U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$$

heißt **Skalarfeld (SF)** in  $D$  ( $n = 3, m = 1$ ).

2. Eine in  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  definierte Vektorfunktion

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\mathbf{i} + v_2(x, y, z)\mathbf{j} + v_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

heißt **Vektorfeld (VF)** in  $D$  ( $n = m = 3$ ).

- Eine **skalare Feldgröße** ist durch **einen Skalar** bestimmt.

**Skalarfelder** sind z.B. Temperaturfelder.

- Eine **vektorielle Feldgröße** ist durch **drei skalare Feldgrößen** bestimmt.

**Vektorfelder** sind z.B. Geschwindigkeitsfelder, Beschleunigungsfelder, Kraftfelder.

Wir betrachten nur zeitlich sich nicht ändernde Felder, so genannte **stationäre Felder**. Ändern sich die Felder noch nach der Zeit, so spricht man von **instationären Feldern**. Dann ist  $U = U(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ .

### Wichtige Typen von Feldern

1° **Ebenes SF**:  $U = U(x, y)$ ,  $U$  hängt nicht von  $z$  ab.

2° **Zentralsymmetrisches SF**:  $U(x, y, z) = U(\mathbf{r}) = f(r)$   $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $U$  hängt nur vom Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung ab.

3° **Axialsymmetrisches SF**:  $U = U(\sqrt{x^2 + y^2})$ ,  $U$  hängt nur vom Abstand des Punktes von der  $z$ -Achse ab.

4° **Ebenes VF**:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = v_1(x, y)\mathbf{i} + v_2(x, y)\mathbf{j}$ ,  $v_3(x, y) = 0 \quad \forall (x, y)$ .

5° **Zentralsymmetrisches VF**:  $\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$   $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

6° **Axialsymmetrisches VF**:  $\mathbf{v} = f(\sqrt{x^2 + y^2})(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ .

Betrachtet man einen Kreiszyylinder mit der  $z$ -Achse als Zylinderachse und dem Radius  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , dann hat  $\mathbf{v}$  in jedem Punkt der Zylinderoberfläche den gleichen Betrag der Größe  $|\mathbf{v}| = |f(\rho)|\rho$  und steht senkrecht auf ihr.

### Beispiel 2.3 (Skalarfeld, Vektorfeld)

- (1) Das **Potenzial**  $U$  einer sich im Koordinatenursprung befindlichen Punktladung  $Q$  wird durch ein **räumliches SF**

$$U = U(x, y, z) := \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f(r) \quad \mathbf{r} \neq \Theta \quad (2.1)$$

beschrieben, wobei  $\epsilon$  die Dielektrizitätskonstante bezeichnet.

Ein **räumliches SF** lässt sich mit Hilfe von **Niveauflächen** veranschaulichen. Dies sind Flächen, die der Gleichung  $U(x, y, z) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  genügen. Ein **ebenes SF** kann man durch **Niveaulinien**, die die Gleichung  $U(x, y) = c$  erfüllen, darstellen.

Für das Temperaturfeld (1.1) ist  $c > 0$  zu wählen und man erhält als **Niveauflächen** eine Schar von Kugeln in Mittelpunktslage und dem Radius  $\frac{Q}{4\pi\epsilon c}$ .

- (2) Gegeben sei das **ebene VF**

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}. \quad (2.2)$$

Man kann ein **VF** veranschaulichen, indem man im Endpunkt jedes **Ortsvektors**  $\mathbf{r}$  einen Pfeil, der  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  repräsentiert, mit seinem Anfangspunkt anheftet. Eine weitere Veranschaulichung ist mit Hilfe von **Feldlinien** möglich. Dies sind Kurven, deren **Tangentenrichtung** in jedem Punkt mit der Richtung, die das **VF** in diesem Punkt vorgibt, übereinstimmt (Lösungen von Differenzialgleichungssystemen).

Für das ebene Kraftfeld (2.2) erhält man als **Feldlinien** Hyperbeln.

**Voraussetzung:** Im Weiteren seien alle betrachteten Funktionen **zweifach stetig differenzierbar** im betrachteten Bereich  $D$ .

**Definition 2.4** Seien  $(x, y, z)$  die kartesischen Koordinaten eines Punktes  $P \in \mathbb{R}^3$ . Der Differenzialoperator

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

heißt **Nabla-Operator (Vektorieller Differenzialoperator)**.

## 2.3 Produkte des Nabla-Operators mit einem SF bzw. VF

**Definition 2.5** Sei  $U(\mathbf{r})$  ein **SF**. **Gradient** von  $U(\mathbf{r})$  heißt das **VF**

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

<b>SF</b> $U \implies$ <b>VF</b> $\text{grad } U$ $\text{grad } U = \nabla U$
---

**Bemerkung 2.1** Die Endpunkte der Ortsvektoren  $\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ , wobei  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$  ein hinreichend kleiner vektorieller Zuwachs von  $\mathbf{r}$  ist, der i. Allg. nicht die gleiche Richtung wie  $\mathbf{r}$  besitzt, mögen in  $D(U)$  liegen. Das **totale Differenzial** des SF  $U(\mathbf{r})$  ist unter Verwendung des Gradientenbegriffs darstellbar in der Form

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \langle \text{grad } U, d\mathbf{r} \rangle = |\text{grad } U| |d\mathbf{r}| \cos \varphi, \quad (2.3)$$

wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\text{grad } U$  und  $d\mathbf{r}$  ist.

Falls  $d\mathbf{r}$  in der **Tangentialebene** einer **Niveaufläche** liegt, so ist

$$U(\mathbf{r}) = c \quad \text{und} \quad U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = c \quad \text{also} \quad \Delta_{d\mathbf{r}}U = U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.4)$$

Bekanntlich gibt  $\Delta_{d\mathbf{r}}U$  die Änderung des SF  $U$  bei Bewegung von  $\mathbf{r}$  nach  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  an. Auf Grund unserer Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ist  $\Delta_{d\mathbf{r}}U \approx dU$ . Dann ist wegen (2.4) auch  $dU = 0$ . Mit (2.3) gilt dann  $\langle \text{grad } U, d\mathbf{r} \rangle = 0$  und somit  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , d.h., für jeden Punkt  $P_0 \in D(U)$  ist  $\text{grad } U$  ein **Vektor**, der auf der durch  $P_0$  hindurchgehenden **Niveaufläche**  $U(\mathbf{r}) = c$  senkrecht steht.

**Definition 2.6** Sei  $\mathbf{l}^0$  der zur Richtung  $l$  gehörige **Einheitsvektor** und  $U(\mathbf{r})$  ein SF. Wir legen durch den Endpunkt  $P_0$  des **Ortsvektors**  $\mathbf{r}_0$  in Richtung von  $\mathbf{l}$  eine Gerade  $l$ . Diese besitzt die **PRG**  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}^0 \quad t \in \mathbb{R}$ . Betrachten wir  $U(\mathbf{r})$  nur auf dieser Geraden, so erhalten wir eine Funktion  $g(t) = U(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}^0)$ . Die Ableitung  $g'(0)$  heißt dann **Ableitung von  $U(\mathbf{r})$  im Punkt  $P_0$  in Richtung  $l$  oder Richtungsableitung**

$$g'(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(\Delta t) - g(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{r}_0 + \Delta t \mathbf{l}^0) - U(\mathbf{r}_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_l U}{\Delta t} = \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l}.$$

In einem kartesischen Koordinatensystem, d.h.  $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$  und  $\mathbf{l}^0 = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k}$  gilt die Differenziationsregel:

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l} = \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial x} l_1 + \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial y} l_2 + \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial z} l_3 = \langle \text{grad } U(\mathbf{r}_0), \mathbf{l}^0 \rangle = |\text{grad } U(\mathbf{r}_0)| \cos \alpha,$$

wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen  $\text{grad } U(\mathbf{r}_0)$  und  $\mathbf{l}^0$  ist.

**Bemerkung 2.2** Die **partiellen Ableitungen**  $\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial x}, \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial y}, \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial z}$  geben die **Änderungsgeschwindigkeiten** der Funktion  $U$  in Richtung der Koordinatenachsen an und sind Spezialfälle von **Richtungsableitungen**. Folglich gibt  $\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l}$  die **Änderungsgeschwindigkeit** der Funktion  $U$  in einer beliebigen Richtung  $l$  an. Für den **Einheitsvektor**  $\mathbf{n}^0$  der Normalen zur **Niveaufläche**, der dieselbe Richtung wie  $\text{grad } U$  besitzt, gilt:

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial n} = \langle \text{grad } U(\mathbf{r}_0), \mathbf{n}^0 \rangle = |\text{grad } U(\mathbf{r}_0)| = \sqrt{\left(\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial z}\right)^2},$$

d.h. unter allen **Richtungsableitungen** von  $U$  in einem festen Punkt  $P_0$  besitzt  $\frac{\partial U}{\partial n}$  den größten Wert. Die Richtung des **Gradienten** in  $P_0$  ist die Richtung der größten Änderungsgeschwindigkeit von  $U(\mathbf{r})$  in  $P_0$ , also die Richtung, in der die  $U$ -Werte am stärksten wachsen.

**Definition 2.7** Ein **VF**  $\mathbf{v}$  heißt **konservatives Feld** oder **Potenzialfeld (PF)**, wenn ein **SF**  $U$  existiert, so dass gilt:  $\mathbf{v} = \text{grad } U = \nabla U$ . Dies ist gleichbedeutend mit

$$v_1 = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} \wedge v_2 = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} \wedge v_3 = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \iff v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz = dU.$$

Dabei heißt  $U$  das **Potenzial** von  $\mathbf{v}$ .

**Definition 2.8 (Divergenz, Quellenfreiheit)**

1. Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  ein **VF**. **Divergenz** von  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  heißt das **SF**

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

<b>VF</b> $\mathbf{v}$ $\implies$ <b>SF</b> $\text{div } \mathbf{v}$ $\quad \text{div } \mathbf{v} = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle$
--

2. Ein **VF**  $\mathbf{v}$  mit der Eigenschaft  $\text{div } \mathbf{v}(x, y, z) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in D$  heißt **quellenfrei**.

3. Ist  $\mathbf{v}$  das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung, so bedeutet  $\text{div } \mathbf{v}$  in einem Punkt die lokale **Quelldichte** des **VF**  $\mathbf{v}$  in diesem Punkt.

**Definition 2.9 (Rotation, Wirbelfreiheit)**

1. Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  ein **VF**. **Rotation** von  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  heißt das **VF**

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

<b>VF</b> $\mathbf{v}$ $\implies$ <b>VF</b> $\text{rot } \mathbf{v}$ $\quad \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$
--

2. Ein **VF**  $\mathbf{v}$  mit der Eigenschaft  $\text{rot } \mathbf{v}(x, y, z) = \Theta \quad \forall (x, y, z) \in D$  heißt **wirbelfrei**.

3. Ist  $\mathbf{v}$  das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung, so bedeutet  $\text{rot } \mathbf{v}$  in einem Punkt die lokale **Wirbeldichte** des **VF**  $\mathbf{v}$  in diesem Punkt.

**Beispiel 2.4 (Richtungsableitung, Potenzialfeld)**

(1) Sei  $U(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $D(U) = \mathbb{R}^2$  ein **ebenes SF**,  $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  $P_0 = (x_0, y_0) = (2, 1)$  und  $\mathbf{l} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ . Dann ist mit  $\mathbf{l}^0 = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j}$

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l} = \frac{\partial U(2, 1)}{\partial l} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(2 + \Delta t l_1, 1 + \Delta t l_2) - U(2, 1)}{\Delta t} = 3\sqrt{2} = \langle \nabla U(\mathbf{r}_0), \mathbf{l}^0 \rangle.$$

(2) Für das **Newtonsche Potenzial** eines **zentralsymmetrischen Kraftfeldes** gilt:  
 $U(\mathbf{r}) = f(r) = \frac{1}{r}$ ,  $D(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ,  $\text{grad } U(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ .  
 Für die **Richtungsableitung** in einem Punkt  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  in Richtung des **Einheitsvektors**  $\mathbf{l}^0 = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k}$  erhält man

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l} = -\frac{1}{r_0^3}(x_0 l_1 + y_0 l_2 + z_0 l_3) = -\frac{1}{r_0^3} \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{l}^0 \rangle.$$



- (3) Das **SF**  $U(\mathbf{r})$  sei ein Temperaturfeld. Die **Niveauflächen** sind Flächen konstanter Temperatur. In jedem Punkt  $P_0$  ist  $\nabla U$  ein Vektor, der senkrecht auf der durch diesen Punkt hindurchgehenden **Niveaufläche** steht und in die Richtung des stärksten Temperaturwachstums zeigt. Je stärker  $U$  wächst, desto größer ist  $|\nabla U(\mathbf{r})|$ .
- (4) Das Schwerfeld der Erde  $\mathbf{K} = -g\mathbf{k}$  ( $g$  Erdbeschleunigung) ist ein **PF**, denn für das **SF**  $U = -gz$  gilt  $\mathbf{K} = \nabla U$ . Ferner ist  $\operatorname{div} \mathbf{K} = 0$  und  $\operatorname{rot} \mathbf{K} = \Theta$ .

## 2.4 Nabla-Rechnung

### Eigenschaften des Gradienten

- 1°  $\nabla(U_1 + U_2) = \nabla U_1 + \nabla U_2$   
 2°  $\nabla(\lambda U) = \lambda \nabla U \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 3°  $\nabla(U_1 U_2) = U_1 \nabla U_2 + U_2 \nabla U_1$   
 4°  $\nabla f(U) = f'(U) \nabla U$  für die mittelbare Funktion  $f(U(x, y, z))$

### Eigenschaften der Divergenz

- 1°  $\langle \nabla, (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \rangle = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle + \langle \nabla, \mathbf{w} \rangle$   
 2°  $\langle \nabla, (\lambda \mathbf{v}) \rangle = \lambda \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 3°  $\langle \nabla, (U \mathbf{v}) \rangle = U \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \nabla U \rangle$   
 Beachte:  $\langle \nabla, \mathbf{v} \rangle = \operatorname{div} \mathbf{v}$  ist ein **SF**, aber  $\langle \mathbf{v}, \nabla \rangle$  ist ein Operator.  
 4°  $\langle \nabla, (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{w}, \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{w} \rangle$

### Eigenschaften der Rotation

- 1°  $\nabla \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{w}$   
 2°  $\nabla \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\nabla \times \mathbf{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 3°  $\nabla \times (U \mathbf{v}) = U (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla U)$

**Beispiel 2.5** Die betrachteten **SF** und **VF** seien zentralsymmetrisch.

- (1)  $\operatorname{grad} f(r) = \nabla f(r) = f'(r) \nabla r = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$   
 (2)  $\operatorname{div} [f(r) \mathbf{r}] = \langle \nabla, (f(r) \mathbf{r}) \rangle = f(r) \langle \nabla, \mathbf{r} \rangle + \langle \mathbf{r}, \nabla f(r) \rangle = 3f(r) + f'(r)r$   
 (3)  $\operatorname{rot} [f(r) \mathbf{r}] = \nabla \times (f(r) \mathbf{r}) = f(r) (\nabla \times \mathbf{r}) - \mathbf{r} \times \nabla f(r) = \nabla f(r) \times \mathbf{r} = \Theta$

### Zweifache Anwendung des Nabla-Operators

- 1°  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \langle \nabla, \nabla \times \mathbf{v} \rangle = 0 \implies$  Jedes **Wirbelfeld**  $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$  ist **quellenfrei**.  
 2°  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \nabla \times \nabla U = \Theta \implies$  Jedes **PF**  $\mathbf{v} = \nabla U$  ist **wirbelfrei**.

# 3 Integralrechnung für reelle Funktionen einer reellen Variablen

## 3.1 Das unbestimmte Integral

### 3.1.1 Der Begriff der Stammfunktion

In den Anwendungen tritt oft folgende Problemstellung auf: Gegeben ist die Geschwindigkeit  $v = v(t)$ , gesucht ist das zugehörige Bewegungsgesetz  $s = s(t)$ . Dies führt auf die Umkehrung der **Differenziation**.

**Definition 3.1** Die Funktionen  $f, F$  seien definiert in  $X$ ,  $F$  sei **differenzierbar** in  $X$ . Gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X,$$

so heißt  $F$  eine **Stammfunktion** von  $f$  im Intervall  $X$ .

Die **Stammfunktion** ist **nicht eindeutig** bestimmt.

**Beispiel 3.1** Sei  $f(x) = 2x$ . Dann ist  $F(x) = x^2 + C$  für jedes  $C \in \mathbb{R}$  eine **Stammfunktion** von  $f(x)$ . Durch Festlegung eines Punktes  $(x_0, F(x_0))$  in der Ebene lässt sich die Konstante  $C$  **eindeutig** bestimmen.

**Theorem 3.1** Jede in  $X$  **stetige** Funktion  $f(x)$  besitzt in  $X$  eine **stetige Stammfunktion**  $F(x)$ .

**Definition 3.2** Die Gesamtheit aller **Stammfunktionen**  $F(x) + C$  der Funktion  $f(x)$  heißt **unbestimmtes Integral** der Funktion  $f(x)$  in  $X$ .

$$\text{Bezeichnung: } \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Das Aufsuchen einer **Stammfunktion** kann als Umkehrung der **Differenziation** aufgefasst werden. Man erhält aus den **Differenzierungsregeln** mittels  $\int f(x) dx = F(x) + C$  Regeln für die **unbestimmte Integration (Grundintegrale)** (vgl. Formelblatt).

### 3.1.2 Grundregeln zur Berechnung unbestimmter Integrale

1° Die Funktion  $f$  besitze eine **Stammfunktion** in  $X$ . Dann gilt

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

2° Die Funktionen  $f, g$  mögen eine **Stammfunktion** in  $X$  besitzen. Dann gilt

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

3° Die Funktionen  $f, g$  seien **stetig differenzierbar** in  $X$ ,  $g$  sei eine beliebige **Stammfunktion** von  $g'$ . Dann gilt

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x) dx \quad \text{Partielle Integration.}$$

4° Die Funktion  $f(x)$  besitze eine **Stammfunktion**  $F(x)$  in  $X$ ,  $g(t)$  sei **stetig differenzierbar** in  $X_1$ ,  $W(g) \subseteq X$ . Dann ist  $F(g(t))$  eine **Stammfunktion** von  $f(g(t)) g'(t)$  und es gilt mit der Substitutionsfunktion  $x = g(t)$

$$\int f(g(t)) g'(t) dt = \int f(x) dx \quad \text{Variablensubstitution.}$$

5° Die Funktion  $f$  sei **stetig differenzierbar** in  $X$ . Dann gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

### Beispiel 3.2 (Unbestimmte Integrale)

$$(1) \int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$(2) \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + C$$

$$(3) \int \sin^3 t \cos t dt = \frac{\sin^4 t}{4} + C$$

$$(4) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C$$

$$(5) \int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + C$$

$$(6) \int x \sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a} + C$$

### 3.1.3 Integration gebrochen rationaler Funktionen

Eine Funktion der Form  $f(x) = \frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$  wird wie folgt integriert:

1° Falls vorhanden, gleiche Faktoren im Zählerpolynom  $p_m(x)$  und Nennerpolynom  $p_n(x)$  eliminieren.

2° Falls  $m \geq n$ , Partialdivision ausführen.

3° Nennerpolynom  $p_n(x)$  in der Form

$$p_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_s)^{k_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{l_r}$$

darstellen (Faktor  $a_n$  beachten).

4° Ansatz für Partialbruchzerlegung aufschreiben.

5° Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung bestimmen.

6° Integration

Nach Ausführung von 1° bis 5° erhält man folgende Darstellung

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{p_m(x)}{p_n(x)} = p_{m-n}(x) + \frac{q(x)}{p_n(x)} \\
 &= p_{m-n}(x) + \frac{1}{a_n} \left[ \frac{A_{11}}{(x-x_1)} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \dots + \right. \\
 &\quad \frac{A_{s1}}{(x-x_s)} + \frac{A_{s1}}{(x-x_s)^2} + \dots + \frac{A_{sk_s}}{(x-x_s)^{k_s}} + \\
 &\quad \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \\
 &\quad \left. \frac{B_{r1}x + C_{r1}}{(x^2 + p_rx + q_r)} + \frac{B_{r2}x + C_{r2}}{(x^2 + p_rx + q_r)^2} + \dots + \frac{B_{rl_r}x + C_{rl_r}}{(x^2 + p_rx + q_r)^{l_r}} \right].
 \end{aligned}$$

Dabei sind  $A_{11}, \dots, B_{11}, \dots, C_{11}, \dots$  **eindeutig** bestimmte reelle Zahlen.

Das Polynom  $p_{m-n}(x)$  wird als Summe von Potenzfunktionen integriert. Die bei der Partialbruchzerlegung entstehenden Terme führen auf vier Typen von Integralen:

1° Sei  $x_i$  eine einfache reelle **NS** von  $p_n(x)$ .

$$\int \frac{A}{x-x_i} dx = A \ln|x-x_i| + D$$

2° Sei  $k > 1$ , d.h.,  $x_i$  ist eine **NS** der Vielfachheit  $k$  von  $p_n(x)$ .

$$\int \frac{A}{(x-x_i)^k} dx = \frac{A}{(1-k)} (x-x_i)^{1-k} + D$$

3° Sei  $4q - p^2 > 0$ , d.h., das Polynom  $x^2 + px + q$  besitzt ein Paar zueinander konjugiert komplexer **NS**.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx &= \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) \\
 &+ \frac{(2C - Bp)}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) + D \quad 4q - p^2 > 0
 \end{aligned}$$

4° Sei  $l > 1$ , d.h., das Polynom  $(x^2 + px + q)^l$  besitzt ein Paar zueinander konjugiert komplexer **NS** der Vielfachheit  $l$ .

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l} dx &= \frac{(2C - Bp)x + (Cp - 2Bq)}{(l-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{l-1}} \\
 &+ \frac{(2l-3)(2C - Bp)}{(l-1)(4q - p^2)} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{l-1}} dx + D
 \end{aligned}$$

Die Integration wird rekursiv fortgeführt, bis  $l - 1 = 1$ , d.h., bis Fall 3° gilt.

### Beispiel 3.3 (Integration rationaler Funktionen)

$$(1) I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-3} \quad (3.1)$$

Bestimmung der Konstanten  $A_1, A_2, A_3$  mit Hilfe der **Grenzwertmethode** für **einfache reelle NS**. Man multipliziert (3.1) der Reihe nach mit  $(x-i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und geht zum **GW** für  $x \rightarrow i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) über

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ A_1 \frac{(x-1)}{(x-1)} + A_2 \frac{(x-1)}{(x-2)} + A_3 \frac{(x-1)}{(x-3)} \right] \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[ A_1 \frac{(x-2)}{(x-1)} + A_2 \frac{(x-2)}{(x-2)} + A_3 \frac{(x-2)}{(x-3)} \right] \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[ A_1 \frac{(x-3)}{(x-1)} + A_2 \frac{(x-3)}{(x-2)} + A_3 \frac{(x-3)}{(x-3)} \right]. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = +\frac{1}{2} \\ A_2 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = -1 \\ A_3 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = +\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$I = \int \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-3} \right] dx = \frac{1}{2} [\ln |(x-1)(x-3)| - 2 \ln |x-2|] + D$$

$$(2) I = \int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2} \quad (3.2)$$

Der Koeffizient  $A_1 = 1$  wird wie oben mit der **Grenzwertmethode** für **einfache reelle NS** ermittelt. Die Koeffizienten  $A_2$  und  $A_3$  werden mit der **Grenzwertmethode** für **mehrfache reelle NS** bestimmt. Dazu multipliziert man (3.2) mit dem Faktor  $(x-\lambda)^k$ , wobei  $\lambda$  die **mehrfache NS** und  $k$  ihre **Vielfachheit** ist

$$f(x)(x-1)^2 = \frac{(x-1)^2}{x(x-1)^2} = A_1 \frac{(x-1)^2}{x} + A_2 \frac{(x-1)^2}{(x-1)} + A_3 \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} \quad (3.3)$$

und geht zum **GW** für  $x \rightarrow 1$  über:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ A_1 \frac{(x-1)^2}{x} + A_2(x-1) + A_3 \right] \implies A_3 = 1.$$

Zur Bestimmung von  $A_2$  differenzieren wir (3.3) und gehen wieder zum **GW** für  $x \rightarrow 1$  über:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ -\frac{1}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ A_1 \frac{2(x-1)x - (x-1)^2}{x^2} + A_2 \right] \implies A_2 = -1.$$

Allgemein sind für eine **reelle NS** der **Vielfachheit**  $k$  die Ableitungen bis zur Ordnung  $k-1$  zu bilden.

$$I = \int \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + D$$

$$(3) I = -\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{x}{x^2-2x+2} dx$$

Für das zweite Integral verwenden wir 3° mit  $B=1$ ,  $C=0$ ,  $p=-2$ ,  $q=2$ .

$$I = -\ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+2) + \arctan(x-1) + D$$

$$(4) I = \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

Wir verwenden 4° mit  $B=0$ ,  $C=1$ ,  $p=0$ ,  $q=1$ ,  $l=2$ .

$$I = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + D$$

$$(5) I = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + D$$

(6) Für eine monomolekulare Reaktion, d.h. ein Stoff A wird in einen Stoff B umgewandelt, ist die Reaktionsgeschwindigkeit  $\frac{dx}{dt}$  der jeweiligen Konzentration des betrachteten Stoffes proportional

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x).$$

Dabei ist  $a$  die Konzentration zu Beginn der Reaktion,  $a-x$  die Konzentration zur Zeit  $t$  und  $k$  ein Proportionalitätsfaktor. Die Konzentration des betrachteten Stoffes ergibt sich durch Integration und anschließendes Auflösen des Ausdrucks

$$t = \frac{1}{k} \int \frac{dx}{a-x} = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{a-x} + C$$

nach  $a-x$ . Da für  $t=0$  auch  $x=0$  gilt, ist  $0 = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{a} + C$  und somit

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{a-x} \quad \text{woraus} \quad a-x = a e^{-kt} \quad \text{folgt.}$$

Für eine polymolekulare Reaktion ist entsprechend

$$\frac{dx}{dt} = k(a_1-x)(a_2-x) \dots (a_n-x)$$

und somit

$$t = \frac{1}{k} \int \frac{dx}{(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x)}.$$

**Spezialfall:** Besitzen alle Moleküle zu Beginn der Reaktion die gleiche Konzentration  $a$  (äquimolekulare Reaktion), so vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^n$$

und man erhält

$$t = \frac{1}{k} \int \frac{dx}{(a - x)^n} = \frac{1}{k(n - 1)} (a - x)^{1-n} + C.$$

## 3.2 Das bestimmte Integral

### 3.2.1 Definition und Eigenschaften des bestimmten Integrals

Ausgangspunkt ist das **geometrische Problem** der Bestimmung des **Flächeninhaltes geometrischer Figuren**.

**Spezialfall:** Sei  $y = f(x) = c > 0$   $x \in [a, b]$   $a < b$  gegeben. Wir betrachten die ebene Punktmenge

$$A = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq c\}.$$

Dann ist

$$P(A) = c(b - a)$$

der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen  $c$  und  $(b - a)$ .

**Allgemeiner Fall:** Sei  $y = f(x) > 0$   $x \in [a, b]$   $a < b$  gegeben, wobei  $f(x)$  **stetig** ist. Wir betrachten die Punktmenge

$$B = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Man erhält eine Näherung für den Flächeninhalt der Punktmenge  $B$  durch Zerlegung der Figur in Rechtecke.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine Zerlegung  $\mathcal{Z}_n$  des Intervalls  $[a, b]$  durch  $n + 1$  Teilpunkte

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

in genau  $n$  Teilintervalle  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  der Länge  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Im  $i$ -ten Teilintervall wird die Fläche unter dem Graphen von  $f$  durch ein Rechteck der Breite  $\Delta x_i$  und der Höhe  $f(\xi_i)$  approximiert, wobei  $\xi_i$  ein beliebiger Zwischenpunkt aus dem Teilintervall  $I_i$  ist.



Der Flächeninhalt der Gesamtfläche unter der Kurve beträgt näherungsweise

$$P(\mathcal{Z}_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (3.4)$$

wobei die Näherungssumme den Flächeninhalt der  $n$  Rechtecke darstellt. Sie heißt **Riemannsche Integralsumme** und hängt ab von der gewählten Zerlegung  $\mathcal{Z}_n$ , d.h., von der Intervallunterteilung und von der Auswahl der Zwischenpunkte  $\xi_i$ . Bei fixierter Zerlegung  $\mathcal{Z}_n$  bezeichnen wir die größte der Intervall-Längen  $\Delta x_i$  mit  $\delta(\mathcal{Z}_n)$ , d.h.  $\delta(\mathcal{Z}_n) = \max_i \Delta x_i$  und nennen diese Zahl **Feinheitsmaß** der Zerlegung. Vergrößern wir jetzt die Anzahl der Teilungspunkte im Intervall  $[a, b]$ , derart, dass das **Feinheitsmaß**  $\delta(\mathcal{Z}_n)$  gegen Null strebt, so ist für eine **stetige** Funktion  $f(x)$  zu vermuten, dass sich die Summe (3.4) dem Flächeninhalt  $P(B)$  der Punktmenge  $B$  unbegrenzt nähert.

**Definition 3.3** Existiert für die oben beschriebene Konstruktion ein **GW**, der weder von der Zerlegung  $\mathcal{Z}_n$  noch von der Wahl der Zwischenpunkte  $\xi_i$  abhängt, so heißt dieser **bestimmtes (Riemannsches) Integral** von  $f$  über  $[a, b]$ :

$$\lim_{\delta(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0} P(\mathcal{Z}_n) = \lim_{\delta(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i := \int_a^b f(x) dx.$$

Dabei nennt man  $f(x)$  **Integrand** und  $a$  bzw.  $b$  die **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**. Die Funktion  $f$  selbst heißt dann in  $[a, b]$  **Riemann-integrierbar** ( $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ).

### Klassen integrierbarer Funktionen

1.  $f$  in  $[a, b]$  **stetig**  $\implies f \in \mathcal{R}[a, b]$ .
2.  $f$  in  $[a, b]$  **beschränkt** und besitze dort **höchstens endlich viele Sprungstellen**  $\implies f \in \mathcal{R}[a, b]$ .
3.  $f$  in  $[a, b]$  **beschränkt** und **monoton**  $\implies f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

**Beispiel 3.4**  $y = \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases} \quad D(\chi) = [0, 1], \quad W(\chi) = \{0, 1\},$   
d.h.  $\chi$  ist **beschränkt**, aber  $\chi \notin \mathcal{R}[0, 1]$ .

### Eigenschaften des bestimmten Integrals

Seien  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ . Dann existieren auch die anderen aufgeführten Integrale und es gilt:

$$1^\circ \int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$2^\circ \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad a \leq c \leq b$$

$$3^\circ \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$



$$4^\circ \int_a^a f(x) dx = 0$$

5° Gilt  $f(x) \leq g(x)$  ( $f(x) < g(x)$ )  $\forall x \in [a, b]$ ,  $a < b$ , so folgt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \left( \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx \right).$$

6° Aus  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  folgt  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$  und für  $a < b$  gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

7° Gilt  $m \leq f(x) \leq M$   $\forall x \in [a, b]$ ,  $a < b$ , so folgt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

### 3.2.2 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Die Definition 3.3 ist nicht zur praktischen Berechnung bestimmter Integrale geeignet. Sie liefert jedoch die Grundlage zur numerischen Integration. Praktisch werden bestimmte Integrale durch Rückführung auf unbestimmte Integrale berechnet. Als Bindeglied dazu dient das **bestimmte Integral mit variabler oberer Integrationsgrenze**: Aus Eigenschaft 2° **bestimmter Integrale** folgt:  $f \in \mathcal{R}[a, b] \implies f \in \mathcal{R}[a, x] \quad \forall x \in [a, b]$ . Ersetzt man im bestimmten Integral die obere Integrationsgrenze  $b$  durch die Variable  $x$ , so erhält man eine Funktion der variablen oberen Integrationsgrenze  $x$ :

$$\phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad D(\phi) = [a, b] \quad \phi(a) = 0 \quad \phi(b) = \int_a^b f(t) dt. \quad (3.5)$$

Um Verwechslungen auszuschließen, haben wir die Integrationsvariable mit  $t$  bezeichnet.

#### Eigenschaften des Integrals (3.5)

- $f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \phi$  **stetig** in  $[a, b]$ .
- $f$  **stetig** in  $[a, b] \implies \phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  ist eine **Stammfunktion** von  $f$  in  $[a, b]$ , d.h.  $\phi$  ist **differenzierbar** in  $[a, b]$  und es gilt  $\phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . Somit lässt sich jede **Stammfunktion** als **bestimmtes Integral mit variabler oberer Integrationsgrenze** darstellen.

**Theorem 3.2 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)** *Ist  $f$  stetig in  $[a, b]$  und  $F$  irgendeine Stammfunktion von  $f$ , so gilt:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{Newton - Leibniz'sche Formel.}$$

## Erweiterung des Flächeninhaltsbegriffs

Der Flächeninhalt ebener Punktmenge ist für im Intervall  $[a, b]$ , ( $a < b$ ) **stetige** Funktionen  $f(x)$  mit  $f(x) > 0$  wohldefiniert. Für den Flächeninhalt  $P(B)$  der von der Kurve  $y = f(x)$  und den Geraden  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  begrenzten Punktmenge  $B$  gilt

$$P(B) = \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|.$$

### Beispiel 3.5 (Bestimmtes Integral, Flächeninhalt)

1. Berechnen Sie das **bestimmte Integral**  $J = \int_0^{2\pi} \sin x dx$ . ( $J = 0$ )

2. Berechnen Sie den **Flächeninhalt**  $P(B)$  der ebenen Punktmenge, die begrenzt wird durch  $y = f(x) = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ . ( $P(B) = 4$ )

### Partielle Integration im bestimmten Integral

Die Funktionen  $f, g$  seien **stetig differenzierbar** in  $[a, b]$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

**Beispiel 3.6**  $J = \int_0^{\pi} x \sin x dx = \pi + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$ .

### Variablensubstitution im bestimmten Integral

Sei  $x = g(t)$  **stetig differenzierbar** in  $[a', b']$ ,  $f(x)$  **stetig** in  $W(g)$ , es gelte  $W(g) \subseteq D(f) = [a, b]$  und  $a \leq g(t) \leq b$ . Dann gilt mit der Substitutionsfunktion  $x = g(t)$

$$\int_{a'}^{b'} f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a')}^{g(b')} f(x) dx \quad \text{mit} \quad g(a') = a \quad g(b') = b \quad D(g) = [a', b'].$$

**Beispiel 3.7**  $J = \int_0^{\pi/2} e^{\sin t} \cos t dt$

**1. Lösungsweg:** *Substitution des Integranden, Berechnung irgendeiner Stammfunktion, Rücksubstitution, Einsetzen der ursprünglichen Grenzen:*

$$x = g(t) = \sin t \quad dx = g'(t)dt = \cos t dt \quad \int e^{\sin t} \cos t dt = \int e^x dx = e^x = e^{\sin t}$$

$$J = \int_0^{\pi/2} e^{\sin t} \cos t dt = e^{\sin \frac{\pi}{2}} - e^0 = e - 1.$$

**2. Lösungsweg:** *Substitution des Integranden und der Grenzen, Berechnung des bestimmten Integrals in den neuen Grenzen:*

$$x = g(t) = \sin t \quad a' = 0, \quad b' = \frac{\pi}{2} \quad g(a') = g(0) = 0, \quad g(b') = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$J = \int_0^{\pi/2} e^{\sin t} \cos t dt = \int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1.$$

### 3.3 Uneigentliche Integrale

Das **bestimmte Integral** im Punkt 3.2.1 wurde unter zwei Voraussetzungen betrachtet:

- $\hat{1}$  Das Integrationsintervall  $[a, b]$  ist **beschränkt**.
- $\hat{2}$  Der Integrand  $f(x)$  ist eine **beschränkte** Funktion.

Sind  $\hat{1}$  und  $\hat{2}$  erfüllt, so spricht man von **eigentlichen Integralen**. Ist wenigstens eine dieser Bedingungen verletzt, dann spricht man von **uneigentlichen Integralen**. Diese werden als **GW eigentlicher Integrale** erklärt. Wir unterscheiden zwei Typen **uneigentlicher Integrale**.

#### 3.3.1 Uneigentliche Integrale über einem unbeschränkten Intervall

**Definition 3.4** Ist eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  bekannt, so gilt

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [F(x)]_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) - F(a), \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} [F(x)]_B^b = F(b) - \lim_{B \rightarrow -\infty} F(B), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} [F(x)]_B^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) - \lim_{B \rightarrow -\infty} F(B). \end{aligned}$$

Im letzten Fall sind die Grenzübergänge unabhängig voneinander. Wenn die **GW** in den rechten Seiten dieser Beziehungen als **eigentliche GW** existieren, so sagt man, dass die **uneigentlichen Integrale** in den linken Seiten **existieren** oder **konvergieren**. Wenn die **GW** in den rechten Seiten **uneigentlich** sind oder **nicht existieren**, so sagt man, die **uneigentlichen Integrale** in den linken Seiten **existieren nicht** oder **divergieren**.

Es sei  $f(x) > 0$ . Wir betrachten die Punktmenge, die von den Funktionen  $y = f(x)$  und  $y = 0$ , definiert über einem unbeschränkten Intervall, begrenzt wird. Dann kann man das in Definition 3.4 eingeführte **uneigentliche Integral** als Flächeninhalt dieser Punktmenge interpretieren.

#### Beispiel 3.8 (Uneigentliche Integrale über einem unbeschränkten Intervall)

(1) Sei  $\alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1$ .

$$\begin{aligned} J &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{für } \alpha > 1 \quad (J \text{ konvergiert}) \\ +\infty & \text{für } 0 < \alpha < 1 \quad (J \text{ divergiert}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2) J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\ln |x|]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln |A| = +\infty \quad (J \text{ divergiert})$$

$$(3) J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} [\arctan x]_B^A = \pi \quad (J \text{ konvergiert})$$

(4) Wird in einem Stromkreis mit der Selbstinduktion  $L$  und dem Widerstand  $R$  im Moment  $t = 0$  ein Strom der Stärke  $I_0$  ausgeschaltet, so tritt ein Ausschaltstrom  $I = I_0 \exp(-\frac{R}{L}t)$  auf. Die gesamte Joulesche Wärme ergibt sich zu

$$Q = \int_0^{+\infty} I^2 R dt = R I_0^2 \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{2R}{L}t) dt = R I_0^2 \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \exp(-\frac{2R}{L}t) dt = \frac{L I_0^2}{2}.$$

### 3.3.2 Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden

**Definition 3.5** Die Funktion  $f(t)$  besitze in  $a$  bzw.  $b$  oder in  $c \in ]a, b[$  eine Polstelle. Ist eine **Stammfunktion**  $F$  von  $f$  bekannt, so gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [F(x)]_{a+\varepsilon}^b = F(b) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(a+\varepsilon), \\ \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [F(x)]_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(b-\varepsilon) - F(a), \\ \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} [F(x)]_a^{c-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} [F(x)]_{c+\varepsilon_2}^b \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} F(c-\varepsilon_1) - F(a) + F(b) - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} F(c+\varepsilon_2) \end{aligned}$$

Die Grenzübergänge  $\varepsilon_1 \rightarrow +0$  und  $\varepsilon_2 \rightarrow +0$  sind wieder unabhängig voneinander.

### Beispiel 3.9 (Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden)

(1) Sei  $\alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1$ .

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{0+\varepsilon}^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{für } 0 < \alpha < 1 \quad (J \text{ konvergiert}) \\ +\infty & \text{für } \alpha > 1 \quad (J \text{ divergiert}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2) J = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\ln |x|]_{0+\varepsilon}^1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln |\varepsilon| = +\infty \quad (J \text{ divergiert})$$

## 4 Integralrechnung für reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen

### 4.1 Ebene und räumliche Bereichsintegrale

Das Integrationsintervall wird durch eine ebene bzw. räumliche Punktmenge ersetzt.

**Voraussetzungen:** Die betrachteten ebenen (räumlichen) Punkt Mengen  $B$  mögen einen Flächeninhalt (ein Volumen) besitzen.

Das **ebene Bereichsintegral**  $\iint_B f(x, y) db$  (**räumliche Bereichsintegral**  $\iiint_B f(x, y, z) db$ ) wird wie im Falle  $n = 1$  über einen **Grenzwert** definiert.

#### Definition 4.1 (Ebene und räumliche Normalbereiche)

1. Seien  $y_1(x), y_2(x)$  **stetig** in  $[x_1, x_2]$ ,  $y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$ . Die Punktmenge

$$B_x = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

heißt **ebener Normalbereich** bezüglich der  $x$ -Achse.

2. Seien  $x_1(y), x_2(y)$  **stetig** in  $[y_1, y_2]$ ,  $x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \quad \forall y \in [y_1, y_2]$ . Die Punktmenge

$$B_y = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \wedge y_1 \leq y \leq y_2\}$$

heißt **ebener Normalbereich** bezüglich der  $y$ -Achse.

3. Seien  $z_1(x, y), z_2(x, y)$  **stetig** in  $B_x$ ,  $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_x$ . Die Punktmenge

$$B_{xy} = \{(x, y, z) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \wedge z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

heißt **räumlicher Normalbereich** bezüglich der  $xy$ -Ebene, wobei  $B_x$  ein **ebener Normalbereich** bezüglich der  $x$ -Achse ist. Analog definiert man 5 weitere Typen räumlicher Normalbereiche.

#### Beispiel 4.1 (Ebene und räumliche Normalbereiche)

- (1) Ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten

$$R = \{(x, y) \mid a_1 \leq x \leq a_2 \wedge b_1 \leq y \leq b_2\}$$

ist ein Spezialfall eines **ebenen Normalbereichs** bezüglich beider Koordinatenachsen.

- (2) Ein Quader mit achsenparallelen Kanten

$$Q = \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq a_2 \wedge b_1 \leq y \leq b_2 \wedge c_1 \leq z \leq c_2\}$$

ist ein Spezialfall eines **räumlichen Normalbereichs** bezüglich aller drei Koordinatenebenen.

$$(3) B_x = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$B_y = \{(x, y) \mid \sqrt{y} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$$

$$(4) B_{xy} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq z \leq xy\}$$

**Theorem 4.1 (Existenz von Bereichsintegralen)** Sei  $B$  ein aus endlich vielen Normalbereichen zusammengesetzter ebener (räumlicher) Bereich und  $f$  eine in  $B$  definierte und stetige Funktion. Dann existiert das ebene (räumliche) Bereichsintegral und es gelten die Berechnungsformeln:

1. Ist  $B_x$  ein ebener Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse und  $f$  stetig in  $B_x$ , so gilt

$$\iint_{B_x} f(x, y) \, db = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Das (zweifache) Integral auf der rechten Seite berechnet sich wie folgt

- 1° Die Funktion  $f(x, y)$  wird unbestimmt nach  $y$  integriert (dabei wird  $x$  als konstant angesehen).
- 2° Für  $y$  werden die Grenzen  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  eingesetzt.
- 3° Der Integrand ist nach dem Einsetzen der Integrationsgrenzen bezüglich  $y$  nur noch eine Funktion von  $x$  und wird unbestimmt nach  $x$  integriert.
- 4° Für  $x$  werden die Grenzen  $x_1$  und  $x_2$  eingesetzt.

2. Ist  $B_y$  ein ebener Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse und  $f$  stetig in  $B_y$ , so gilt

$$\iint_{B_y} f(x, y) \, db = \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Das (zweifache) Integral auf der rechten Seite wird analog wie oben berechnet.

3. Ist  $B_{xy}$  ein räumlicher Normalbereich bezüglich der  $xy$ -Ebene und  $f$  stetig in  $B_{xy}$ , so gilt

$$\iiint_{B_{xy}} f(x, y, z) \, db = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Das (dreifache) Integral auf der rechten Seite berechnet sich sukzessive wie oben.

### Beispiel 4.2 (Ebene und räumliche Bereichsintegrale)

$$(1) f(x, y) = xy \quad B_x = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$\iint_{B_x} f(x, y) \, db = \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} xy \, dy \right) dx = \frac{1}{12}$$

$$(2) \quad f(x, y, z) = x y z \quad B_{xy} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq z \leq xy\}$$

$$\iiint_{B_{xy}} f(x, y, z) \, db = \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} \left( \int_0^{xy} x y z \, dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{96}$$

## 4.2 Kurvenintegrale

Das Integrationsintervall wird durch ein ebenes bzw. räumliches Kurvenstück ersetzt.

**Voraussetzungen:** Wir betrachten ebene Kurven bzw. Raumkurven  $C$ , die eine endliche Länge besitzen mögen. Die Kurve sei durch eine Parameterdarstellung, deren Koordinatenfunktionen auf einem abgeschlossenen Intervall **stetig differenzierbar** sind, gegeben. In diesem Falle nennen wir  $C$  eine **glatte Kurve**.

Wir unterscheiden **Kurvenintegrale 1. Art (Integrale über die Länge der Kurve)** und **Kurvenintegrale 2. Art (Integrale über die Projektionen)**. Beide werden wieder über einen Grenzwert definiert und zur Berechnung auf **Riemannsche Integrale** zurückgeführt.

**Theorem 4.2 (Existenz von Kurvenintegralen)** *Es sei  $C$  eine glatte Raumkurve mit einer Parameterdarstellung  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , dem Anfangspunkt  $P_1$  und dem Endpunkt  $P_2$ . Ferner sei  $f(x, y, z)$  ( $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z)$ ) ein in den Punkten der Kurve  $C$  definiertes und stetiges SF (VF). Dann existiert das **Kurvenintegral 1. Art**  $\int_C f(x, y, z) \, dl$ , welches nicht davon abhängt, ob die Kurve von  $P_1$  nach  $P_2$  oder umgekehrt durchlaufen wird. Außerdem existiert das **Kurvenintegral 2. Art***

$$\int_C v_1(x, y, z) \, dx + v_2(x, y, z) \, dy + v_3(x, y, z) \, dz = \int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle,$$

welches jedoch beim Durchlauf der Kurve in entgegengesetzter Richtung, d.h. von  $P_2$  nach  $P_1$  sein Vorzeichen ändert. Es gelten folgende Rückführungsformeln:

$$\int_C f(x, y, z) \, dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt, \quad (4.1)$$

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_{t_1}^{t_2} [v_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + v_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + v_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt. \quad (4.2)$$

Ist  $C$  eine **glatte, ebene Kurve** mit einer **Parameterdarstellung**  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$   $t \in [t_1, t_2]$ , so lauten die Rückführungsformeln

$$\int_C f(x, y) \, dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt, \quad (4.3)$$

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_{t_1}^{t_2} [v_1(x(t), y(t))x'(t) + v_2(x(t), y(t))y'(t)] dt. \quad (4.4)$$

Ist eine **ebene Kurve**  $C$  in einer expliziten Darstellung  $y = \varphi(x)$  gegeben, wobei die Funktion  $\varphi$  in einem Intervall  $[x_1, x_2]$  **stetig differenzierbar** ist, so setzt man  $x = t$ ,  $y = \varphi(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  und erhält aus (4.3) bzw. (4.4)

$$\int_C f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(t, \varphi(t)) \sqrt{1 + \varphi'(t)^2} dt, \quad (4.5)$$

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_{t_1}^{t_2} [v_1(t, \varphi(t)) + v_2(t, \varphi(t))\varphi'(t)] dt. \quad (4.6)$$

In den rechten Seiten von (4.1) – (4.6) stehen **Riemannsche Integrale**.

### Beispiel 4.3 (Kurvenintegrale 1. und 2. Art)

(1)  $f(x, y) = x^2$   $C : y = \varphi(x) = \ln x$ ,  $[x_1, x_2] = [1, 2]$  Aus (4.5) erhält man

$$\int_C f(x, y) dl = \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^2 t \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{1}{3} [5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}].$$

(2)  $v_1(x, y) = y^2$ ,  $v_2(x, y) = y$   $C : y = 2x - 1$ ,  $P_1 = (1, 1)$ ,  $P_2 = (3, 5)$  Berechnen Sie das **Kurvenintegral 2. Art** bez. beider Durchlaufrichtungen. Ergebnis:  $\pm \frac{98}{3}$ .

(3) Durch das ebene Kraftfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = k\mathbf{r}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  wird bei Verschiebung eines Massenpunktes von  $P_1 = (x_1, y_1)$  nach  $P_2 = (x_2, y_2)$  längs einer beliebigen glatten Kurve  $C$  mit einer Parameterdarstellung  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$  und dem Anfangspunkt  $P_1$  und dem Endpunkt  $P_2$  eine Arbeit  $W$  verrichtet, die sich durch ein **Kurvenintegral 2. Art** berechnen lässt. Es seien  $t_1$  ( $t_2$ ) die  $P_1$  ( $P_2$ ) entsprechenden Parameterwerte.

$$\begin{aligned} W &= \int_C \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle = k \int_{t_1}^{t_2} [x(t)x'(t) + y(t)y'(t)] dt \\ &= k \int_{t_1}^{t_2} d \left[ \frac{[x(t)]^2}{2} + \frac{[y(t)]^2}{2} \right] = \frac{k}{2} ([x(t_2)]^2 + [y(t_2)]^2 - [x(t_1)]^2 - [y(t_1)]^2). \end{aligned}$$

Die Arbeit hängt somit nur von der Lage des Anfangspunktes  $P_1$  und des Endpunktes  $P_2$  der Kurve ab und nicht von der diese Punkte verbindenden Kurve  $C$ .

**Theorem 4.3** Sei  $D \in \mathbb{R}^3$  ein **einfach zusammenhängender Bereich**,  $C \subset D$  eine **glatte Kurve** mit dem Anfangspunkt  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  sowie dem Endpunkt  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  und  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  eine **stetige Vektorfunktion** in  $D$ . Das **Kurvenintegral 2. Art**, (für eine ebene Kurve oder eine Raumkurve  $C$ ),  $\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle$  ist genau dann vom Weg zwischen  $P_1$  und  $P_2$  unabhängig, wenn  $\mathbf{v} = \nabla U$ , d.h., wenn  $\mathbf{v}$  ein **PF** ist. Dann gilt:

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_C \langle \nabla U, d\mathbf{r} \rangle = \int_{P_1}^{P_2} dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$



Diese Eigenschaft heißt **Wegunabhängigkeit** des **Kurvenintegrals 2.Art**. Für eine geschlossene Kurve erhält man  $\oint_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = 0$ .

**Theorem 4.4** *Ein VF  $\mathbf{v}(x, y, z)$  ist ein PF genau dann, wenn in einem einfach zusammenhängenden Bereich gilt*

$$\text{rot } \mathbf{v} = \Theta \quad \iff \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial z}.$$

### 4.3 Oberflächenintegrale

Das ebene Integrationsgebiet wird durch ein räumliches gekrümmtes Flächenstück ersetzt.

**Voraussetzungen:** Die betrachtete gekrümmte Fläche  $S$  mögen einen Flächeninhalt besitzen. Außerdem sei die Fläche **zweiseitig** und besitze keine Mehrfachpunkte. Es gibt auch **einseitige** Flächen, z.B. das (Möbiussche Band. Die Fläche sei durch eine Parameterdarstellung, deren Koordinatenfunktionen auf einem ebenen Normalbereich  $B$  **stetig differenzierbar** sind, gegeben. In diesem Falle nennen wir  $S$  eine **glatte Fläche**.

Wir unterscheiden **Oberflächenintegrale 1. Art (Integrale über den Flächeninhalt der Fläche)** und **Oberflächenintegrale 2. Art (Integrale über die Projektionen)**. Beide werden wieder über einen Grenzwert definiert und zur Berechnung auf **ebene Bereichsintegrale** zurückgeführt.

**Theorem 4.5 (Existenz von Oberflächenintegralen)** *Es sei  $S$  eine glatte zweiseitige Fläche mit einer Parameterdarstellung  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in B$ . Ferner sei  $f(x, y, z)$  ( $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z)$ ) ein in den Punkten der Fläche  $S$  definiertes und stetiges SF (VF). Dann existiert das **Oberflächenintegral 1. Art**  $\iint_S f(x, y, z) dS$ , welches nicht von der Seite der Fläche abhängt. Außerdem existiert das **Oberflächenintegral 2. Art***

$$\iint_S v_1(x, y, z) dy dz + v_2(x, y, z) dz dx + v_3(x, y, z) dx dy = \iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle,$$

welches jedoch beim Übergang zur anderen Seite der Fläche sein Vorzeichen ändert. Dabei bezeichnet  $d\mathbf{w} = dy dz \mathbf{i} + dz dx \mathbf{j} + dx dy \mathbf{k}$  ein vektorielles Oberflächenelement der Fläche  $S$ . Es gelten folgende Rückführungsformeln:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_B f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} db \quad (4.7)$$

mit

$$E = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2 \quad G = (x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2 \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$\iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle = \iint_B \begin{vmatrix} v_1(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) & v_2(x(u, v), \dots) & v_3(x(u, v), \dots) \\ x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} db. \quad (4.8)$$

Die Seite einer Fläche wird durch den Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}^0$  auf der Tangentialebene in den Flächenpunkten charakterisiert. Ist  $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$  die **Vektorfunktion**, deren Koordinatenfunktionen die **Parameterdarstellung** der Fläche ergeben, so gilt  $\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$ . Ist  $\mathbf{n}^0$  bei einer geschlossenen (nichtgeschlossenen) Fläche nach außen (oben) gerichtet, so spricht man von der Außenseite (Oberseite) der Fläche. Ist er bei einer geschlossenen (nichtgeschlossenen) Fläche nach innen (unten) gerichtet, so spricht man von der Innenseite (Unterseite) der Fläche. Der Übergang zur anderen Seite der Fläche wird durch Vertauschen der Reihenfolge von  $u$  und  $v$  in der **Parameterdarstellung** der Fläche erreicht. Man erhält aus  $\mathbf{r}(u, v)$  die Parameterdarstellung  $\mathbf{r}(v, u)$  und den entgegengesetzt zu  $\mathbf{n}^0$  gerichteten Normaleneinheitsvektor  $-\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u|}$ .

Ist eine Fläche  $S$  in einer expliziten Darstellung  $z = \varphi(x, y)$  gegeben, wobei die Funktion  $\varphi$  in einem ebenen Normalbereich  $B$  stetig differenzierbar ist, so setzt man  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = \varphi(u, v)$ ,  $(u, v) \in B$  und erhält aus (4.7) und (4.8)

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_B f(u, v, \varphi(u, v)) \sqrt{1 + [\varphi_u(u, v)]^2 + [\varphi_v(u, v)]^2} \, db, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle &= \iint_B \begin{vmatrix} v_1(u, v, \varphi(u, v)) & v_2(u, \dots) & v_3(u, \dots) \\ 1 & 0 & \varphi_u(u, v) \\ 0 & 1 & \varphi_v(u, v) \end{vmatrix} db. \\ &= \iint_B [-v_1(u, v, \varphi(u, v))\varphi_u(u, v) - v_2(u, v, \varphi(u, v))\varphi_v(u, v) + v_3(u, v, \varphi(u, v))] db. \end{aligned} \quad (4.10)$$

In (4.8) und (4.10) sind beim Übergang zur anderen Seite der Fläche die beiden letzten Zeilen in der Determinante zu vertauschen.

In den rechten Seiten von (4.7) und (4.10) stehen ebene Bereichsintegrale.

#### Beispiel 4.4 (Oberflächenintegrale 1. und 2. Art)

$f(x, y, z) = v_1(x, y, z) = v_2(x, y, z) = v_3(x, y, z) = 1 \quad \forall (x, y, z) \in S$  mit

$S: z = 1 - x - y, \quad x \in [0, 1/2] \quad y \in [0, 1/2]$

$$(1) \quad \iint_S f(x, y, z) \, dS = \sqrt{3} \int_0^{1/2} \left( \int_0^{1/2} dv \right) du = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(2) \quad \iint_S v_1(x, y, z) \, dy \, dz + v_2(x, y, z) \, dz \, dx + v_3(x, y, z) \, dx \, dy = \int_0^{1/2} \left( \int_0^{1/2} 3 \, dv \right) du = \frac{3}{4}$$

## 4.4 Die Integralsätze

### 4.4.1 Die Divergenz und der Integralsatz von Gauß

Wir betrachten die **Diffusion** eines Stoffes  $A$  in einem Lösungsmittel  $B$ . Jedem Raumpunkt kann man dann einen **Strömungsvektor**  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$  zuordnen, so dass

man ein **VF**, das so genannte **Strömungsfeld** erhält. Die **Konzentration** des Stoffes  $A$  zum Zeitpunkt  $t$  sei durch  $c(x, y, z, t)$  gegeben. Es gilt folgender Zusammenhang zwischen  $c$  und  $\mathbf{v}$ :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) = - \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (4.11)$$

Stellen des **VF**  $\mathbf{v}$  mit **positiver Divergenz** nennt man **Quellen**, solche mit **negativer Divergenz** **Senken**. In einer Flüssigkeitströmung ist die **Divergenz**  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  ein Maß für die lokale **Quelldichte** des **VF**  $\mathbf{v}$ .

**Theorem 4.6 (Gaußscher Integralsatz)** *Sei  $B$  ein räumlicher Bereich mit einer geschlossenen, zweiseitigen, stückweise glatten Randfläche  $S$ , wobei die Außenseite der Fläche betrachtet wird, d.h., der Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}^0$  zeigt nach außen. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, db &= \iiint_B \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) \, db \\ &= \oiint_S v_1 \, dy \, dz + v_2 \, dz \, dx + v_3 \, dx \, dy = \oiint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Der **Gaußsche Integralsatz** stellt einen Zusammenhang zwischen **Oberflächenintegralen 2. Art** und **räumlichen Bereichsintegralen** her.

**Geometrische Interpretation:** Die Flüssigkeitsmenge, die durch die Oberfläche eines räumlichen Gebietes herausströmt, ist gleich der Flüssigkeitsmenge, die die Quellen in dem Gebiet erzeugen (Satz über die Erhaltung der Materie).

Das **Oberflächenintegral 2. Art** in (4.12) heißt **Vektorfluss** des **VF**  $\mathbf{v}$  durch die Fläche  $S$  in Richtung von  $\mathbf{v}$ .

#### Beispiel 4.5 (Gaußscher Integralsatz)

- (1) Bei einem Diffusionsvorgang sei der Strömungsvektor  $\mathbf{v} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$  gegeben. Welche Stoffmenge  $M$  strömt je Zeiteinheit aus einem Quader mit den Kantenlängen  $l, m, n$ ?

Nach dem **Gaußschen Integralsatz** ist

$$M = \int_0^l \left( \int_0^m \left( \int_0^n (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \, dz \right) \, dy \right) \, dx = l m n (l^2 + m^2 + n^2).$$

- (2) Bei einem Diffusionsvorgang sei das Strömungsfeld  $\mathbf{v}_1 = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  gegeben. Welche Stoffmenge  $M$  strömt je Zeiteinheit aus einem Körper  $B$  mit dem Volumen  $V(B)$ ?

Nach dem **Gaußschen Integralsatz** ist

$$M = \oiint_S \langle \mathbf{v}_1, d\mathbf{w} \rangle = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v}_1 \, db = \iiint_V (1 + 1 + 1) \, dx \, dy \, dz = 3V(B).$$

Für das **VF**  $\mathbf{v}_2 = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  ist  $\operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0$  und somit  $M = 0$ .

#### 4.4.2 Die Rotation und der Integralsatz von Stokes

Zusammen mit dem  $\mathbf{VF} \mathbf{v}$  betrachtet man das **Wirbelfeld**  $\text{rot } \mathbf{v}$ , welches die Rotationsbewegungen von  $\mathbf{v}$  beschreibt. Für den Spezialfall  $\mathbf{v} = \omega(\mathbf{l}^0 \times \mathbf{r})$  (Rotation aller Punkte des Raumes mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine Achse in Richtung von  $\mathbf{l}$  ( $\mathbf{l}^0$  Einheitsvektor von  $\mathbf{l}$ )) gilt  $\text{rot } \mathbf{v} = 2\omega\mathbf{l}^0$ .

**Definition 4.2** Sei  $F$  ein Flächenstück mit einer geschlossenen Randkurve  $C$ . Das Integral

$$Z = \oint_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \oint_C v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$$

heißt **Zirkulation** des  $\mathbf{VF} \mathbf{v}$  längs der geschlossenen Kurve  $C$ .

Die **Zirkulation**  $Z$  ist ein Maß dafür wie stark die Kurve  $C$  umströmt wird, d.h. wie stark das Strömungsfeld längs der Kurve zirkuliert.

**Theorem 4.7 (Stokesscher Integralsatz)** Sei  $S$  ein Flächenstück mit einer geschlossenen Randkurve  $C$ . Dabei werde der Umlaufsinn auf der Kurve derart gewählt, dass vom Standpunkt eines Beobachters aus, der auf der Seite der Fläche steht, auf der sich der Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}^0$  befindet, die Kurve gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Dann gilt  $Z =$

$$\iint_S \langle \text{rot } \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle = \iint_S \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Der **Stokessche Integralsatz** stellt einen Zusammenhang zwischen **Kurvenintegralen 2. Art** und **Oberflächenintegralen 2. Art** her.

**Geometrische Interpretation:** Die **Zirkulation** eines  $\mathbf{VF} \mathbf{v}$  längs einer geschlossenen Kurve  $C$  ist gleich dem **Vektorfluss** von  $\text{rot } \mathbf{v}$  durch die Fläche, die von der Kurve  $C$  begrenzt wird. Für ein  $\mathbf{PF} \mathbf{v}$  ist  $Z = 0$ , denn  $\mathbf{v} = \nabla U$  und  $\text{rot}(\nabla U) = \mathbf{0}$ .

Als Spezialfall des **Stokessche Integralsatzes** erhält man für  $n = 2$  die **Greensche Formel**:

$$\oint_C v_1 dx + v_2 dy = \iint_S \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_B \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) db.$$

**Beispiel 4.6 (Stokesscher Integralsatz)**

(1) Eine Kreislinie  $C$  sei durch die **Vektorfunktion**  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$   $t \in [0, 2\pi]$  gegeben. Auf  $C$  seien die  $\mathbf{VF} \mathbf{v}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  und  $\mathbf{v}_2 = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$  definiert. Berechnen Sie in beiden Fällen die **Zirkulation**.

(2) Sei  $\mathbf{B}$  die magnetische Induktion,  $\mathbf{E}$  die elektrische Feldstärke. Die erste der **Maxwellschen Gleichungen** lautet in Integralform

$$\oint_C \langle \mathbf{E}, d\mathbf{r} \rangle = - \iint_S \langle \dot{\mathbf{B}}, d\mathbf{w} \rangle \implies \iint_S \langle \text{rot } \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}, d\mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall S \implies \text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}.$$

Man erhält das **differenzielle Induktionsgesetz**  $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ .

# 5 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

## 5.1 Gewöhnliche Differenzialgleichungen 1. Ordnung

### 5.1.1 Definition und einfachste Spezialfälle

**Definition 5.1 (Gewöhnliche Differenzialgleichung 1. Ordnung, Lösung)**

1. Eine Beziehung der Form

$$y' = f(x, y) \quad (x, y) \in E \quad (E \text{ Teilmenge der Ebene}) \quad (5.1)$$

zwischen der unabhängigen Variablen  $x$ , der abhängigen Variablen  $y$  und der Ableitung  $y'$ , die für jeden Wert  $x$  aus dem Definitionsbereich  $X$  der gesuchten Funktion  $y = y(x)$  gilt, heißt **explizit** gegebene **gewöhnliche Differenzialgleichung (gDG) 1. Ordnung**.

2. Eine Beziehung der Form

$$F(x, y, y') = 0 \quad (5.2)$$

heißt **implizit** gegebene **gDG 1. Ordnung**.

3. **Lösung** von (5.1) bzw. (5.2) heißt jede Funktion  $y = y(x)$  ( $x \in X$ ) mit folgenden Eigenschaften:

1° Die Funktion  $y = y(x)$  ist in  $X$  einmal differenzierbar.

2° Nach Einsetzen von  $y(x)$ ,  $y'(x)$  in die **gDG** (5.1) bzw. (5.2) sind diese Gleichungen für jedes  $x \in X$  erfüllt.

Die zu  $y = y(x)$  gehörige Kurve in der  $xy$ -Ebene heißt **Lösungskurve**.

### Spezialfälle von gDG 1. Ordnung der Form (5.1)

$$(1) \quad y'(x) = f(x) \quad (x, y) \in E = \{(x, y) \mid a < x < b \wedge -\infty < y < +\infty\}$$

Sei  $f(x)$  stetig in  $]a, b[$ , dann besitzt  $f(x)$  in  $]a, b[$  eine Stammfunktion. Die Gesamtheit der **Lösungen** (das unbestimmte Integral)

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C$$

ist eine einparametrische Kurvenschar. Die Konstante  $C$  lässt sich eindeutig festlegen, falls die **Lösung** in einem Punkt bekannt ist. Sei  $y(x_0) = y_0$  bekannt. Dann ist

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0$$

diejenige **Lösung**, die durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  hindurchgeht.

Sei z.B.  $y' = 2x$  mit dem unbestimmten Integral  $y(x) = x^2 + C$ . Dann ist  $y(x) = x^2 - x_0^2 + y_0$  diejenige Lösung, die durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  hindurchgeht.

$$(2) \quad y'(x) = f(y) \quad (x, y) \in E = \{(x, y) \mid -\infty < x < +\infty \wedge c < y < d\}$$

Sei  $f(y)$  stetig in  $]c, d[$  und  $f(y) \neq 0$  für alle  $y \in ]c, d[$ . Nach der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion gilt:  $y'(x) = x'(y)^{-1}$ . Dann betrachtet man anstelle von  $y'(x) = f(y)$  die **gDG**  $x'(y) = 1/f(y) = g(y)$ . Nach (1) besitzt  $g(y)$  in  $]c, d[$  eine Stammfunktion und die Gesamtheit der Lösungen

$$x(y) = \int_{y_0}^y g(\tau) \, d\tau + C$$

ist wieder eine einparametrische Kurvenschar. Wegen  $f(y) \neq 0$  für alle  $y \in ]c, d[$  ist  $x(y)$  **streng monoton**, d.h. es existiert eine eindeutige Umkehrfunktion  $y = \varphi(x)$ .

### Definition 5.2 (Allgemeine Lösung, spezielle Lösung, Cauchy-Problem)

1. Die einparametrische Funktionenschar  $y = y(x, C)$  heißt **allgemeine Lösung** der **gDG** (5.1) in  $E$ , wenn bei entsprechender Auswahl der Konstanten  $C$  die Funktion  $y$  in eine beliebige **Lösung** dieser **gDG**, deren Lösungskurve in  $E$  liegt, übergeht.
2. Die Gleichung  $\Phi(x, y, C) = 0$  heißt **allgemeines Integral** der **gDG** (5.1) in  $E$ , wenn sie die **allgemeine Lösung** von (5.1) als implizit gegebene Funktion definiert.
3. Jede **Lösung**, die man durch Einsetzen eines fixierten Wertes für  $C$  erhält, heißt **spezielle oder partikuläre Lösung** von (5.1).
4. **Cauchy-Problem oder Anfangswertproblem (AWP)**: Gesucht ist eine **Lösung** von (5.1), welche im Punkt  $x_0 \in ]a, b[$  der **Anfangsbedingung (Ab)**  $y(x_0) = y_0$  genügt. Dabei ist  $(x_0, y_0)$  mit  $y(x_0) = y_0$  ein gewisser fixierter Punkt aus  $E$ .

#### 5.1.2 Geometrische Interpretation für gDG der Form $y' = f(x, y)$

Die Funktion  $f(x, y)$  sei in  $E$  definiert und eindeutig. Jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in E$  wird mittels der **gDG** (5.1) ein **Richtungselement** zugeordnet:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \tan \alpha_0.$$

### Definition 5.3 (Richtungsfeld, Isoklinen)

1. Die Gesamtheit der durch (5.1) den Punkten aus  $E$  zugeordneten **Richtungselemente** heißt **Richtungsfeld**.
2. Die Kurven, die alle Punkte mit gleich großem **Richtungselement**  $\tan \alpha = y' = d$  miteinander verbinden, heißen **Isoklinen (Neigungslinien)**. Sie bilden eine einparametrische Kurvenschar.

**Darstellung des Richtungsfeldes:** Durch jeden Punkt  $(x, y) \in E$  legt man ein Geradenstück, dessen Anstieg gleich dem diesen Punkt zugeordneten **Richtungselement**  $\tan \alpha$  ist.

### Graphisches Verfahren zur näherungsweise Lösung einer gDG der Form (5.1):

Es sei  $y(x) = \varphi(x)$  eine Lösung von (5.1), die durch  $(x_0, y_0)$  hindurchgeht. Dann ist

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = \tan \alpha_0.$$

Lösungen der gDG (5.1) sind also alle Kurven, bei denen die Tangente in jedem Punkt den Anstieg besitzt, den das **Richtungsfeld** in diesem Punkt vorschreibt.

#### Beispiel 5.1 (Richtungsfeld, Isoklinen)

(1)  $y' = -x/y$      $(0, 0) \notin E$ . Setzen  $y' = d = -x/y$ .

Die **Isoklinenschar** ist die Geradenschar  $y = (-1/d)x$ . Wegen  $d(-1/d) = -1$  steht die Tangente an die Lösungskurve in jedem Punkt senkrecht auf der **Isokline**, d.h. die Lösungskurven sind Kreise in Mittelpunktslage.

(2)  $y' = y/x$      $(0, 0) \notin E$ . Setzen  $y' = d = y/x$ .

Die **Isoklinenschar** ist die Geradenschar  $y = d \cdot x$ . Sowohl der Anstieg der **Isokline** als auch der Anstieg der Lösungskurve hat den Wert  $d$ . Folglich sind die Lösungskurven Halbgeraden, die sämtlich im Punkt  $(0, 0)$  münden.

#### 5.1.3 GDG mit trennbaren Variablen

Eine **gDG mit trennbaren Variablen** hat die Gestalt:

$$y' = f_1(x)f_2(y) \quad (f(x, y) = f_1(x)f_2(y)). \quad (5.3)$$

**Theorem 5.1** Sei  $f_1(x)$  stetig in  $]a, b[$ ,  $f_2(y)$  stetig und  $f_2(y) \neq 0$  in  $]c, d[$ . Dann geht durch jeden Punkt  $(x_0, y_0)$  des Rechtecks  $Q = \{(x, y) \mid a < x < b \wedge c < y < d\}$  genau eine Lösungskurve der **gDG** (5.3) hindurch, d.h., das **AWP** ist für **gDG** der Form (5.3) stets eindeutig lösbar.

#### Lösungsverfahren zur Berechnung der allgemeinen Lösung

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \implies \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx \implies \int_{y_0}^y \frac{d\tau}{f_2(\tau)} = \int_{x_0}^x f_1(t) dt + C$$

Die letzte Formel liefert das **allgemeine Integral**. Falls eine eindeutige Auflösung nach  $y$  möglich ist, erhält man die **allgemeine Lösung**.

#### Beispiel 5.2 (GDG mit trennbaren Variablen)

(1)  $y' = -x/y \implies y dy = -x dx \implies \Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - C^2 = 0$  - **allgemeines Integral**.

(2)  $y' = y/x \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies y = Cx$  - **allgemeine Lösung**.

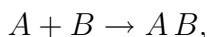
- (3) Der Phasenübergang einer Substanz bei konstantem Druck und konstanter Temperatur wird durch die Clausius-Clapeyronsche Differenzialgleichung beschrieben:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{T(V_e - V_a)}$$

Dabei bezeichnet  $l$  die Umwandlungswärme,  $V_e$  bzw.  $V_a$  das Molvolumen der End- bzw. Anfangsphase,  $p$  den Druck und  $T$  die (absolute) Temperatur. Mit den Vereinfachungen  $V_a = 0$  und  $V_e = RT/p$  erhält man die **gDG mit trennbaren Variablen**

$$\frac{dp}{dT} = \frac{pl}{RT^2} \quad \text{die die allgemeine Lösung } p = p(T) = Ce^{-l/RT} \quad \text{besitzt.}$$

- (4) Wir betrachten die **bimolekulare Reaktion**



d.h. ein Molekül vom Typ  $A$  vereinigt sich mit einem Molekül vom Typ  $B$  zu einem Molekül vom Typ  $AB$ . Sei  $x = x(t)$  die Anzahl der nach Ablauf der Zeitspanne  $t$  bei der Reaktion verbrauchten Moleküle vom entsprechenden Typ.

Zeit	Anzahl der noch vorhandenen Moleküle vom Typ	
	$A$	$B$
$t_0 = 0$	$a$	$b$
$t$	$a - x$	$b - x$

Sei  $a \neq b$ ,  $k$  ein Proportionalitätsfaktor und  $x' = x'(t)$  die Reaktionsgeschwindigkeit. Dann wird die Reaktion durch das **AWP**

$$x' = k(a - x)(b - x) \quad x(0) = 0$$

beschrieben. Nach Variablentrennung

$$\frac{dx}{(x - a)(x - b)} = k dt \quad x(0) = 0,$$

Integration beider Seiten

$$\frac{1}{a - b} \ln \left| \frac{a - x}{b - x} \right| = kt + C$$

und Berücksichtigung der **Ab** erhält man

$$kt = \frac{1}{a - b} \ln \frac{b(x - a)}{a(x - b)}.$$

Löst man die letzte Gleichung nach  $x$  auf, so ergibt sich

$$x(t) = ab \frac{e^{(a-b)kt} - 1}{ae^{(a-b)kt} - b}.$$

Für  $t \rightarrow \infty$  erhält man die Gesamtzahl der bei der Reaktion verbrauchten Moleküle vom Typ  $A$  bzw.  $B$ . Für  $a > b$  ergibt sich  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = b$ , d.h. die Reaktion ist beendet, wenn sämtliche Moleküle vom Typ  $B$  verbraucht worden sind. Für  $a < b$  erhält man  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a$ . Dies entspricht der Tatsache, dass die Reaktion zum Stillstand kommt, wenn alle Moleküle vom Typ  $A$  verbraucht sind.



### 5.1.4 Lineare gDG 1. Ordnung

Eine **lineare gDG (lgDG)** hat die Gestalt:

$$y' + a(x)y = g(x) \quad (f(x, y) = g(x) - a(x)y). \quad (5.4)$$

**Theorem 5.2** Seien  $a(x)$  und  $g(x)$  stetig in  $]a, b[$ . Dann geht durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in E = \{(x, y) \mid a < x < b \wedge -\infty < y < +\infty\}$  genau eine Lösungskurve der **gDG** (5.4), die für alle  $x \in ]a, b[$  definiert ist, hindurch, d.h., das **AWP** ist für **lgDG** der Form (5.4) stets eindeutig lösbar.

**Definition 5.4** Ist  $g(x) = 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ , so heißt die **lgDG** (5.4) **homogen**, anderenfalls heißt sie **inhomogen**. Die Funktion  $a(x)$  heißt **Koeffizient der lgDG** (5.4).

#### Berechnung der allgemeinen Lösung einer homogenen lgDG 1. Ordnung

$$y' + a(x)y = 0 \quad - \text{spezielle gDG mit trennbaren Variablen} \quad (5.5)$$

$$\frac{dy}{y} = -a(x) dx$$

$$\ln \left| \frac{y}{C} \right| = - \int_{x_0}^x a(t) dt$$

$$\left| \frac{y}{C} \right| = e^{- \int_{x_0}^x a(t) dt}$$

$$y_a^h(x) = C e^{- \int_{x_0}^x a(t) dt} = C y_s^h(x) \quad - \text{allgemeine Lösung von (5.5).} \quad (5.6)$$

Dabei ist  $y_s^h(x) := e^{- \int_{x_0}^x a(t) dt}$  eine **spezielle Lösung** von (5.5).

#### Berechnung der allgemeinen Lösung einer inhomogenen lgDG 1. Ordnung

Die Gleichungen (5.4) und (5.5) besitzen keine gemeinsamen Lösungen. Deshalb wird zur Lösung von (5.4) ein Lösungsansatz der Form (5.6) verwendet, wobei  $C = C(x)$  gesetzt wird und  $y_s^h(x)$  eine **spezielle Lösung** von (5.5) ist:

$$y_a^{inh} = C(x)y_s^h \quad (y_a^{inh})' = C'(x)y_s^h + C(x)(y_s^h)'. \quad (5.7)$$

Dabei wird  $C(x)$  derart bestimmt, dass  $y_a^{inh}(x) = C(x)y_s^h(x)$  die Gleichung (5.7) löst. Dieses Verfahren heißt **Variation der Konstanten**. Einsetzen von (5.7) in (5.4) liefert

$$\begin{aligned} C'(x)y_s^h + C(x)(y_s^h)' + a_0(x)C(x)y_s^h &= g(x) \\ C'(x)y_s^h + C(x)[(y_s^h)' + a_0(x)y_s^h] &= g(x). \end{aligned}$$

Da  $y_s^h(x)$  eine **spezielle Lösung** von (5.5) ist, gilt:

$$(y_s^h)' + a_0(x)y_s^h = 0$$

und man erhält zur Bestimmung von  $C(x)$  eine Differentialgleichung der Form

$$C'(x)y_s^h(x) = g(x).$$

Wegen  $y_s^h(x) \neq 0$  ist nämlich

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{g(x)}{y_s^h(x)} \quad \text{und} \\ C(x) &= \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{y_s^h(t)} dt + D, \end{aligned} \quad (5.8)$$

wobei  $D$  wieder eine willkürliche Konstante ist. Einsetzen von (5.8) in die erste Formel in (5.7) ergibt die **allgemeine Lösung** von (5.4)

$$y_a^{inh}(x) = y_s^h(x) \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{y_s^h(t)} dt + D y_s^h(x). \quad (5.9)$$

Dabei ist  $y_a^h(x) = D y_s^h(x)$  wieder die **allgemeine Lösung** von (5.5) und  $y_s^{inh}(x) := y_s^h(x) \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{y_s^h(t)} dt$  eine **spezielle Lösung** von (5.4).

### Beispiel 5.3 (homogene lgDG, inhomogene lgDG)

- (1) In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf  $100^\circ C$  erhitzt wurde, bei einer Außentemperatur von  $0^\circ C$  auf  $25^\circ C$  ab, wenn er sich in 10 Minuten bis auf  $50^\circ$  abkühlt?

**Annahme:** Die Abkühlgeschwindigkeit des Körpers sei proportional der Temperaturdifferenz von Körper und Außentemperatur.

**Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen lgDG:**

$$\begin{aligned} u' &= -k u \quad (k > 0) \\ \frac{du}{u} &= -k dt \\ \ln \left| \frac{u}{D} \right| &= -kt \\ u_a^h(t) &= D e^{-kt}. \end{aligned}$$

**Berechnung von D (Lösung eines AWP):** Für  $t = 0$  ist  $u(0) = 100$ . Einsetzen in die **allgemeine Lösung** liefert  $D = 100$ . Man erhält die **spezielle Lösung**

$$u(t) = 100 e^{-kt},$$

die durch den Punkt  $(t_0, u_0) = (0, 100)$  hindurchgeht.

**Ermittlung von k (Lösung eines inversen Problems):** Für  $t = 10$  ist  $u(10) = 50$ . Es ist

$$50 = 100 e^{-k10} \implies k = \frac{\ln 2}{10}.$$

Man erhält:

$$u(t) = 100 e^{-\frac{\ln 2}{10} t} = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}.$$

**Wann hat sich der Körper auf  $25^\circ C$  abgekühlt?** Gesucht ist der Wert  $t$ , für den  $u(t) = 25$  gilt:

$$25 = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} \implies 2^{-2} = 2^{-\frac{t}{10}} \implies t = 20 \text{ [min]}.$$





**Lemma 5.1** Die Menge der Lösungsvektoren des homogenen linearen Systems (5.11) erzeugt einen Unterraum  $L^h$  des Vektorraumes  $C[a, b]$ , wobei  $\dim L^h = n$  gilt.

**Definition 5.7** (Fundamentalsystem, allgemeine Lösung eines homogenen IGS)

1. Jede Basis des  $n$ -dimensionalen Unterraumes  $L^h$  des homogenen linearen Systems (5.11) heißt ein **Fundamentalsystem** von (5.11).
2. Bilden die Lösungen  $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n$  ein **Fundamentalsystem** von (5.11), so heißt  $\mathbf{y}_a^h = C_1 \mathbf{y}^1 + C_2 \mathbf{y}^2 + \dots + C_n \mathbf{y}^n$  mit beliebigen Konstanten  $C_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) die **allgemeine Lösung** des homogenen linearen Systems (5.11).

**Theorem 5.4** (Lösungsstruktur unter Verwendung des Begriffs allgemeine Lösung)

- (1) Die **allgemeine Lösung**  $\mathbf{y}_a^h$  von (5.11) erzeugt einen **Unterraum** der Dimension  $n$  des **Vektorraumes**  $C[a, b]$ . Jede **Lösung** von (5.11) lässt sich als **Linearkombination** eines beliebigen **Fundamentalsystems** von (5.11) darstellen.
- (2) Die **allgemeine Lösung**  $\mathbf{y}_a^{inh}$  eines **inhomogenen linearen Systems** der Form (5.10) erzeugt eine **lineare Mannigfaltigkeit** in  $C[a, b]$ , d.h., sie setzt sich **additiv** zusammen aus einer **speziellen Lösung**  $\mathbf{y}_s^{inh}$  von (5.10) und der **allgemeinen Lösung**  $\mathbf{y}_a^h$  des zugehörigen **homogenen IGS** (5.11).

**Theorem 5.5** Die  $n$  Lösungsvektoren  $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n$  eines **homogenen linearen Systems**  $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$  sind **linear unabhängig** in  $C[a, b]$ , d.h. sie repräsentieren ein **Fundamentalsystem** von  $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$  gdw ihre **Determinante** für alle Werte von  $x$  aus dem gemeinsamen Definitionsbereich der Lösungsfunktionen von Null verschieden ist:

$$\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.12)$$

Dabei bezeichnet  $y_{ij}$  die  $i$ -te Koordinate des Lösungsvektors  $\mathbf{y}^j = \mathbf{y}^j(x)$ . Die Determinante (5.12) heißt auch **Wronskische Determinante**.

**Beispiel 5.4** Das **homogene lineare System**  $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$  mit

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

besitzt, wie man durch Einsetzen in das **lineare System** leicht nachprüft, die **Lösungsvektoren**

$$\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^x, \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Für die **Wronskischen Determinante**, gebildet aus den Lösungsvektoren, gilt

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ 2e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \forall x,$$

also repräsentieren  $\mathbf{y}^1$  und  $\mathbf{y}^2$  ein **Fundamentalsystem**.



Falls  $s$  **linear unabhängige Eigenvektoren**  $\mathbf{P}^i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) zu  $\lambda_k$  gehören, so hat der zu  $\lambda_k$  gehörige Lösungsanteil die Gestalt:

$$\mathbf{y}^k(x) = (C_1 \mathbf{P}^1 + C_2 \mathbf{P}^2 + \dots + C_s \mathbf{P}^s) e^{\lambda_k x}.$$

Falls  $m < s$  **linear unabhängige Eigenvektoren** zu  $\lambda_k$  gehören, so suchen wir den zu  $\lambda_k$  gehörige Lösungsanteil in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^k(x) &= (\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2 x + \dots + \mathbf{A}^{(s-m)} x^{s-m}) e^{\lambda_k x} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} + A_{12}x + \dots + A_{1(s-m)}x^{s-m} \\ A_{21} + A_{22}x + \dots + A_{2(s-m)}x^{s-m} \\ \vdots \\ A_{n1} + A_{n2}x + \dots + A_{n(s-m)}x^{s-m} \end{pmatrix} e^{\lambda_k x}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dieser Lösungsansatz wird in das Differenzialgleichungssystem eingeführt. Mittels Koeffizientenvergleich erhält man ein **IGS** bez. der Unbekannten  $A_{11}, \dots, A_{n(s-m)}$ , dessen **allgemeine Lösung** zu bestimmen ist. Diese hängt von  $s$  beliebigen Konstanten ab, wobei  $s$  die Vielfachheit des **Eigenwertes**  $\lambda_k$  ist.

- 4° Ist  $\lambda = \alpha + i\beta$  ein  $s$ -facher komplexer **Eigenwert**, so verfährt man wie bei einem reellen  $s$ -fachen **Eigenwert** und nimmt dann als Lösungsanteile von  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  Real- und Imaginärteil des berechneten Lösungsvektors.

### Berechnung der allgemeinen Lösung des inhomogenen Systems (5.13)

Ist die **allgemeine Lösung** des zu (5.13) **homogenen linearen Systems** bekannt, so erhält man die **allgemeine Lösung** von (5.13) mittels Variation der Konstanten. Falls  $\mathbf{A}\mathbf{b}$  gemäß Definition 5.6 vorgegeben sind, lässt sich das **AWP** eindeutig lösen.

### Beispiel 5.5 (Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten)

- (1) *Lösung für Beispiel 5.4. Es wird eine Lösung in der Form  $\mathbf{y} = \mathbf{P} e^{\lambda x}$  gesucht. Einsetzen dieses Lösungsansatzes in das System und Kürzen des nicht verschwindenden Faktors  $e^{\lambda x}$  liefert die **charakteristische Gleichung** oder das **charakteristische Polynom** der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$ :*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} (-1/3 - \lambda) & 2/3 \\ 4/3 & (1/3 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 & \quad \begin{array}{l} -4/3 P_{11} + 2/3 P_{21} = 0 \\ 4/3 P_{11} - 2/3 P_{21} = 0 \end{array} \quad \mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 = -1 & \quad \begin{array}{l} 2/3 P_{12} + 2/3 P_{22} = 0 \\ 4/3 P_{12} + 4/3 P_{22} = 0 \end{array} \quad \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher bilden die beiden Vektoren

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{P}^1 e^x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^x, \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^2 = \mathbf{P}^2 e^{-x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

ein **Fundamentalsystem** des **homogenen linearen Systems**. Die **allgemeine Lösung** hat die Gestalt

$$\mathbf{y}_a^h(x) = C_1 \mathbf{y}^1(x) + C_2 \mathbf{y}^2(x) = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ 2C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{pmatrix}.$$

(2) Gesucht ist die **allgemeine Lösung** des **homogenen linearen Systems**

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 1y_2 \\ y_2' &= 5y_1 + 2y_2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die **charakteristische Gleichung** von **A** hat die Gestalt:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} (4 - \lambda) & -1 \\ 5 & (2 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

und besitzt die komplexen Wurzeln  $\lambda_1 = 3 + i2$  und  $\lambda_2 = 3 - i2$ . Für  $\lambda_1 = 3 + i2$  bestimmen wir den zugehörigen **Eigenvektor** aus den **IGS**

$$\begin{pmatrix} (1 - i2) & P_{11} & - & & P_{21} & = & 0 \\ 5 & P_{11} & - & (1 + i2) & P_{21} & = & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i2 \end{pmatrix}.$$

Man erhält eine **spezielle Lösung** in komplexer Form

$$\mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i2 \end{pmatrix} e^{(3+i2)x} = \begin{pmatrix} e^{3x}(\cos(2x) + i\sin(2x)) \\ (1 - i2)e^{3x}(\cos(2x) + i\sin(2x)) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Da (5.15) reelle Koeffizienten besitzt, braucht man die **spezielle Lösung**, die dem **Eigenwert**  $\lambda_2 = 3 - i2$  entspricht, nicht zu berechnen. Sie ist durch den konjugiert komplexen Ausdruck zu (5.16) gegeben. Realteil und Imaginärteil von (5.16) liefern das gesuchte **Fundamentalsystem**:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1 &= \operatorname{Re} \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} e^{3x} \cos(2x) \\ e^{3x}(\cos(2x) + 2\sin(2x)) \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \mathbf{y}^2 &= \operatorname{Im} \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} e^{3x} \sin(2x) \\ e^{3x}(\sin(2x) - 2\cos(2x)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die **allgemeine Lösung** hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_a^h(x) &= C_1 \mathbf{y}^1(x) + C_2 \mathbf{y}^2(x) \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^{3x} \cos(2x) + C_2 e^{3x} \sin(2x) \\ C_1 e^{3x}(\cos(2x) + 2\sin(2x)) + C_2 e^{3x}(\sin(2x) - 2\cos(2x)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) Gesucht ist die **allgemeine Lösung** des **inhomogenen linearen Systems**

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + x \\ y_2' &= 4y_1 - 3y_2 + 2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Zunächst bestimmt man die **allgemeine Lösung** des zu (5.17) **homogenen linearen Systems**. Die **charakteristische Gleichung** von **A** hat die Gestalt:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} (1 - \lambda) & -1 \\ 4 & (-3 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

und besitzt eine Nullstelle  $\lambda_1 = -1$  der Vielfachheit 2. Es gilt  $n = 2, r = 1$ , also  $m = n - r = 1$ , d.h., es gibt zum **Eigenwert** der Vielfachheit  $s = 2$  genau einen



**Eigenvektor.** Deshalb ist der Lösungsansatz (5.14) zu verwenden. Einsetzen dieses Lösungsansatzes für  $s = 2$  und  $m = 1$

$$\mathbf{y}(x) = (\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2 x) e^{-x} = \begin{pmatrix} (A_{11} + A_{12} x) e^{-x} \\ (A_{21} + A_{22} x) e^{-x} \end{pmatrix}$$

in das zu (5.17) **homogene lineare System** führt auf das **IGS**

$$\begin{aligned} -2 A_{11} + A_{21} + A_{12} &= 0 \\ -4 A_{11} + 2 A_{21} + A_{22} &= 0 \\ -2 A_{12} + A_{22} &= 0 \\ -4 A_{12} + 2 A_{22} &= 0 \end{aligned}$$

dessen Koeffizientenmatrix den **Rang 2** besitzt. Wählt man  $A_{11} = C_1$  und  $A_{12} = C_2$ , so erhält man für die übrigen zwei Variablen  $A_{21} = 2C_1 - C_2$  und  $A_{22} = 2C_2$ . Die **allgemeine Lösung** hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_a^h(x) &= C_1 \mathbf{y}^1(x) + C_2 \mathbf{y}^2(x) \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} x \\ 2x - 1 \end{pmatrix} e^{-x} \\ &= \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 x) e^{-x} \\ (2C_1 - C_2) + 2C_2 x e^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Variation der Konstanten liefert das **IGS**

$$\begin{aligned} C_1'(x) + x C_2'(x) &= x e^x \\ 2 C_1'(x) + (2x - 1) C_2'(x) &= 2 e^x \end{aligned}$$

bezüglich der Unbekannten  $C_1'(x)$  und  $C_2'(x)$ . Man erhält

$$C_1'(x) = (-2x^2 + 3x) e^x, \quad C_2'(x) = (2x - 2) e^x.$$

Nach Integration ergibt sich

$$C_1(x) = (-2x^2 + 7x - 7) e^x + D_1, \quad C_2(x) = (2x - 4) e^x + D_2. \quad (5.19)$$

Ersetzt man in (5.18) die Konstanten  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) durch die Funktionen  $C_i(x)$  und verwendet (5.19), so erhält man die **allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Systems**

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_a^{inh}(x) &= \mathbf{y}_s^{inh}(x) + \mathbf{y}_a^h(x) \\ &= \begin{pmatrix} 3x - 7 \\ 4x - 10 \end{pmatrix} + D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x} + D_2 \begin{pmatrix} x \\ 2x - 1 \end{pmatrix} e^{-x}. \end{aligned}$$

- (4) Wir betrachten eine chemische Reaktion, bei der ein Stoff A in den Stoff B und dieser in den Stoff C umgewandelt wird  $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ . Die Molekülkonzentrationen zur Zeit  $t$  (die jeweils vorhandene Menge der Substanz A, B, C) bezeichnen wir mit  $y_1, y_2, y_3$  entsprechend. Dann sind die Zunahmen dieser Mengen (Konzentrationsänderungen) pro Zeiteinheit gegeben durch  $\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dot{y}_3(t)$ . Für diese Änderungen gilt in vielen Fällen ein linearer Ansatz

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -k_1 y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) &= k_1 y_1(t) - k_2 y_2(t) \\ \dot{y}_3(t) &= k_2 y_2(t), \end{aligned} \quad (5.20)$$

