Einführung in die Integration

Jürgen Voigt
Fachrichtung Mathematik, Technische Universität Dresden,
01062 Dresden, Germany
voigt@math.tu-dresden.de

21. Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Das n-dimensionale Riemann-Integral **5**

1.1 Treppenfunktionen im $\mathbb{R}^n$ und ihr Integral 5
1.2 Das Riemann-Integral 11
1.3 Satz von Fubini, Berechnung von Integralen 17
1.4 Die Transformationsformel für n-dimensionale Integrale 25
1.5 Beweis der Transformationsformel 33
1.6 Uneigentlich absolut Riemann-integrierbare Funktionen 37
1.7 Integration auf Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ 44
1.8 Berechnung von Volumina k-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ 58
1.9 Integration in Schichten (ein Desintegrationssatz) 59
1.10 Der Gauß'sche Integralsatz 64

2 Das Daniell-Integral **69**

2.1 Integrationsverbände 69
2.2 Maße auf Ringen 72
2.3 Der Fortsetzungsprozess, Oberintegral 76
2.4 Integrierbare Funktionen, erste Eigenschaften 80
2.5 Konvergenzsätze, Nullmengen 82

Kapitel 1

Das n-dimensionale Riemann-Integral

1.1 Treppenfunktionen im $\mathbb{R}^n$ und ihr Integral

Definition. Für $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $a \leqslant b$, falls $a_j \leqslant b_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt. Falls $a \leqslant b$ ist, definieren wir das *n-dimensionale abgeschlossene Intervall*

$$\begin{aligned}[a,b] &:= [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n] \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, a_j \leqslant x_j \leqslant b_j \text{ für alle } j = 1,\ldots,n\}\end{aligned}$$

und das *n-dimensionale offene Intervall*

$$\begin{aligned}(a,b) &:= (a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \cdots \times (a_n,b_n) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, a_j < x_j < b_j \text{ für alle } j = 1,\ldots,n\}\,,\end{aligned}$$

sowie das *n-dimensionale Volumen* (oder *Maß*)

$$\mathrm{vol}_n\,[a,b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)\,.$$

Definition. (a) Für Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Indikatorfunktion* $\mathbf{1}_B$ durch

$$\mathbf{1}_B := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in B\,, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \backslash B\,. \end{cases}$$

(Die häufig zu findende Terminologie *charakteristische Funktion* für $\mathbf{1}_B$ werden wir nicht verwenden.)

Die Menge

$$T(\mathbb{R}^n) := \mathrm{lin}\left\{\mathbf{1}_{[a,b]}\,;\, a,b \in \mathbb{R}^n,\ a \leqslant b\right\}$$

ist der Vektorraum der *Treppenfunktionen* (wobei die lineare Hülle „lin“ im Vektorraum aller reellen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ gebildet werden soll). Jede Treppenfunktion f ist also von der Form

$$f = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{1}_{[a^j, b^j]}\,,$$

mit $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $a^1, \ldots, a^k, b^1, \ldots, b^k \in \mathbb{R}^n$, $a^j \leqslant b^j$ für alle $j = 1, \ldots, k$.

Bemerkungen. (a) Für $n = 1$ kann eine Treppenfunktion f auch so beschrieben werden: Es gibt $k \in \mathbb{N}_0$, $-\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \infty$ und $c_1, \ldots, c_k$ so, dass $f(x) = 0$ für $x < x_0$ und $x > x_k$, $f(x) = c_k$ für $x_{j-1} < x < x_j$, $j = 1, \ldots, k$ (und $f(x_j) \in \mathbb{R}$ beliebig für $j = 0, \ldots, k$) ist.

(b) Sei $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $f \in T(\mathbb{R}^n)$. Für jedes $\hat{x} = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist dann

$$f(\,\cdot\,, \hat{x}) \in T(\mathbb{R}^k)\,.$$

Um dies einzusehen, genügt es, $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ zu betrachten. Mit $a = (\check{a}, \hat{a})$, $b = (\check{b}, \hat{b})$, wobei $\check{a}, \check{b} \in \mathbb{R}^k$, $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}^{n-k}$, gilt dann

$$f(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}(\check{x}, \hat{x}) = \mathbf{1}_{[\check{a},\check{b}]}(\check{x})\mathbf{1}_{[\hat{a},\hat{b}]}(\hat{x})\,,$$

$$f(\,\cdot\,, \hat{x}) = \begin{cases} \mathbf{1}_{[\check{a},\check{b}]} & \text{falls } \hat{x} \in [\hat{a}, \hat{b}]\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

hier ein Bild ???

(c) Für $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leqslant b$, ist $\mathbf{1}_{(a,b)}$ eine Treppenfunktion:
Dazu können wir ohne Einschränkung $(a,b) \neq \emptyset$ annehmen. Für $n = 1$ gilt

$$\mathbf{1}_{(a,b)} = \mathbf{1}_{[a,b]} - \mathbf{1}_{[b,b]} - \mathbf{1}_{[a,a]}\,.$$

Für $d = 2$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{(a,b)}(x_1, x_2) &= \mathbf{1}_{(a_1,b_1)}(x_1)\mathbf{1}_{(a_2,b_2)}(x_2) \\ &= \big(\mathbf{1}_{[a_1,b_1]}(x_1) - \mathbf{1}_{[b_1,b_1]}(x_1) - \mathbf{1}_{[a_1,a_1]}(x_1)\big)\times \\ &\qquad\qquad \big(\mathbf{1}_{[a_2,b_2]}(x_2) - \mathbf{1}_{[b_2,b_2]}(x_2) - \mathbf{1}_{[a_2,a_2]}(x_2)\big) \\ &= \mathbf{1}_{[a_1,b_1]}(x_1)\mathbf{1}_{[a_2,b_2]}(x_2) - \cdots \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für $n \geqslant 3$. Siehe dazu auch Übungsaufgabe (**???**).

Definition. Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$, $f = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{1}_{[a^j,b^j]}$, definieren wir das *Integral*

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \sum_{j=1}^{m} c_j \operatorname{vol}_n [a^j, b^j]\,.$$

Man sollte eher sagen, dass man diese Definition so treffen will. Es ist nämlich noch zu zeigen, dass die Definition unabhängig von der Darstellung von f ist, oder anders gesagt, dass das obige Integral *wohldefiniert* ist. Dies ist der erste Teil des folgenden Satzes.

Der Definition von $\int f(x)\,dx$ liegt die Idee zugrunde, dass dieses Integral das $(n{+}1)$-dimensionale Volumen des „unter dem Graphen von f liegenden Körpers" sein soll. Ist zum Beispiel $f = c\mathbf{1}_{[a,b]}$, für $c \geqslant 0$, so ist

$$\int f(x)\,dx = c \operatorname{vol}_n [a,b] = \operatorname{vol}_{n+1}([a,b] \times [0,c])\,.$$

1.1.1 Satz. (a) *Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$ ist das soeben definierte Integral wohldefiniert, d. h. es hängt nicht von der Darstellung von f ab.*

(b) *Die Abbildung*

$$T(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}\,, \quad f \mapsto \int f(x)\,dx$$

ist linear.

(c) *Sei $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$ ist dann*

$$\mathbb{R}^{n-k} \ni \hat{x} \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(\check{x},\hat{x})\,d\check{x}$$

eine Treppenfunktion, und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_{\hat{x}\in\mathbb{R}^{n-k}} \Bigg(\int\limits_{\check{x}\in\mathbb{R}^k} f(\check{x},\hat{x})\,d\check{x} \Bigg)\,d\hat{x}\,.$$

Beweis. (a) Es genügt zu zeigen: Ist $f \in T(\mathbb{R}^n)$, $f = \sum_{j=1}^m c_j \mathbf{1}_{[a^j,b^j]} = 0$, so gilt $\sum_{j=1}^m c_j \operatorname{vol}_n [a^j,b^j] = 0$. Dies wird mit Induktion gezeigt.

Für $n=1$ können wir die Menge $\{a^j, b^j\,;\ j=1,\dots,m\}$ als $\{x^k\,;\ k=0,\dots,l\}$ schreiben, mit $x^0 < x^1 < \dots < x^l$. Für $k \in \{1,\dots,l\}$ gilt

$$\sum_{j\in\{1,\dots,m\},\ [a^j,b^j]\supseteq[x^{k-1},x^k]} c_j = 0\,,$$

wegen $f=0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= \sum_{j=1}^m c_j(b^j - a^j) = \sum_{j=1}^m c_j \sum_{k\in\{1,\dots,l\},\ [x^{k-1},x^k]\subseteq[a^j,b^j]} (x^k - x^{k-1}) \\
&= \sum_{j=1,\dots,m,\ k=1,\dots,l,\ [x^{k-1},x^k]\subseteq[a^j,b^j]} c_j(x^k - x^{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^l (x^k - x^{k-1}) \sum_{j\in\{1,\dots,m\},\ [a^j,b^j]\supseteq[x^{k-1},x^k]} c_j = 0\,.
\end{aligned}$$

Sei $n \geqslant 2$, und die Aussage sei für $1, \dots, n-1$ bewiesen. Sei $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Für $\check{x} \in \mathbb{R}^k$ ist die Treppenfunktion

$$f(\check{x}, \,\cdot\,) = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{1}_{[\check{a^j}, \check{b^j}]}(\check{x}) \mathbf{1}_{[\hat{a^j}, \hat{b^j}]}$$

die Nullfunktion, und nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{1}_{[\check{a^j}, \check{b^j}]}(\check{x}) \operatorname{vol}_{n-k}\big([\hat{a^j}, \hat{b^j}]\big) = 0\,.$$

Also ist die Treppenfunktion

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \operatorname{vol}_{n-k}[\hat{a^j}, \hat{b^j}]\, \mathbf{1}_{[\check{a^j}, \check{b^j}]}$$

die Nullfunktion, und nochmals nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \operatorname{vol}_{n-k}[\hat{a^j}, \hat{b^j}] \operatorname{vol}_k[\check{a^j}, \check{b^j}] = 0\,.$$

Wegen $\operatorname{vol}_{d-k}[\hat{a^j}, \hat{b^j}] \operatorname{vol}_k[\check{a^j}, \check{b^j}] = \operatorname{vol}_n[a^j, b^j]$ $(j = 1, \dots, m)$ ist dies die Behauptung.

(b) ist klar nach Definition.

(c) Wegen der Linearität des Integrales genügt es, die Behauptung für $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ zu beweisen. Es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_{[a,b]}(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x} = \operatorname{vol}_k[\check{a}, \check{b}]\, \mathbf{1}_{[\hat{a}, \hat{b}]}(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k})\,,$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_{[a,b]}(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x}\, d\hat{x} &= \operatorname{vol}_k[\check{a}, \check{b}] \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathbf{1}_{[\hat{a}, \hat{b}]}(\hat{x})\, d\hat{x} \\ &= \operatorname{vol}_k[\check{a}, \check{b}] \operatorname{vol}_{n-k}[\hat{a}, \hat{b}] = \operatorname{vol}_n[a,b] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\, dx\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Bemerkungen. (a) In der Situation von Satz 1.1.1(c) ist offenbar auch

$$\mathbb{R}^k \ni \check{x} \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} f(\check{x}, \hat{x})\, d\hat{x}$$

eine Treppenfunktion, und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int\limits_{\check{x} \in \mathbb{R}^k} \left(\int\limits_{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}} f(\check{x}, \hat{x})\, d\hat{x} \right) d\check{x}\,.$$

(b) Die wiederholte Anwendung der Formel in Satz 1.1.1(c) ergibt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_{x_n\in\mathbb{R}} \cdots \int\limits_{x_1\in\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

(eindimensionale Integrale!). Dabei kann wegen der obigen Bemerkungung in Teil (a) die Reihenfolge beliebig permutiert werden. Diese Formel wird später für eine größere Menge von Funktionen bewiesen und dient dann der Berechnung mehrdimensionaler Integrale mit Hilfe eindimensionaler Integrationen.

(c) Die Formel in Satz 1.1.1(c) ist die Urform des Satzes von Fubini, der in Abschnitt 1.3 für Riemann-integrierbare Funktionen bewiesen wird.

(c) Für die Wohldefiniertheit des Integrals (Satz 1.1.1(a)) werden wir in Aufgabe **???** einen anderen Beweis skizzieren.

1.1.2 Folgerung (Positivität des Integrals)**.** *Aus* $f\in T(\mathbb{R}^n)$, $f\geqslant 0$ *(d. h.* $f(x)\geqslant 0$ *für alle* $x\in\mathbb{R}^n$*), folgt* $\int f(x)\,dx\geqslant 0$.

Beweis. Mit Induktion. Für $n=1$ ist die Aussage ist bekannt (und leicht zu zeigen). Angenommen, sie ist für $k=1,\dots,n-1$ bewiesen, so folgt mit zweimaliger Anwendung der Induktionsvoraussetzung

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_{\hat{x}\in\mathbb{R}^{n-1}} \Bigg(\int\limits_{\check{x}\in\mathbb{R}} f(\check{x},\hat{x})\,d\check{x}\Bigg)\,d\hat{x}\geqslant 0\,. \qquad \square$$

1.1.3 Bemerkungen. (a) Aus der Positivität und der Linearität des Integrales folgt die Monotonie: Sind $f,g\in T(\mathbb{R}^n)$, $f\leqslant g$ (d. h. $f(x)\leqslant g(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$), so gilt $\int f(x)\,dx\leqslant\int g(x)\,dx$.

(b) Man ist versucht, einen einfacheren Beweis von Folgerung 1.1.2 zu geben: Wenn aus $f\geqslant 0$ folgen würde, dass es eine Darstellung von f mit nichtnegativen Koeffizienten gibt, so wäre man sofort fertig. Dass ein solcher Beweis nicht möglich ist, zeigt Aufgabe **???**.

Für später **präzisieren ???** benötigen wir noch eine Eigenschaft von Treppenfunktionen. Sei X eine Menge. Für eine Funktion $f\colon X\to\mathbb{R}$ definieren wir den *Positivteil* $f^+\colon X\to[0,\infty)$ durch

$$f^+(x) := \max(f(x),0) \qquad (x\in X)\,,$$

den *Negativteil* $f^- := (-f)^+$ – man beachte, dass $f^-\geqslant 0$ ist – und den Betrag $|f| := f^+ + f^-$. Außerdem wird $f\wedge 1 = \min(f,1)\colon X\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f\wedge 1(x) := \min(f(x),1) \qquad (x\in X)\,.$$

Letzteres bedeutet anschaulich, dass die Funktion f bei 1 „nach oben abgeschnitten“ wird.

1.1.4 Satz. *Sei* $f \in T(\mathbb{R}^n)$. *Dann gilt* $f^{\pm}, f \wedge 1 \in T(\mathbb{R}^n)$.

Zum Beweis benötigen wir eine Hilfsaussage, die Techniken der nächsten Kapitel vorwegnimmt.

1.1.5 Lemma. *Sei*

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n\,;\ \mathbf{1}_A \in T(\mathbb{R}^n)\}\,.$$

Dann gilt: Sind $A, B \in \mathcal{A}$, *so folgt* $A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$ *(d. h.* $\mathcal{A}$ *ist ein Mengenring; siehe Abschnitt 2.2).*

Beweis. Die Funktionen $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B$ besitzen Darstellungen

$$\mathbf{1}_A = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{1}_{A_j}\,, \quad \mathbf{1}_B = \sum_{k=1}^{m} b_k \mathbf{1}_{B_k}\,,$$

wobei $m \in \mathbb{N}$, $a_j, b_k \in \mathbb{R}$, A_j, B_k n-dimensionale abgeschlossene Intervalle sind $(j, k = 1, \ldots, m)$. Es gilt

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \sum_{j,k=1}^{m} a_j b_k \mathbf{1}_{A_j \cap B_k}\,.$$

Da $A_j \cap B_k$ n-dimensionale abgeschlossene Intervalle sind $(j, k = 1, \ldots, m)$, folgt $\mathbf{1}_{A\cap B} \in T(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B} \in T(\mathbb{R}^n)\,,\\
&\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A\cap B} \in T(\mathbb{R}^n)\,.
\end{aligned}$$ □

Beweis von Satz 1.1.4. Sei $f = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{1}_{A_j}$, mit n-dimensionalen abgeschlossenen Intervallen $A_1, \ldots, A_m$. Für $\emptyset \neq J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ definieren wir

$$a_J := \sum_{j\in J} a_j\,, \qquad A_J := \Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) \setminus \Big(\bigcup_{j\in\{1,\ldots,m\}\setminus J} A_j\Big)\,.$$

Die Menge A_J liegt in dem in Lemma 1.1.5 definierten Mengensystem $\mathcal{A}$; sie besteht aus den Punkten, die für $j \in J$ in A_j liegen, aber nicht in A_j für $j \notin J$. Die Familie $(A_J)_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\ldots,m\}}$ ist eine disjunkte Überdeckung der Vereinigung $\bigcup_{j=1}^{m} A_j$. Es folgt

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\ldots,m\}} a_J \mathbf{1}_{A_J}\,,\\
f^+ &= \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\ldots,m\}} \max(a_J, 0)\mathbf{1}_{A_J} \in T(\mathbb{R}^n)\,,\\
f^- &= (-f)^+ \in T(\mathbb{R}^n)\,,\\
f \wedge 1 &= \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\ldots,m\}} \min(a_J, 1)\mathbf{1}_{A_J} \in T(\mathbb{R}^n)\,.
\end{aligned}$$ □

1.2 Das Riemann-Integral

In diesem Abschnitt erweitern wir die Menge der Funktionen, die wir integrieren können. Eines der Ziele ist es dabei, den Integralbegriff so allgemein zu machen, dass für genügend viele Teilmengen K von $\mathbb{R}^n$ das Volumen als

$$\mathrm{vol}_n K := \int \mathbf{1}_K(x)\,dx \qquad \mathrm{vol}_n K := \int \mathbf{1}_K(x)\,dx$$

bestimmt werden kann. Zum Beispiel soll für die Einheitskugel $K := B_{\mathbb{R}^n}[0,1]$ $(= \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leqslant 1\})$ ($|\cdot|$ euklidische Norm) (**Eukl. ???**) auf diese Weise das Volumen bestimmt sein, d. h. $\mathbf{1}_K$ soll Riemann-integrierbar sein.

Definition. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir definieren das *Oberintegral* von f,

$$\overline{\int} f(x)\,dx := \inf\Big\{ \int h(x)\,dx;\ h \in T(\mathbb{R}^n),\ h \geqslant f \Big\},$$

und das *Unterintegral*

$$\underline{\int} f(x)\,dx := \sup\Big\{ \int g(x)\,dx;\ g \in T(\mathbb{R}^n),\ g \leqslant f \Big\}.$$

Dabei seien $\overline{\int} f(x)\,dx := \infty$, falls es keine Funktion $h \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $h \geqslant f$ gibt, und $\underline{\int} f(x)\,dx := -\infty$, falls es keine Funktion $g \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $g \leqslant f$ gibt. Offenbar gilt $\underline{\int} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int} f(x)\,dx$. Schließlich heißt f *Riemann-integrierbar*, $f \in R(\mathbb{R}^n)$, wenn

$$-\infty < \underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx < \infty$$

gilt; dann heißt $\int f(x)\,dx := \overline{\int} f(x)\,dx$ $\left(= \underline{\int} f(x)\,dx\right)$ das *Riemann-Integral* von f.

Im Folgenden werden wir auch abkürzend die Bezeichnung $\overline{\int} f := \overline{\int} f(x)\,dx$ und die entsprechenden Bezeichnungen für Unterintegral und Integral verwenden.

Die Bedingung der Endlichkeit von Unter- und Oberintegral in der vorigen Definition kann man auch so formulieren: Es gibt $g, h \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $g \leqslant f \leqslant h$. Oder: f ist beschränkt, und es gibt $r > 0$, so dass $f(x) = 0$ ist für $|x| > r$.

1.2.1 Lemma. *Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $\underline{\int} f(x)\,dx = -\overline{\int}(-f)(x)\,dx$,

(b) $\overline{\int} cf(x)\,dx = c\,\overline{\int} f(x)\,dx$ *für alle* $c > 0$,

(c) $\overline{\int}(f+g)(x)\,dx \leqslant \overline{\int} f(x)\,dx + \overline{\int} g(x)\,dx$, *falls* $\overline{\int} f(x)\,dx, \overline{\int} g(x)\,dx < \infty$.

Beweis. (a) und (b) sind leicht zu zeigen.

(c) Sind $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$, $f \leqslant \varphi$, $g \leqslant \psi$, so gilt $\overline{\int}(f+g)(x)\,dx \leqslant \int \varphi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx$. Nimmt man auf der rechten Seite dieser Ungleichung zunächst das Infimum über alle zulässigen φ, dann das Infimum über alle zulässigen ψ, so erhält man die Behauptung. □

Wir bemerken die in Lemma 1.2.1 anzuwendenden „Rechenregeln" $c\,\infty = \infty$, $c(-\infty) = -\infty$ für $c > 0$, und $-\infty + a = a - \infty = -\infty$ für $-\infty \leqslant a < \infty$.

1.2.2 Satz. *Die Menge* $R(\mathbb{R}^n)$ *der Riemann-integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum, und die Abbildung*

$$R(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \int f(x)\,dx$$

ist linear und positiv.

Beweis. Seien $f, g \in R(\mathbb{R}^n)$, $c \in \mathbb{R}$.

Mit Lemma 1.2.1(a),(c) erhalten wir

$$\begin{aligned}&\overline{\int}(f+g) \leqslant \overline{\int} f + \overline{\int} g = \underline{\int} f + \underline{\int} g = -\big(\overline{\int}(-f) + \overline{\int}(-g)\big)\\ &\leqslant -\overline{\int}(-f-g) = \underline{\int}(f+g)\,.\end{aligned}$$

Daraus folgen die Endlichkeit aller Terme und die Gleichheit an allen Stellen dieser Ungleichungskette, somit $f + g \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int(f+g) = \int f + \int g\,.$$

Die Riemann-Integrierbarkeit von cf und die Gleichheit

$$\int cf = c\int f$$

sind klar für $c = 0$. Für $c > 0$ folgt dies aus der mit Lemma 1.2.1(a),(b) erhaltenen Gleichungskette

$$\overline{\int} cf = c\,\overline{\int} f = c\underline{\int} f = -c\,\overline{\int}(-f) = -\overline{\int}(-cf) = \underline{\int} cf\,.$$

Aus Lemma 1.2.1(a) folgt $\overline{\int}(-f) = -\underline{\int} f = -\overline{\int} f = -\underline{\int} f \in \mathbb{R}$, also $-f \in R(\mathbb{R}^n)$, $\int(-f) = -\int f$. Für $c < 0$ folgt die Behauptung nun aus $cf = (-c)(-f)$ und dem soeben Bewiesenen. **Oder ???:** Die Riemann-Integrierbarkeit von cf und die Gleichheit $\int cf = c\int f$ werden mit den Fallunterscheidungen $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$ und Lemma 1.2.1(b) bewiesen.

Die Positivität ist klar: Ist $f \in R(\mathbb{R}^n)$, $f \geqslant 0$, so gilt mit der Treppenfunktion $g := 0$ die Ungleichung $0 = \int g \leqslant \underline{\int} f = \int f$. □

1.2.3 Bemerkung. Die Positivität des Integrals hat die Monotonie zur Folge (siehe Bemerkung 1.1.3(a)), und aus dieser folgt: Ist $f \in R(\mathbb{R}^n)$, $f \leqslant C$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leqslant b$, und $f(x) = 0$ für $x \notin [a, b]$, d. h. $f \leqslant C\mathbf{1}_{[a,b]}$, dann gilt

$$\int f(x)\,dx \leqslant C \operatorname{vol}_n([a, b])\,.$$

Der folgende Satz charakterisiert Riemann-Integrierbarkeit auf verschiedene Weise.

1.2.4 Satz. (Riemann'sches Integrierbarkeitskriterium???) *Sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) $f \in R(\mathbb{R}^n)$*;*

(b) *Für alle* $\varepsilon > 0$ *gibt es* $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, *so dass* $\int(\psi - \varphi)(x)\,dx < \varepsilon$*;*

(c) *Für alle* $\varepsilon > 0$ *gibt es* $g, h \in R(\mathbb{R}^n)$, $g \leqslant f \leqslant h$, *so dass* $\int(h-g)(x)\,dx < \varepsilon$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b). Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition von Unter- und Oberintegral gibt es $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, so dass

$$\underline{\int} f - \tfrac{\varepsilon}{2} < \int \varphi\,, \qquad \int \psi < \overline{\int} f + \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Aus $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ folgt $\int \psi - \int \varphi < \varepsilon$.

(b) $\Rightarrow$ (c) ist trivial wegen $T(\mathbb{R}^n) \subseteq R(\mathbb{R}^n)$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Sei $\varepsilon > 0$, und dazu $g, h \in R(\mathbb{R}^n)$ wie in (c). Dann

$$\int g \leqslant \underline{\int} f \leqslant \overline{\int} f \leqslant \int h < \int g + \varepsilon\,,$$

daher $\overline{\int} f - \underline{\int} f < \varepsilon$. Damit $\overline{\int} f = \underline{\int} f$. □

Bedeutung des folg. Satzes! umgestellt

1.2.5 Satz. *Seien* $f, g \in R(\mathbb{R}^n)$. *Dann sind* $f^{\pm}, |f|, f \wedge 1, fg$ *Riemann-integrierbar. Außerdem gilt die fundamentale Ungleichung*

$$\left|\int f(x)\,dx\right| \leqslant \int |f(x)|\,dx\,.$$

Beweis. Für f^+: Sei $\varepsilon > 0$. Es existieren $g, h \in T(\mathbb{R}^n)$, $g \leqslant f \leqslant h$, so dass $\int(h-g) < \varepsilon$. Aus Satz 1.1.4 folgt $g^+, h^+ \in T(\mathbb{R}^n)$, und es gilt $g^+ \leqslant f^+ \leqslant h^+$, $h^+ - g^+ \leqslant h - g$, $\int(h^+ - g^+) \leqslant \int(h-g) < \varepsilon$. Nach Satz 1.2.4 gilt $f^+ \in R(\mathbb{R}^n)$.

Daraus folgt sofort $f^- = (-f)^+ \in R(\mathbb{R}^n)$, $|f| = f^+ + f^- \in R(\mathbb{R}^n)$.

Für $f \wedge 1$: Seien $\varepsilon > 0, g, h$ wie oben. Aus Satz 1.1.4 folgt $f \wedge 1, g \wedge 1 \in T(\mathbb{R}^n)$, und es gilt $g \wedge 1 \leqslant f \wedge 1 \leqslant h \wedge 1$, $h \wedge 1 - g \wedge 1 \leqslant h - g$, $\int(h \wedge 1 - g \wedge 1) \leqslant \int(h-g) < \varepsilon$. Wie oben gilt daher $f \wedge 1 \in R(\mathbb{R}^n)$.

Für fg: Ohne Einschränkung nehmen wir $0 \leqslant f \leqslant 1$, $0 \leqslant g \leqslant 1$ an. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.2.4 gibt es $f_1, f_2, g_1, g_2 \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$, $\int(f_2 - f_1) < \varepsilon$, $g_1 \leqslant g \leqslant g_2$, $\int(g_2 - g_1) < \varepsilon$. Wegen Satz 1.1.4 können wir zusätzlich ohne Einschränkung $0 \leqslant f_1, g_1$ und $f_2, g_2 \leqslant 1$ annehmen. Dann gilt $f_1 g_1, f_2 g_2 \in T(\mathbb{R}^n)$, $f_1 g_1 \leqslant fg \leqslant f_2 g_2$,

$$\int(f_2 g_2 - f_1 g_1) = \int(f_2 - f_1) g_2 + \int f_1(g_2 - g_1) \leqslant \int(f_2 - f_1) + \int(g_2 - g_1) < 2\varepsilon\,.$$

Damit folgt die Riemann-Integrierbarkeit von fg.

Nun zur behaupteten Ungleichung: Aus $\pm f \leqslant |f|$ folgt $\pm \int f \leqslant \int |f|$. □

Als konkrete Beispiele Riemann-integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, für $n \geqslant 2$, kennen wir bisher nur die Treppenfunktionen. Der nächste Satz dient dazu, eine ganze Klasse von weiteren Beispielen vorzustellen.

1.2.6 Satz. *Seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leqslant b$, $f|_{[a,b]}$ stetig, $f|_{\mathbb{R}^n \setminus [a,b]} = 0$. Dann ist f Riemann-integrierbar.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da die Menge $[a, b]$ kompakt ist, findet man eine (endliche!) Überdeckung von $[a, b]$ durch n-dimensionale abgeschlossene Intervalle $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_m \subseteq [a, b]$, so dass für $j = 1, \ldots, m$, $x, y \in \tilde{Q}_j$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ gilt. Wir disjunktisieren, $Q_1 := \tilde{Q}_1$, $Q_2 := \tilde{Q}_2 \setminus \tilde{Q}_1, \ldots, Q_j := \tilde{Q}_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} \tilde{Q}_k, \ldots$, und nehmen ohne Einschränkung an, dass alle Q_j nichtleer sind. Für $j = 1, \ldots, m$, $x, y \in Q_j$ gilt dann $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Mit Lemma 1.1.5 folgt

$$\varphi := \sum_{j=1}^{m} \Big(\inf_{x \in Q_j} f(x)\Big) \mathbf{1}_{Q_j} \in T(\mathbb{R}^n)\,, \quad \psi := \sum_{j=1}^{m} \Big(\sup_{y \in Q_j} f(y)\Big) \mathbf{1}_{Q_j} \in T(\mathbb{R}^n)\,,$$

und es gilt $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon\, \mathbf{1}_{[a,b,]}$, $\int(\psi - \varphi)(x)\, dx \leqslant \varepsilon \operatorname{vol}_n([a, b])$. Aus Satz 1.2.4 folgt $f \in R(\mathbb{R}^n)$. □

Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Mit

$$C(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\,;\ f \text{ stetig}\}$$

bezeichnen wir den Vektorraum der auf Ω stetigen Funktionen. Für $f \in C(\Omega)$ definieren wir den *Träger* (englisch *support*) von f,

$$\operatorname{spt} f := \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}^{\Omega}\,,$$

und wir bezeichnen mit

$$C_c(\Omega) := \{f \in C(\Omega)\,;\ \operatorname{spt} f \text{ kompakt}\}$$

den Vektorraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω.

Setzen wir eine Funktion $f \in C_c(\Omega)$ durch Null auf $\mathbb{R}^n$ fort, dann gilt $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. In diesem Sinn ist die Mengeninklusion $C_c(\Omega) \subseteq C_c(\mathbb{R}^n)$ zu verstehen.

Mit obiger Bezeichnung ist die folgende Behauptung eine unmittelbare Konsequenz von Satz 1.2.6.

1.2.7 Folgerung. *$C_c(\mathbb{R}^n) \subseteq R(\mathbb{R}^n)$.*

Im folgenden Satz wird klar gemacht, dass die Kenntnis des Integrals von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger hinreicht, um die Riemann-integrierbaren Funktionen zu charakterisieren und deren Integral zu berechnen. Eine besonders wichtige Anwendung dieser Tatsache wird der Beweis der Transformationsformel für Riemann-integrierbare Funktionen sein; siehe Satz 1.4.3.

1.2.8 Satz. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\bar{\int} f(x)\,dx = \inf\Big\{ \int \psi(x)\,dx\,;\ \psi \in C_c(\mathbb{R}^n),\ \psi \geqslant f \Big\}\,,$$

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \sup\Big\{ \int \varphi(x)\,dx\,;\ \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n),\ \varphi \leqslant f \Big\}\,.$$

Ist f Riemann-integrierbar, $\varepsilon > 0$, so gibt es Funktionen $\varphi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, $\int (\psi - \varphi)(x)\,dx < \varepsilon$.

Für den Beweis dieser Aussage benötigen wir das folgende Hilfsmittel.

1.2.9 Lemma. *Sei $f \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, so dass $\int (\psi(x) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon$.*

Beweis. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir die Abstandsfunktion $d(\,\cdot\,, A)\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$,

$$d(x, A) := \inf\{|x - y|\,;\ y \in A\}\,.$$

Im ersten Schritt beweisen wir die Behauptung für den Fall, dass $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$, mit $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leqslant b$, ist. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$\varphi(x) := \min\Big\{\frac{1}{\varepsilon} d(x, \mathbb{R}^n \setminus [a,b]), 1\Big\}\,, \quad \psi(x) := \max\Big\{1 - \frac{1}{\varepsilon} d(x, [a,b]), 0\Big\}\,.$$

Dann sind $\varphi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \leqslant \mathbf{1}_{[a,b]} \leqslant \psi$. Außerdem gilt $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant 1$, $\psi(x) - \varphi(x) = 0$, falls $d(x,[a,b]) \geqslant \delta$ oder $d(x, \mathbb{R}^n \setminus [a,b]) \geqslant \delta$ ist, und mit $L := \max\{b_j - a_j\,;\ j = 1,\ldots,n\}$ erhalten wir $\int (\psi(x) - \varphi(x))\,dx \leqslant 4n\varepsilon L^{n-1}$. Damit ist die Behauptung für diesen Fall gezeigt.

Der allgemeine Fall folgt leicht daraus, dass f Linearkombination von Funktionen ist, für die die Behauptung schon gezeigt ist. □

Beweis von Satz 1.2.8. Aus der (evidenten) Monotonie des Oberintegrals und $C_c(\mathbb{R}^n) \subseteq R(\mathbb{R}^n)$ folgt unmittelbar „$\leqslant$“ in der ersten Gleichung. Ist andererseits $h \in T(\mathbb{R}^n)$, $h \geqslant f$, $\varepsilon > 0$, so gibt es $\psi \geqslant h$ mit $\int(\psi - h) \leqslant \varepsilon$, nach Lemma 1.2.9. Damit folgt „$\geqslant$“.

Die zweite Gleichung folgt aus der ersten und $\underline{\int} f = -\overline{\int}(-f)$.

Die letzte Behauptung folgt wie im Beweis von Satz 1.2.4, (a) $\Rightarrow$ (b). $\square$

Mit Hilfe des Riemann-Integrals kann man gewissen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ein Volumen zuordnen. Dies ist unser letztes Thema in diesem Abschnitt.

Definition. Eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-messbar*, wenn $\mathbf{1}_B$ Riemann-integrierbar ist. Die Zahl $\mathrm{vol}_n(B) := \int \mathbf{1}_B(x)\,dx$ heißt dann *n-dimensionales Volumen* (oder *Jordan-Inhalt*) von B. Die Menge B heißt *Jordan-Nullmenge*, wenn B Jordan-messbar mit $\mathrm{vol}_n(B) = 0$ ist.

Ist B Jordan-messbar und $f \in R(\mathbb{R}^n)$, so ist $\mathbf{1}_B f \in R(\mathbb{R}^n)$, nach Satz 1.2.5. Wir schreiben

$$\int_B f(x)\,dx := \int (\mathbf{1}_B f)(x)\,dx\,.$$

Ebenso: Ist $f\colon B \to \mathbb{R}$ so, dass $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in B\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist, so wird auch

$$\int_B f(x)\,dx := \int (\mathbf{1}_B \tilde{f})(x)\,dx$$

geschrieben.

1.2.10 Bemerkung. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Dann sind $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ Jordan-messbar (d. h. das System der Jordan-messbaren Mengen ist ein Mengenring; siehe Abschnitt **???**).

Für $A \cap B$ folgt dies wegen $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ und Satz 1.2.5. Für die weiteren Eigenschaften benutzt man (vgl. den Beweis von Lemma 1.1.5)

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}\,, \quad \mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A\cap B}\,.$$

1.2.11 Lemma. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:*

(α) *A ist Jordan-messbar.*

(β) *A ist beschränkt, und ∂A ist eine Jordan-Nullmenge.*

Beweis. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ Die Beschränktheit von A ist klar. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.2.8 gibt es $\varphi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \leqslant \mathbf{1}_A \leqslant \psi$, $\int(\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$. Dann ist aber $\varphi \leqslant 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus A$, und wegen der Stetigkeit von φ gilt dies auch auf $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A) = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}\, A$. Entsprechend folgt $\psi \geqslant 1$ auf $\mathrm{cl}\, A$. Damit ist gezeigt, dass $\psi - \varphi \geqslant \mathbf{1}_{\partial A}$ gilt, und aus Satz 1.2.4 folgt, dass ∂A eine Jordan-Nullmenge ist.

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.2.8 gibt es $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leqslant \mathbf{1}_{\partial A} \leqslant \varphi$, $\int \varphi < \varepsilon$. Dann ist $U := \{x \in \mathbb{R}^n ;\, 2\varphi(x) > 1\}$ eine offene Menge, $U \supseteq \partial A$, und daher $\delta := d(\partial A, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0$ (Abstand irgendwo definieren???). Sei $\psi_2(x) = (1 - \frac{1}{\delta} d(x, A)) \vee 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, $\psi_1 := \psi_2 - 2\varphi$. Dann gilt $\psi_1, \psi_2 \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\psi_1 \leqslant \mathbf{1}_A \leqslant \psi_2$, $\int(\psi_2 - \psi_1) = \int 2\varphi < 2\varepsilon$. Mit Satz 1.2.4, (c) $\Rightarrow$ (a) folgt $\mathbf{1}_A \in R(\mathbb{R}^n)$. $\square$

??? Für weitere Eigenschaften Jordan-messbarer Mengen verweisen wir auf die Aufgaben. **??? und folgender Abschnitt!**

Oder: Im folgenden Abschnitt werden wir Methoden angeben, die Jordan-Messbarkeit von Mengen zu erkennen.

Oder: Gar nichts???

1.3 Satz von Fubini, Berechnung von Integralen

Bisher haben wir noch keine Berechnungsmöglichkeit für n-dimensionale Integrale, für $n \geqslant 2$, kennengelernt. Für $n = 1$ ist ja die Hauptmethode das Suchen einer Stammfunktion und die Benutzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Mit Hilfe des folgenden Satzes wird die Berechnung n-dimensionaler Integrale auf die wiederholte Berechnung eindimensionaler Integrale zurückgeführt.

1.3.1 Satz. (Satz von Fubini) *Sei $f \in R(\mathbb{R}^n)$, und sei $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Dann ist die Funktion*

$$\mathbb{R}^{n-k} \ni \hat{x} \mapsto \overline{\int_{\mathbb{R}^k}} f(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x}$$

Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int f(x)\, dx = \int_{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}} \Bigg(\overline{\int_{\check{x} \in \mathbb{R}^k}} f(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x} \Bigg) d\hat{x}\,.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $g, h \in T(\mathbb{R}^n)$, $g \leqslant f \leqslant h$, so dass $\int(h - g) \leqslant \varepsilon$.

Für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ gilt

$$g(\,\cdot\,, \hat{x}) \leqslant f(\,\cdot\,, \hat{x}) \leqslant h(\,\cdot\,, \hat{x})\,,$$

daher

$$\int_{\mathbb{R}^k} g(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x} \leqslant \overline{\int_{\mathbb{R}^k}} f(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x} \leqslant \int_{\mathbb{R}^k} h(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x}\,.$$

Wir bezeichnen im Folgenden die in der letzten Ungleichung stehenden Funktionen mit $g_2(\hat{x}), f_2(\hat{x}), h_2(\hat{x})$. Nach Satz 1.1.1 sind $g_2, h_2 \in T(\mathbb{R}^{n-k})$, und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} (h_2(\hat{x}) - g_2(\hat{x}))\, d\hat{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (h(x) - g(x))\, dx < \varepsilon\,.$$

Aus Satz 1.2.4 folgt $f_2 \in R(\mathbb{R}^{n-k})$.

Aus den Ungleichungen (wie beide zentrieren **???**)

$$\int g(x)\, dx \leqslant \int f(x)\, dx \leqslant \int h(x)\, dx\,,$$
$$\int g(x)\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} f_2(\hat{x})\, d\hat{x} \leqslant \int h(x)\, dx$$

folgt außerdem

$$\Big|\int f(x)\, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} f_2(\hat{x})\, d\hat{x}\Big| \leqslant \int (h(x) - g(x))\, dx < \varepsilon\,.$$

Damit ist $\int f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_2(\hat{x})\, d\hat{x}$. □

Bemerkungen. (a) Wendet man Satz 1.3.1 auf $-f$ an, so erhält man die gleiche Behauptung, jedoch mit den Unterintegralen statt den Oberintegralen. Daraus folgt insbesondere

$$\int\limits_{\hat{x}\in\mathbb{R}^{n-k}} \Bigg(\overline{\int\limits_{\check{x}\in\mathbb{R}^k}} f(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x} - \underline{\int\limits_{\check{x}\in\mathbb{R}^k}} f(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x} \Bigg) d\hat{x} = 0\,.$$

Die in Klammern stehende Funktion ist also eine nichtnegative Riemann-integrierbare Funktion mit verschwindendem Integral. Wir werden später sehen, dass daher die Menge der Punkte, auf denen diese Funktion ungleich Null ist, in gewissem Sinn „klein“ ist, nämlich eine Lebesgue-Nullmenge; vgl. **???**.

(b) Einfache Beispiele zeigen, dass auf die „Vorsichtsmaßnahme“, im Satz von Fubini im inneren Integral das Oberintegral zu nehmen, nicht verzichtet werden kann; siehe Aufgabe ???

1.3.2 Folgerung. *Sei* $f \in R(\mathbb{R}^n)$. *Dann gilt*

$$\int f(x)\, dx = \int\limits_{x_n\in\mathbb{R}} \overline{\int\limits_{x_{n-1}\in\mathbb{R}}} \cdots \overline{\int\limits_{x_1\in\mathbb{R}}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_{n-1}\, dx_n\,.$$

Die Reihenfolge dieses iterierten Integrales kann dabei beliebig permutiert werden.

Beweis. Durch wiederholte Anwendung von Satz 1.3.1 mit $k = 1$ erhält man sofort die erste Aussage.

Die „evidente“ zweite Aussage wollen wir weder streng mathematisch formulieren noch beweisen. $\square$

1.3.3 Folgerung (Prinzip von Cavalieri)**.** *Seien* $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *Jordan-messbar. Sei* $1 \leqslant k \leqslant n-1$*, und für alle* $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ *seien die Schnittmengen*

$$A_{\hat{x}} := \{\check{x} \in \mathbb{R}^k\,;\ (\check{x}, \hat{x}) \in A\}\,, \quad B_{\hat{x}} := \{\check{x} \in \mathbb{R}^k\,;\ (\check{x}, \hat{x}) \in B\}$$

Jordan-messbar, und es gelte $\operatorname{vol}_k(A_{\hat{x}}) = \operatorname{vol}_k(B_{\hat{x}})$*.*

Dann gilt $\operatorname{vol}_n A = \operatorname{vol}_n B$*.*

(ein Bild **???**)

Beweis. Für $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ gilt $\mathbf{1}_A(\,\cdot\,, \hat{x}) = \mathbf{1}_{A_{\hat{x}}}$, $\mathbf{1}_B(\,\cdot\,, \hat{x}) = \mathbf{1}_{B_{\hat{x}}}$. Aus dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}_n A &= \int \mathbf{1}_A(x)\,dx = \int\limits_{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}} \int\limits_{\check{x} \in \mathbb{R}^k} \mathbf{1}_A(\check{x}, \hat{x})\,d\check{x}\,d\hat{x} = \int\limits_{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}} \operatorname{vol}_k(A_{\hat{x}})\,d\hat{x} \\
&= \int\limits_{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}} \operatorname{vol}_k(B_{\hat{x}})\,d\hat{x} = \int\limits_{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}} \int\limits_{\check{x} \in \mathbb{R}^k} \mathbf{1}_B(\check{x}, \hat{x})\,d\check{x}\,d\hat{x} = \int \mathbf{1}_B(x)\,dx \\
&= \operatorname{vol}_n B\,.
\end{aligned}$$

$\square$

1.3.4 Beispiel. Volumen eines abgeschnittenen Drehparaboloids.

Sei

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2\}\,.$$

Aus dem später bewiesenen Satz **???** wird folgen, dass B Jordan-messbar ist. Die Anwendung von Folgerung 1.3.2 ergibt

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}_3 B &= \int \mathbf{1}_B(x, y, z)\,d(x, y, z) \\
&= \int\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}} \int\limits_{0 \leqslant z \leqslant 1-x^2-y^2} 1\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \Big((1 - x^2)y - \frac{1}{3}y^3\Big)\Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \frac{8}{3} \int_0^1 (1 - x^2)^{3/2}\,dx
\end{aligned}$$

(Variablensubstitution $x = \cos t,\ dx = -\sin t\, dt$)

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \sin t\, dt$$

$(\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t),\ \sin^4 t = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t))$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)\, dt = \frac{2}{3}\Big(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Bei einer anderen Integrationsreihenfolge vereinfacht sich die Rechnung:

$$\operatorname{vol}_3 B = \int \int \mathbf{1}_B(x, y, z)\, d(x, y)\, dz$$

$$\int\limits_{0 \leqslant z \leqslant 1} \int\limits_{x^2 + y^2 \leqslant 1 - z} 1\, d(x, y)\, dz$$

(Das innere Integral ist die Fläche eines Kreises mit Radius $\sqrt{1 - z}$, also gleich $\pi(\sqrt{1 - z}\,)^2$; siehe unten.)

$$= \int_0^1 \pi(1 - z)\, dz = \pi\Big(z - \frac{1}{2} z^2\Big)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

In der allgemeinen Situation von Satz 1.3.1 und Folgerung 1.3.2 müssen die inneren Integrale als Oberintegrale ausgewertet werden. Bei konkreten Anwendungen stellt sich heraus, ob diese Integrale als Riemann-Integrale existieren. Als nächstes beschreiben wir eine Situation, in der dies immer der Fall ist.

1.3.5 Satz. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leqslant b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *stetig,* $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. *Dann ist die Funktion*

$$[\hat{a}, \hat{b}] \ni \hat{x} \mapsto \int\limits_{[\check{a}, \check{b}]} f(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x}$$

stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| \leqslant \delta$. Sind $\hat{x}, \hat{y} \in [\hat{a}, \hat{b}]$, $|\hat{x} - \hat{y}| \leqslant \delta$, dann gilt $|(\check{x}, \hat{x}) - (\check{x}, \hat{y})| \leqslant \delta$ für alle $\check{x} \in [\check{a}, \check{b}]$, und aus Satz 1.2.5 und Bemerkung 1.2.3 folgt

$$\Big| \int\limits_{[\check{a}, \check{b}]} f(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x} - \int\limits_{[\check{a}, \check{b}]} f(\check{x}, \hat{y})\, d\check{x} \Big| \leqslant \int\limits_{[\check{a}, \check{b}]} |f(\check{x}, \hat{x}) - f(\check{x}, \hat{y})|\, d\check{x} \leqslant \varepsilon \operatorname{vol}_k([\check{a}, \check{b}])\,. \quad \square$$

Das Ziel der nächsten Aussage ist die Angabe einer Methode, die Jordan-Messbarkeit von Mengen zu erkennen.

1.3.6 Satz. *Seien* $f_1, f_2 \in R(\mathbb{R}^n)$, $f_1 \leqslant f_2$. *Dann ist die Menge*

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,;\, f_1(x) < y < f_2(x)\}$$

eine Jordan-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$, *und*

$$\operatorname{vol}_{n+1} B = \int (f_2(x) - f_1(x))\, dx.$$

Zum Beweis benötigen wir eine Vorbereitung.

1.3.7 Lemma. *Seien* $A_1 \subseteq \mathbb{R}^{k_1}$, $A_2 \subseteq \mathbb{R}^{k_2}$ *Jordan-messbar. Dann ist* $A_1 \times A_2$ *eine Jordan-messbare Teilmenge von* $\mathbb{R}^{k_1+k_2}$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Funktionen $g_1, h_1 \in T(\mathbb{R}^{k_1})$, $0 \leqslant g_1 \leqslant \mathbf{1}_{A_1} \leqslant h_1 \leqslant 1$, mit $\int (h_1(x) - g_1(x))\, dx < \varepsilon$. Entsprechend gibt es g_2, h_2 zu A_2. Wir definieren

$$\begin{aligned} g(x,y) &:= g_1(x) g_2(y)\,, \\ h(x,y) &:= h_1(x) h_2(y) \quad (x \in \mathbb{R}^{k_1},\, y \in \mathbb{R}^{k_2})\,. \end{aligned}$$

Dann gilt $g, h \in T(\mathbb{R}^{k_1+k_2})$,

$$\begin{aligned} & g(x,y) \leqslant \mathbf{1}_{A_1}(x)\mathbf{1}_{A_2}(y) = \mathbf{1}_{A_1 \times A_2}(x,y) \leqslant h(x,y) \quad (x \in \mathbb{R}^{k_1},\, y \in \mathbb{R}^{k_2})\,, \\ & \int \big(h(x,y) - g(x,y)\big)\, d(x,y) \\ & = \int \big(h_1(x) - g_1(x)\big) h_2(y)\, d(x,y) + \int g_1(x)\big(h_2(y) - g_2(y)\big)\, d(x,y) \\ & = \int \big(h_1(x) - g_1(x)\big)\, dx \int h_2(y)\, dy + \int g_1(x)\, dx \int \big(h_2(y) - g_2(y)\big)\, dy \\ & \leqslant \varepsilon(\operatorname{vol}_{k_2}(A_2) + \varepsilon) + \operatorname{vol}_{k_1}(A_1)\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Damit folgt $\mathbf{1}_{A_1 \times A_2} \in R(\mathbb{R}^{k_1+k_2})$. □

Beweis von Satz 1.3.6. (i) Sind $f_1, f_2 \in T(\mathbb{R}^n)$, so gilt die Behauptung.

Es gibt nämlich Jordan-messbare Mengen $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so dass

$$f_1 = \sum_{j=1}^{k} c_j' \mathbf{1}_{A_j}\,, \quad f_2 = \sum_{j=1}^{k} c_j'' \mathbf{1}_{A_j}\,.$$

(Für die Existenz dieser „gemeinsamen disjunkten Darstellung“ von f_1, f_2 verweisen wir auf den Beweis von Satz 1.1.4, wo nur die disjunkte Darstellung von

f_1 bzw. f_2 einzeln bewiesen wird. Bringt man die dabei auftretenden Mengen zum Schnitt, so erhält man die gewünschte Darstellung.) Nach Lemma 1.3.7 ist

$$B_j := \{(x,y)\,;\, x \in A_j,\, c_j' < y < c_j''\} = A_j \times (c_j', c_j'')$$

Jordan-messbar, für $j = 1, \dots, k$. Damit ist auch $B := \bigcup_{j=1}^k B_j$ Jordan-messbar; siehe Bemerkung 1.2.10.

Die Gleichung für $\mathrm{vol}_{n+1}(B)$ folgt aus dem Satz von Fubini (Satz 1.3.1).

(ii) allgemeiner Fall.

Sei $\varepsilon < 0$. Es gibt $g_1, h_1, g_2, h_2 \in T(\mathbb{R}^n)$, $g_j \leqslant f_j \leqslant h_j$, $\int (h_j - g_j) < \varepsilon$ $(j = 1, 2)$. Nach Teil (i) sind

$$\begin{aligned} B_{\mathrm{i}} &:= \{(x,y)\,;\, h_1(x) < y < g_2(x)\}\,, \\ B_{\mathrm{a}} &:= \{(x,y)\,;\, g_1(x) < y < h_2(x)\} \end{aligned}$$

Jordan-messbar, $B_{\mathrm{i}} \subseteq B \subseteq B_{\mathrm{a}}$ (d. h. $\mathbf{1}_{B_{\mathrm{i}}} \leqslant \mathbf{1}_B \leqslant \mathbf{1}_{B_{\mathrm{a}}}$), und es gilt

$$\begin{aligned} &\int \big(\mathbf{1}_{B_{\mathrm{a}}} - \mathbf{1}_{B_{\mathrm{i}}}\big) = \int (h_2 - g_1) - \int (g_2 - h_1)^+ \\ &\leqslant \int \big((h_2 - g_1) - (g_2 - h_1)\big) = \int (h_2 - g_2) + \int (h_1 - g_1) < 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Mit Satz 1.2.4 erhalten wir $\mathbf{1}_B \in R(\mathbb{R}^{n+1})$.

Die Gleichung für $\mathrm{vol}_{n+1}(B)$ folgt aus dem Satz von Fubini (Satz 1.3.1). □

!!! Hier noch zwei Beispiele: (a) Das Innere des in Beispiel 1.3.4 behandelten abgeschnittenen Drehparaboloids ist Jordan-messbar.

(b) Für $r > 0$ ist die offene Kugel $B_{\mathbb{R}^n}(0, r)$ Jordan-messbar.

1.3.8 Folgerung. *Seien $f \in R(\mathbb{R}^n)$, $c > 0$. Dann ist die Menge*

$$B := \{(x, f(x))\,;\, x \in \mathbb{R}^n,\, |x| < r\}$$

eine Jordan-Nullmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$B \subseteq B_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,;\, f(x) - \varepsilon \mathbf{1}_{B(0,r)} < y < f(x) + \varepsilon \mathbf{1}_{B(0,r)}\}\,,$$

und nach Satz 1.3.6 ist die letztere Menge Jordan-messbar mit Jordan-Inhalt

$$\mathrm{vol}_{n+1}(B_\varepsilon) = \int \big(f(x) + \varepsilon \mathbf{1}_{B(0,r)} - (f(x) - \varepsilon \mathbf{1}_{B(0,r)})\big)\, dx = 2\,\varepsilon \int \mathbf{1}_{B(0,r)}\, dx\,.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

!!! Hier die obigen zwei Beispiele nochmals aufnehmen: (a) Das abgeschlossene abgeschnittene Drehparaboloid ist auch Jordan-messbar (mit gleichen Volumen).

(b) Für $r > 0$ ist auch die abgeschlossene Kugel $B_{\mathbb{R}^n}[0,r]$ Jordan-messbar (mit gleichem Volumen).

(Dazu wird benötigt, dass Teilmengen von Jordan-Nullmengen wieder Jordan-Nullmengen sind.) Natürlich folgt dies auch mit Lemma 1.2.11.

Die folgende Bemerkung dient der Vorbereitung für die darauf folgende Berechnung des Volumens der Einheitskugel.

1.3.9 Bemerkung. Sei $f \in R(\mathbb{R}^n)$. Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist dann $f(\,\cdot\, - a) \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int f(x-a)\,dx = \int f(x)\,dx$$

(*Translationsinvarianz* des Riemann-Integrals).

Für $r > 0$ ist $f(r\,\cdot\,) \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int f(rx)\,dx = \frac{1}{r^n}\int f(x)\,dx$$

(*Homothetie-Verhalten* des Riemann-Integrals).

Diese Behauptungen sind klar für $f \in T(\mathbb{R}^n)$ und übertragen sich damit auf $R(\mathbb{R}^n)$. (Sie sind auch Spezialfälle der Transformationsformel; vgl. **???**.)

1.3.10 Beispiel. Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel,

$$\omega_n := \mathrm{vol}_n(B_{\mathbb{R}^n}(0,1))\,.$$

Dabei bezeichnen wir für $r > 0$ und $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$B_n(a,r) := B_{\mathbb{R}^n}(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\ |x-a| < r\}$$

die offene r-Kugel um a mit Radius r, und mit

$$B_n[a,r] := B_{\mathbb{R}^n}[a,r] := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\ |x| \leqslant r\}$$

die abgeschlossene Kugel.

!!! Die Jordan-Messbarkeit der offenen und abgeschlossenen Kugeln ist jetzt weiter oben schon erledigt. Deshalb entfällt der folgende Absatz; bzw. die hier stehenden Argumente gehören nach oben. Nach Satz 1.2.10 ist $B_n(0,1)$ eine Jordan-messbare Menge: Benutze die stetige Funktion $f_2\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x) := \begin{cases} \sqrt{1-|x|^2} & \text{für } |x| \leqslant 1\,, \\ 0 & \text{für } |x| > 1\,, \end{cases}$$

$f_1 := -f_2$. Wendet man zusätzlich Folgerung 1.3.8 (mehrmals!) an, so sieht man, dass auch $B_n[0,1]$ Jordan-messbar ist: Zum Beispiel sieht man, dass die Halbsphären $\{(\check{x},x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\,;\ |\check{x}| < 1,\ x_n = \pm\sqrt{1-|\check{x}|^2}\}$ Jordan-Nullmengen sind; entsprechend in den anderen Koordinatenrichtungen. Daraus folgt auch $\mathrm{vol}_n(B_n[0,1]) = \omega_n$. (Aufgabe **???**)

Für $r > 0$ gilt nach der vorangehenden Bemerkung

$$\mathrm{vol}_n(B_n(0,r)) = r^n \omega_n \,.$$

Wir wissen $\omega_1 = \mathrm{vol}_1(-1,1) = 2$.

Für $n > 1$ rechnen wir, unter Benutzung des Satzes von Fubini,

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \int\limits_{B_n(0,1)} 1\,dx = \int\limits_{x_n=-1}^{1} \int\limits_{|(x_1,\dots,x_{n-1})|^2<1-x_n^2} d(x_1,\dots,x_{n-1})\,dx_n \\
&= \int\limits_{t=-1}^{1} \omega_{n-1}\,\sqrt{1-t^2}^{\,n-1}\,dt = c_n\,\omega_{n-1}\,,
\end{aligned}$$

mit

$$c_n = \int\limits_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dt = \int\limits_{0}^{\pi} \sin^n s\,ds\,.$$

(Im letzten Integral wurde $t = \cos s$ substituiert.)

Es gilt $c_0 = \pi$, $c_1 = 2$, und für $n \geqslant 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_n &= \int\limits_0^\pi \sin^n s\,ds = -(\sin^{n-1} s \cos s)\Big|_0^\pi + (n-1)\int\limits_0^\pi \sin^{n-2} s\cos^2 s\,ds \\
&= 0 + (n-1)\int\limits_0^\pi \sin^{n-2} s\,ds - (n-1)\int\limits_0^\pi \sin^n s\,ds \\
&= (n-1)c_{n-2} - (n-1)c_n\,, \\
c_n &= \frac{n-1}{n}c_{n-2}\,, \\
c_2 &= \frac{1}{2}c_0\,, \quad \omega_2 = c_2\omega_1 = \pi\,.
\end{aligned}$$

Für die Berechnung von ω_n für $n \geqslant 3$ erweist sich eine Rekursion um jeweils zwei Dimensionen als günstig, und zwar wegen

$$\begin{aligned}
c_n c_{n-1} &= \frac{n-1}{n}c_{n-1}c_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}c_{n-2}c_{n-3} = \cdots = \\
&= \frac{1}{n}c_1 c_0 = \frac{2\pi}{n}\,.
\end{aligned}$$

Damit folgt nämlich

$$\omega_n = c_n\omega_{n-1} = c_n c_{n-1}\omega_{n-2} = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}\,.$$

Für geradzahliges $n = 2k$ folgt damit

$$\omega_{2k} = \frac{2\pi}{2k}\omega_{2(k-1)} = \cdots = \frac{\pi^{k-1}}{k!}\omega_2 = \frac{\pi^k}{k!}\,.$$

Für ungeradzahliges $n = 2k+1$ folgt

$$\omega_{2k+1} = \frac{2\pi}{2k+1}\omega_{2(k-1)+1} = \cdots = \frac{(2\pi)^k}{3\cdot 5\cdots(2k+1)}\omega_1 = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}\,.$$

Für $k = 1$ ergibt sich hier das bekannte Volumen $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$.

Eine einheitliche Schreibweise dieser Volumina ermöglicht die Gammafunktion, und zwar erhält man

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\,, \quad \text{für } n \geqslant 1\,.$$

Um aus den errechneten Werten bzw. aus den Rekursionsformeln diesen Ausdruck zu bekommen, benutzt man einerseits die Funktionalgleichung der Gammafunktion, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, andererseits den Wert $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (der weiter unten in Abschnitt **???** bewiesen wird). Es sei daran erinnert, dass die Gammafunktion durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\,, \quad \text{für } x > 0\,,$$

definiert wird. Wir werden später (siehe Abschnitt **???**) eine weitere Methode kennen lernen, mit der man den zuletzt angegebenen Ausdruck für ω_n in eleganter Weise erhält. (Damit jedoch diese elegante Rechnung möglich wird, ist es nötig, die Theorie weiter voranzutreiben.)

Es sei weiterhin daran erinnert, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichheit $\Gamma(n+1) = n!$ gilt. Interpretiert man, für beliebige $a > -1$ das Symbol $a!$ als $\Gamma(a+1)$, so erhält man für das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel die griffige Formel

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}\,.$$

1.4 Die Transformationsformel für n-dimensionale Integrale

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir erinnern daran, dass $\Phi\colon U \to V$ *Diffeomorphismus* heißt, falls Φ bijektiv ist und Φ sowie Φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

1.4.1 Satz (Urform der Transformationsformel)**.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt für alle $f \in C_c(V)$ die Gleichheit*

$$\int\limits_V f(y)\,dy = \int\limits_U f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|\,dx\,. \tag{1.4.1}$$

(Hier ist $\Phi'(x)$ die Jacobi-Matrix von Φ in x, auch geschrieben als $J_\Phi(x)$.)

Wir wollen kurz begründen, warum wir diese Form als „Urform“ der Transformationsformel bezeichnen. Die Methode besteht darin, diese Formel zunächst für eine möglichst einfache Menge von Funktionen auszusprechen. Der Versuch, $f \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{spt} f \subseteq V$ zu nehmen, läge nahe; jedoch ist in diesem Fall $f \circ \Phi$ keine Treppenfunktion mehr, und man müsste überhaupt erst zeigen, dass $f \circ \Phi$ integrierbar ist. Die Menge $C_c(V)$ hat den Vorteil, dass sie sich bei Komposition mit Φ gerade in $C_c(U)$ transformiert; siehe dazu die folgende Bemerkung 1.4.2(a). Außerdem ist sie groß genug, in dem Sinn, dass man die Transformationsformel unmittelbar auf Riemann-integrierbare Funktionen, später sogar auf Lebesgue-integrierbare Funktionen übertragen kann.

1.4.2 Bemerkungen. (a) Für $f \in C_c(V)$ ist $f \circ \Phi \in C_c(U)$: Da $K := \operatorname{spt} f \subseteq V$ kompakt ist, ist $\Phi^{-1}(K) \subseteq U$ kompakt. Für $x \in U \setminus \Phi^{-1}(K)$ ist $\Phi(x) \notin K$, $f(\Phi(x)) = 0$, und somit

$$\operatorname{spt}(f \circ \Phi) \subseteq \Phi^{-1}(K)\,.$$

(b) Für $n = 1$ folgt der Satz aus der Substitutionsregel: Sei $\Phi\colon (a,b) \to (a',b')$ ein Diffeomorphismus. Ist z. B. Φ monoton fallend, so gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{(a',b')} f(y)\,dy &= -\int\limits_{b'}^{a'} f(y)\,dy = -\int\limits_a^b f(\Phi(x))\Phi'(x)\,dx \\ &= \int\limits_{(a,b)} f(\Phi(x))|\Phi'(x)|\,dx\,.\end{aligned}$$

Dies erläutert auch den Betrag bei der Determinante.

(c) Ist $a \in \mathbb{R}^n$, $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\Phi(x) := x - a$, dann gilt $\Phi'(x) = E_n$ (Einheitsmatrix), $\det \Phi'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Die Transformationsformel ergibt

$$\int f(y)\,dy = \int f(x-a)\,dx\,.$$

Ist $r > 0$, $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\Phi(x) := rx$, dann gilt $\Phi'(x) = rE_n$, $\det \Phi'(x) = r^n$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, und Satz 1.4.1 ergibt

$$\int f(y)\,dy = r^n \int f(rx)\,dx\,.$$

(Vgl. Bemerkung 1.3.9.)

(d) $|\det \Phi'(x)|$ soll man sich als „Verzerrungsfaktor“ vorstellen. Ist z. B. U „klein“ und V „groß“ (siehe Skizze ???), dann wird $|\det \Phi'(x)|$ „groß“ sein. Deshalb ist es nötig, $f \circ \Phi$ aufzumultiplizieren (mit $|\det \Phi'(x)|$), damit die Integrale gleich werden.

Den Beweis der Transformationsformel verschieben wir auf den nächsten Abschnitt. Hier sollen zunächst einige Anwendungen der Transformationsformel vorgestellt werden.

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, $f \in R(U)$, falls es eine kompakte Menge $K \subseteq U$ mit $f|_{U \setminus K} = 0$ gibt, und außerdem $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in U\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}^n$ ist; wir schreiben $\int_U f(x)\,dx := \int \tilde{f}(x)\,dx$.

Für eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
(a) $f \in R(U)$.
(b) $\infty < \sup\{\int \varphi;\ \varphi \in C_c(U),\ \varphi \leqslant f\} = \inf\{\int \psi;\ \psi \in C_c(U),\ f \leqslant \psi\} < \infty$.
(c) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\varphi, \psi \in C_c(U)$ mit $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, $\int(\psi - \varphi) < \varepsilon$.
Der Beweis dieser Äquivalenzen erfolgt mit Hilfe von Aufgabe ???; dazu wird noch benutzt, dass es für jede kompakte Menge $K \subseteq U$ eine Funktion $\chi \in C_c(U)$ mit den Eigenschaften $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\chi|_K = 1$ gibt; siehe Aufgabe ???.

1.4.3 Folgerung. (Transformationsformel für Riemann-integrierbare Funktionen) *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus, $f\colon V \to \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar auf V, wenn $f \circ \Phi\,|\det \Phi'|$ Riemann-integrierbar auf U ist, und in diesem Fall gilt*

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\Phi(x))\,|\det \Phi'(x)|\,dx\,.$$

Beweis. Für $\psi\colon V \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \psi \in C_c(V) &\iff \psi \circ \Phi \in C_c(U)\,, \\ f \leqslant \psi &\iff f \circ \Phi \leqslant \psi \circ \Phi\,. \end{aligned}$$

Damit folgt, unter Benutzung von Satz 1.4.1,

$$\overline{\int} f(y)\,dy = \inf\Big\{\int \psi(y)\,dy\,;\ \psi \in C_c(V),\ \psi \geqslant f\Big\}$$

Größe der Integrale in Ordnung???

$$\begin{aligned}
&= \inf\Big\{\int \psi\circ\Phi(x)\,|\det\Phi'(x)|\,dx\,;\ \psi\in C_c(V),\ \psi\geqslant f\Big\}\\
&= \inf\Big\{\int \tilde\psi(x)\,dx\,;\ \tilde\psi\in C_c(U),\ \tilde\psi\geqslant f\circ\Phi\,|\det\Phi'|\Big\}\\
&= \overline{\int_U} f\circ\Phi(x)\,|\det\Phi'(x)|\,dx\,.
\end{aligned}$$

Entsprechend zeigt man die Gleichheit der Unterintegrale. □

1.4.4 Beispiel. **Polarkoordinaten.**
Die Abbildung

$$\Phi\colon U\to V\,,\qquad \Phi(r,\varphi):=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix},$$

mit

$$U:=(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\,,\qquad V:=\mathbb{R}^2\setminus\big((-\infty,0]\times\{0\}\big),$$

ist ein Diffeomorphismus,

$$\det\Phi'(r,\varphi)=\det\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}=r\,.$$

Mit Hilfe von Polarkoordinaten wollen wir den *Schwerpunkt des halben Kreisringes*

$$A:=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ R_1^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R_2^2,\ x\geqslant 0\big\}\,,$$

wobei $0\leqslant R_1<R_2$ vorausgesetzt ist, berechnen. Die Menge A ist Jordan-messbar, wie man z. B. aus der Darstellung

$$A=\big(B[0,R_2]\setminus B(0,R_1)\big)\cap\big([0,R_2]\times[-R_2,R_2]\big)$$

ersieht.

Die y-Koordinate y_S des Schwerpunktes von A ist aus Symmetriegründen Null. Daher beschränken wir uns auf die Berechnung der x-Koordinate

$$x_S=\frac{\int_A x\,d(x,y)}{\mathrm{vol}_2(A)}\,.$$

Schon bekannt ist $\mathrm{vol}_2(A)=\frac{\pi}{2}(R_2^2-R_1^2)$. Das Integral im Zähler von x_S wird mit Polarkoordinaten berechnet, wobei wir Folgerung 1.4.3 benutzen. Dabei müssen wir zunächst $R_1>0$ voraussetzen, da nur dann die Funktion $\mathbf{1}_A$ Riemann-integrierbar in V ist. (Für $R_1=0$ ist A nicht Teilmenge von V, und auch

$A \setminus \{0\}$ ist nicht in einer kompakten Teilmenge von V enthalten.)

$$\int_A x\, d(x,y) = \int_V \mathbf{1}_A(x,y)\, d(x,y) = \int_U \mathbf{1}_A(\Phi(r,\varphi))\,(r\cos\varphi)\, r\, d(r,\varphi)$$
$$= \int \mathbf{1}_{[R_1,R_2]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(r,\varphi)\, r^2 \cos\varphi\, d(r,\varphi)$$

(jetzt Berechnung mit Hilfe des Satzes von Fubini)

$$= \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\varphi\, d\varphi\, dr = 2\int_{R_1}^{R_2} r^2\, dr = \frac{2}{3}\big(R_2^3 - R_1^3\big)\,.$$

Damit

$$x_S = \frac{4\big(R_2^3 - R_1^3\big)}{3\pi\big(R_2^2 - R_1^2\big)}\,.$$

Um die Formel auch für den Fall $R_1 = 0$ zu bekommen, benennen wir die Menge A in A_{R_1,R_2} um. Durch Abschätzung unter Benutzung der Monotonie des Integrales erhalten wir

$$0 \leqslant \int_{A_{0,R_2}} x\, d(x,y) - \int_{A_{R_1,R_2}} x\, d(x,y) = \int_{x^2+y^2\leqslant R_1^2,\, x\geqslant 0} x\, d(x,y)$$
$$\leqslant R_1 \int_{x^2+y^2\leqslant R_1^2,\, x\geqslant 0} d(x,y) = \frac{\pi}{2} R_1 \to 0 \qquad (R_1 \to 0)\,.$$

Da ebenso auch $\mathrm{vol}_2(A_{R_1,R_2}) \to \mathrm{vol}_2(A_{0,R_2})$ $(R_1 \to 0)$ gilt, erhalten wir für $R_2 = R$, $R_1 = 0$ die x-Koordinate

$$x_S = \frac{\int_A x\, d(x,y)}{\mathrm{vol}_2(A)} = \frac{4}{3\pi} R\,.$$

1.4.5 Beispiel. Wir zeigen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, und damit auch

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt$$

(Substitution $t = x^2$, $dt = 2x\, dx$)

$$= 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Dabei erinnern wir an die durch das Integral

$$\Gamma(y) := \int\limits_0^\infty t^{y-1} e^{-t^2}\, dt\,, \qquad \text{für } y > 0\,,$$

erklärte *Gamma-Funktion*, auch *Euler'sche Gamma-Funktion*.

Es handelt sich hier um uneigentliche Riemann-Integrale, die bisher nicht in die Behandlung einbezogen sind. Wir werden zunächst eine Rechnung vorstellen, die in dieser Form im gegenwärtigen Rahmen nicht zulässig ist. Wir werden dann zeigen (siehe Bemerkung 1.4.7), wie man die erhaltenen Ergebnisse mit den bisher vorgestellten Hilfsmitteln rechtfertigen kann. Wir werden weiterhin in Abschnitt 1.6 einen allgemeineren Begriff einführen, mit dem diese Rechnung in allgemeinerem Rahmen gerechtfertigt werden kann; siehe Beispiel 1.6.9. Wir wollen aber schon hier darauf hinweisen, dass der weitere Ausbau der Integrationstheorie dazu führt, dass die nun folgende naiv und bedenkenlos ausgeführte Rechnung tatsächlich so ausgeführt werden kann. Wir verweisen dazu auf Abschnitt ??? Dieser Hinweis möge auch als Motivation für den weiteren abstrakten Aufbau der Integrationstheorie dienen.

Wir rechnen

$$\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\Big)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$$

(Satz von Fubini)

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)$$

(Polarkoordinaten)

$$= \int\limits_{r>0,\, -\pi<\varphi<\pi} e^{-r^2}\, r\, d(r,\varphi)$$

(Satz von Fubini)

$$= 2\pi\big(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\big)\Big|_0^\infty = \pi\,.$$

1.4.6 Beispiel. **Kugelkoordinaten.**

Die Abbildung

$$\Phi\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3 \setminus (-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R}\,,$$
$$\Phi(r,\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

ist ein Diffeomorphismus,

$$\det \Phi'(r,\varphi,\vartheta) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$
$$= r^2\cos\vartheta\,.$$

Mit Hilfe von Kugelkoordinaten berechnen wir den Schwerpunkt der Halbkugel

$$A := \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ z\geqslant 0\big\}\,.$$

Aus Symmetriegründen sind die x- und y-Koordinaten des Schwerpunktes gleich Null, und es bleibt die Berechnung von

$$z_S := \frac{\int_A z\,d(x,y,z)}{\mathrm{vol}_3(A)}\,.$$

Bei der Berechnung des Integrales im Zähler von z_S mit Hilfe von Kugelkoordinaten treten entsprechende Probleme auf wie vorher bei der Berechnung von $\int e^{-x^2}\,dx$. Zur Erinnerung sind dies

1. das Problem, dass das Bild der Parametermenge nicht der ganze $\mathbb{R}^3$ ist, wobei der nicht überdeckte Teil integrationstheoretisch bedeutungslos ist,

2. das Problem, dass die zu integrierende Funktion nicht außerhalb einer kompakten Teilmenge des Bildes der Parametermenge verschwindet.

Die anschließend in Bemerkung 1.4.7 gegebene Behandlung für das Integral $\int e^{-x^2}\,dx$ zeigt, dass die naive Rechnung zum richtigen Ergebnis geführt hat. (Hinweis auf Abschnitt 1.6 einarbeiten!???) Für das hier vorliegende Integral führen wir nur diese naive Rechnung vor:

$$\int\limits_A z\,d(x,y,z) = \int z\mathbf{1}_A(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

(Kugelkoordinaten und Anwendung des Satzes von Fubini)

$$= \int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{\varphi=-\pi}^{\pi} r\sin\vartheta\ r^2\cos\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dr$$
$$= 2\pi\int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\ \cos\vartheta\,d\vartheta\int\limits_0^1 r^3\,dr$$
$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\sin^2\!\vartheta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Damit folgt

$$z_S = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2}{3}\pi} = \frac{3}{8}\,.$$

1.4.7 Bemerkung. Hier soll die in Beispiel 1.4.5 naiv ausgeführte Rechnung gerechtfertigt werden.

Als Vorbetrachtung berechnen wir

$$I_R := \int\limits_{B[0,R]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)\,,$$

für $R > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < R$ definieren wir dazu die Menge

$$S_k := \Phi([\tfrac{1}{k}, R] \times [-\pi + \tfrac{1}{k}, \pi - \tfrac{1}{k}]) \subseteq B[0,R]\,,$$

wobei Φ der für Polarkoordinaten in Beispiel 1.4.4 definierte Diffeomorphismus ist. Dann gilt

$$B[0,R] \setminus S_k \subseteq [-R, \tfrac{1}{k}] \times [-\max\{R\sin\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\}, \max\{R\sin\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\}]\,,$$

damit $\mathrm{vol}_2(B[0,R] \setminus S_k) \leqslant 2\,(R + \frac{1}{k}) \max\{R\sin\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\} \to 0 \quad (k \to \infty)$. Daraus folgt

$$I_R = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{S_k} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)\,.$$

Das letzte unter dem Limes stehende Integral wird durch Polarkoordinaten berechnet (vgl. die Rechnung in Beispiel 1.4.5; wir verwenden außerdem die in Beispiel 1.4.4 definierten Mengen U und V),

$$\int\limits_{S_k} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) = \int\limits_{V} \mathbf{1}_{S_k}(x,y) e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)$$

(Die jetzt folgende Anwendung der Transformationsformel macht keine Probleme mehr, da die unter dem Integral stehende Funktion außerhalb der kompakten Teilmenge S_k von V verschwindet.)

$$= \int\limits_{U} \mathbf{1}_{[\frac{1}{k},R]\times[-\pi+\frac{1}{k},\pi-\frac{1}{k}]}(r,\varphi)\, e^{-r^2}\, r\, d(r,\varphi)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{[\frac{1}{k},R]\times[-\pi+\frac{1}{k},\pi-\frac{1}{k}]}(r,\varphi)\, e^{-r^2}\, r\, d(r,\varphi)$$

(nun Anwendung des Satzes von Fubini)

$$= \int\limits_{\varphi=-\pi+\frac{1}{k}}^{\pi-\frac{1}{k}} \int\limits_{r=\frac{1}{k}}^{R} e^{-r^2} r\, dr\, d\varphi$$

$$= 2\,(\pi - \tfrac{1}{k})\tfrac{1}{2}\big(e^{-(\frac{1}{k})^2} - e^{-R^2}\big)\,.$$

Damit erhalten wir $I_R = \pi\big(1 - e^{-R^2}\big)$.

Wir erinnern nun daran, dass das in Beispiel 1.4.5 behandelte uneigentliche Riemann-Integral durch

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx := \lim_{l\to\infty} \int\limits_{-R_l}^{R_l} e^{-x^2}\,dx$$

erklärt ist, wobei $(R_l) \subseteq (1,\infty)$ eine beliebige Folge mit $R_l \to \infty$ ist. (Existenz des Grenzwertes ???) Mit I sei nun das zu berechnende Integral bezeichnet. Wir wählen eine Folge $(R_l) \subseteq (1,\infty)$, für die zusätzlich $R_{l+1} \geqslant \sqrt{2}R_l$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt, also

$$\begin{aligned}\int\limits_{[-R_l,R_l]^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) &\leqslant \int\limits_{B[0,R_{l+1}]} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y)\\ &\leqslant \int\limits_{[-R_{l+1},R_{l+1}]^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y)\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\begin{aligned}I^2 &= \lim_{l\to\infty}\Bigg(\int\limits_{-R_l}^{R_l} e^{-x^2}\,dx\Bigg)^2 = \lim_{l\to\infty} \int\limits_{[-R_l,R_l]^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y)\\ &= \lim_{l\to\infty} \int\limits_{B[0,R_l]} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \lim_{l\to\infty} I_{R_l} = \lim_{l\to\infty} \pi\big(1 - e^{-R_l^2}\big) = \pi\,.\end{aligned}$$

1.5 Beweis der Transformationsformel

Die (Motivation ???)

Ein besonders einfacher Fall eines Diffeomorphismus $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist der Fall, dass Φ nicht nur linear ist, sondern noch einfacher in der Vertauschung von Koordinaten besteht, d. h. es gibt eine Permutation π der Menge $\{1,\ldots,n\}$ (mit anderen Worten eine bijektive Abbildung $\pi\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$), so dass $\Phi(x) = \Phi_\pi(x) = (x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)})$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ gilt. In diesem Fall folgt die Transformationsformel am einfachsten aus der grundlegenden Beobachtung, dass direkt nach Definition $\mathrm{vol}_n(\Phi_\pi([a,b])) = \mathrm{vol}_n([a,b])$ für alle $a,b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leqslant b$ gilt. Daraus folgt die Transformationsformel weiterhin sofort für alle Treppenfunktionen und daher auch für alle Riemann-integrierbaren Funktionen; siehe dazu auch Aufgabe ???. (In diesem Fall ist offenbar eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genau dann eine Treppenfunktion, wenn $f\circ\Phi$ eine Treppenfunktion ist.) Dieser einfache Fall wird hier nicht weiter formalisiert, sondern wir werden ihn im Folgenden in der Weise benutzen, dass wir sagen, dass bestimmte Eigenschaften nach „Vertauschung von Koordinaten“ in einfacher Weise benutzt werden können.

Von ähnlich grundsätzlicher Art ist die folgende einfache, aber strukturell wichtige Aussage.

1.5.1 Lemma. *Sind $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi\colon U \to W$, $\Psi\colon W \to V$ Diffeomorphismen, für die die Transformationsformel (in der „Urform“ von Satz 1.4.1) gilt, dann gilt sie auch für $\Psi \circ \Phi\colon U \to V$.*

Beweis. Sei $f \in C_c(V)$. Dann gilt $f \circ \Psi \in C_c(W)$, $f \circ \Psi \circ \Phi \in C_c(U)$, und unter Beachtung von

$$(\Psi \circ \Phi)'(x) = \Psi'(\Phi(x))\Phi'(x)\,, \qquad \det(\Psi \circ \Phi)'(x) = \det \Psi'(\Phi(x)) \det \Phi'(x)$$

(Kettenregel) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_U f(\Psi \circ \Phi(x)) |\det(\Psi \circ \Phi)'(x)|\, dx &= \int_W f \circ \Psi(z)\, |\det \Psi'(z)|\, dz \\ &= \int_V f(y)\, dy\,. \end{aligned}$$
□

Unser Ziel ist, die Transformationsformel durch Induktion über n zu beweisen. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist durch die eindimensionale Transformationsformel, d. h. Variablensubstitution, abgedeckt; vergleiche Bemerkung 1.4.2(b).

1.5.2 Lemma. *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 1.4.1. Außerdem sei $1 \leqslant k \leqslant n-1$, die Gültigkeit von Satz 1.4.1 mit n ersetzt durch k sei vorausgesetzt, und es gebe $\check{\Phi}\colon U \to \mathbb{R}^k$, so dass*

$$\Phi(\check{x}, \hat{x}) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}(\check{x}, \hat{x}) \\ \hat{x} \end{pmatrix} \qquad ((\check{x}, \hat{x}) \in U).$$

Dann gilt die Behauptung von Satz 1.4.1.

(Wir erinnern an die Bezeichnung $x = (\check{x}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Entsprechend zu dieser schon eingeführten Bezeichnungsweise verwenden wir $\check{\Phi}$ bzw. $\hat{\Phi}$ für die vorderen k bzw. hinteren $n-k$ Komponenten von Φ.)

Beweis. Für $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ seien (Bild!!???)

$$U_{\hat{x}} := \big\{\check{x}\,;\, (\check{x}, \hat{x}) \in U\big\}\,, \qquad V_{\hat{x}} := \big\{\check{x}\,;\, (\check{x}, \hat{x}) \in V\big\}\,.$$

Man prüft leicht nach, dass

$$\check{\Phi}(\,\cdot\,, \hat{x})\colon U_{\hat{x}} \to V_{\hat{x}}$$

ein Diffeomorphismus ist. Sei $f \in C_c(V)$. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_V f(y)\,dy &= \int\limits_{\hat y \in \mathbb{R}^{n-k}} \int\limits_{\check y \in V_{\hat y}} f(\check y, \hat y)\,d\check y\,d\hat y \\
&= \int\limits_{\hat x \in \mathbb{R}^{n-k}} \int\limits_{\check x \in U_{\hat x}} f(\check\Phi(\check x, \hat x), \hat x) \left|\det \frac{\partial \check\Phi(\check x, \hat x)}{\partial \check x}\right| d\check x\,d\hat x \\
&= \int\limits_U f(\Phi(x))\,|\det \Phi'(x)|\,dx\,.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir den Satz von Fubini, die Voraussetzung, und nochmals den Satz von Fubini verwendet; außerdem

$$\begin{aligned}
\det \Phi'(x) &= \det \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\check\Phi'(x)} \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \check\Phi(\check x, \hat x)}{\partial \check x} & \dfrac{\partial \check\Phi(\check x, \hat x)}{\partial \hat x} \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} \\
&= \det \frac{\partial \check\Phi(\check x, \hat x)}{\partial \check x}\,.
\end{aligned}$$

□

1.5.3 Bemerkungen. (a) In Anbetracht der Bemerkung betreffend Vertauschung von Koordinaten am Anfang des Paragraphen gilt die Behauptung von Lemma 1.5.2 auch für Abbildungen Φ, bei denen für einige der Komponenten $\Phi_j(x) = x_j$ gilt.

(b) Gemäß Teil (a) gilt Lemma 1.5.2 insbesondere auch, falls Φ von der Form $\Phi(\check x, \hat x) = \begin{pmatrix} \check x \\ \hat\Phi(\check x, \hat x) \end{pmatrix}$ ist. Der Angelpunkt des Beweises besteht darin, dass sich Diffeomorphismen immer lokal als Komposition von zwei solchen Abbildungen darstellen lassen.

1.5.4 Satz. *Seien U, V, Φ wie in Satz 1.4.3, $a \in U$, $b := \Phi(a)$. Dann gibt es eine offene Umgebung U_a von a, eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und Diffeomorphismen $\Psi\colon U_a \to W$, $\widetilde\Psi\colon W \to V_b := \Phi(U_a)$ von der Form in Lemma 1.5.2 bzw. in Bemerkung 1.5.3(b), so dass $\Phi|_{U_a} = \widetilde\Psi \circ \Psi$ gilt.*

Beweis. Sei $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Die Zeilen der Matrix $\Phi'(a)$ sind linear unabhängig, daher auch die oberen k Zeilen. Durch eine Permutation der Koordinaten können wir erreichen, dass die ersten k Spalten der Matrix $\check\Phi'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1\Phi_1 & \dots & \partial_n\Phi_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1\Phi_k & \dots & \partial_n\Phi_k \end{pmatrix}(a)$ linear unabhängig sind. Die Abbildung Ψ, $\Psi(x) :=$

$\begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{x} \end{pmatrix}$, hat in a die Ableitung $\Psi'(a) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}'(a) & \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$, und diese ist invertierbar, da die Spalten linear unabhängig sind. Nach dem Satz von der lokalen Invertierbarkeit (Zitat ???) gibt es eine offene Umgebung U_a von a und eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $\Psi\colon U_a \to W$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist (Bild ???) $\tilde{\Psi} := \Phi \circ \Psi^{-1}\colon W \to V_b$ ein Diffeomorphismus von der Form $\tilde{\Psi}(z) = \begin{pmatrix} \check{z} \\ \hat{\tilde{\Psi}}(z) \end{pmatrix}$: Zu $z \in W$, $y := \tilde{\Psi}(z) \in V_b$ gibt es $x \in U_a$ mit $z = \Psi(x) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{x} \end{pmatrix}$, $y = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{\Phi}(x) \end{pmatrix}$, und daher $\check{y} = \check{\Phi}(x) = \check{z}$. □

Bemerkung. Aus Lemma 1.5.1 und Lemma 1.5.2 folgt, dass in der Situation von Satz 1.5.4 die Transformationsformel für $\Phi\colon U_a \to V_b$ gilt, falls sie für Dimensionen kleiner als n vorausgesetzt wird.

Als letztes benötigen wir noch das folgende Hilfsmittel, das von etwas grundsätzlicherer Art ist. Wir beweisen dieses gleich in allgemeinerer Form als hier benötigt. Dazu schicken wir noch eine Definition voraus.

Definition. Ein metrischer Raum M heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt aus M eine kompakte Umgebung besitzt.

Wir erinnern daran, dass abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen in metrischen Räumen auch kompakt sind. Daraus folgt, dass es in lokalkompakten metrischen Räumen für jeden Punkt x ein $r > 0$ gibt, so dass die abgeschlossene Kugel $B[x, r]$ kompakt ist.

Die einfachsten Beispiele lokalkompakter metrischer Räume sind offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Ist M ein lokalkompakter metrischer Raum, so werden der Träger $\operatorname{spt} f$ einer stetigen Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ sowie der Raum $C_c(M)$ wie für offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ definiert.

1.5.5 Satz. (Partition der Eins, leichte Form) *Sei M ein lokalkompakter metrischer Raum, $K \subseteq M$ kompakt, $m \in \mathbb{N}$, $(V_j)_{j=1,\dots,m}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C_c(M)$ mit $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$, $\operatorname{spt} \varphi_j \subseteq V_j$ $(j = 1, \dots, m)$, $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$ für alle $x \in K$. (Die Familie $(\varphi_j)_{j=1,\dots,m}$ heißt der Überdeckung $(V_j)_{j=1,\dots,m}$ untergeordnete Partition der Eins auf K.)*

Beweis. Sei d die Metrik von M. Sind $x \in M$, $r > 0$ so, dass $B[x, r]$ kompakt ist, so definieren wir $\psi_{x,r} \in C_c(M)$ durch $\psi_{x,r}(y) := (r - d(y, x)) \vee 0$ $(y \in M)$. Dann gilt $\psi_{x,r} \geqslant 0$, $\operatorname{spt} \psi_{x,r} \subseteq B[x, r]$, $\psi_{x,r}(y) > 0$ für alle $y \in B(x, r)$.

Für alle $x \in K$ gibt es $j \in \{1, \dots, m\}$ und $r_x > 0$, so dass $B[x, r_x] \subseteq V_j$ und $B[x, r_x]$ kompakt ist. Wegen der Kompaktheit von K gibt es zu der offenen Überdeckung $\big(B(x, r_x)\big)_{x \in K}$ von K eine endliche Teilüberdeckung $\big(B(x_k, r_k)\big)_{k=1,\dots,p}$, wobei $r_k := r_{x_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Für $j = 1, \dots, m$ definieren wir

$$\psi_j := \sum_{k \in \{1,\dots,p\}, B[x_k, r_k] \subseteq V_j} \psi_{x_k, r_k}.$$

Dann gilt $\psi_j \in C_c(M)$, $\operatorname{spt} \psi_j \subseteq V_j$, $\psi \geqslant 0$ $(j = 0, \dots, m)$, and $\psi := \sum_{j=1}^m \psi_j(x) > 0$ für alle $x \in K$.

Die Menge $K_0 := \bigcup_{k=1}^p B[x_k, r_k] \setminus \bigcup_{k=1}^p B(x_k, r_k)$ ist eine kompakte Teilmenge der offenen Menge $V_0 := M \setminus K$. Nach dem bisher Gezeigten gibt es $\psi_0 \in C_c(M)$, so dass $\psi_0 \geqslant 0$, $\operatorname{spt} \psi_0 \subseteq V_0$, $\psi_0(x) > 0$ für alle $x \in K_0$. Dann ist $\psi := \sum_{j=0}^m \psi_j \in C_c(M)$, $\psi(x) > 0$ für alle $x \in \bigcup_{j=1}^m \operatorname{spt} \psi_j$, und die Funktionen $\varphi_j := \dfrac{\psi_j}{\psi}$ auf V_j, $\varphi_j := 0$ auf $M \setminus V_j$ $(j = 1, \dots, m)$ haben die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Beweis von Satz 1.4.1. Gemäß Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass die Behauptung des Satzes wahr ist mit n ersetzt durch k, für alle $k = 1, \dots, n-1$.

Für $b \in V$ sei V_b gemäß Satz 1.5.4 bestimmt. Dann ist $(V_b)_{b \in V}$ eine offene Überdeckung von V. Zu der kompakten Menge $K := \operatorname{spt} f$ (zur Erinnerung: $f \in C_c(V)$ ist vorgegeben) gibt es eine endliche Teilüberdeckung $V_{b_1}, \dots, V_{b_m}$. Zu dieser seien $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ wie in Satz 1.5.5 gewählt. Wir definieren $a_j := \Phi^{-1}(b_j)$, $U_{a_j} := \Phi^{-1}(V_{b_j})$ $(j = 1, \dots, m)$. Dann folgt

$$\int\limits_V f(y)\, dy = \sum_{j=1}^m \int\limits_{V_{b_j}} \varphi_j(y) f(y)\, dy$$

(jetzt Anwendung von Lemma 1.5.1 unter Beachtung der Tatsache, dass $\Phi \colon U_{a_j} \to V_{b_j}$ gemäß Konstruktion Komposition von Abbildungen ist, für die nach Lemma 1.5.2 die Transformationsformel gilt)

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^m \int\limits_{U_{a_j}} \varphi_j(\Phi(x))\, f(\Phi(x))\, |\det \Phi'(x)|\, dx \\ &= \int\limits_U \sum_{j=1}^m \varphi_j(\Phi(x))\, f(\Phi(x))\, |\det \Phi'(x)|\, dx = \int\limits_U f(\Phi(x))\, |\det \Phi'(x)|\, dx\,. \end{aligned} \qquad \square$$

1.6 Uneigentlich absolut Riemann-integrierbare Funktionen

In diesem Abschnitt setzen wir das für Funktionen auf einer offenen Menge U definierte Riemann-Integral auf eine größere Menge von Funktionen fort, die nicht mehr außerhalb einer kompakten Teilmenge von U verschwinden müssen. Wir beweisen die Transformationsformel für diese größere Menge von uneigentlich Riemann-integrierbaren Funktionen. Das eigentliche Ziel ist dabei, für wie in Beispiel 1.4.5 formal ausgeführte und in Bemerkung 1.4.7 gerechtfertigte Rechnungen eine Begründung in allgemeinerem Rahmen zu geben. Dafür weisen wir schon hier auf Beispiel 1.6.9 und Beispiel 1.6.10 am Ende dieses Abschnitts hin.

Für eine auf einem eindimensionalen Intervall definierte Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, die auf kompakten Teilintervallen von (a,b) Riemann-integrierbar ist, ist das uneigentliche Riemann-Integral erklärt als

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+,d\to b-} \int_c^d f(x)\,dx$$

(wenn dieser Grenzwert existiert). Eine solche Definition ist in höheren Raumdimensionen nicht sinnvoll möglich, da es keine „kanonische Ausschöpfung“ offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ durch geeignete kompakte Teilmengen gibt. Man beachte auch, dass aus der Existenz des eindimensionalen uneigentlichen Riemann-Integrals nicht die Existenz des uneigentlichen Riemann-Integrals für den Betrag der Funktion folgt; siehe dazu Aufgabe ???

Die geeignete Verallgemeinerung auf höhere Raumdimensionen ist hier der anschließend definierte Begriff.

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$.

(a) Ist $f \geqslant 0$, so heißt f *uneigentlich Riemann-integrierbar*, $f \in R_{\mathrm{ua}}(U)$, wenn $\varphi f \in R(U)$ für alle $\varphi \in C_c(U)$, und

$$\int f(x)\,dx := \sup\Big\{\int \varphi(x)f(x)\,dx\,;\ \varphi \in C_c(U),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 1\Big\} < \infty\,.$$

(Ist f Riemann-integrierbar, so gibt es eine kompakte Menge $K \subseteq U$, so dass $f|_{U\setminus K} = 0$, und es gibt $\varphi \in C_c(U)$, $\mathbf{1}_K \leqslant \varphi \leqslant 1$ (siehe Schritt (i) im Beweis von Satz 1.5.5), und daher ergibt die rechte Seite das schon definierte Integral.)

(b) Die Funktion f heißt *uneigentlich absolut Riemann-integrierbar*, $f \in R_{\mathrm{ua}}(U)$, wenn $\varphi f \in R(U)$ für alle $\varphi \in C_c(U)$, und $|f| \in R_{\mathrm{ua}}(U)$. Ist dies erfüllt, so gilt offenbar $f^\pm \in R_{\mathrm{ua}}(U)$, und wir definieren

$$\int f(x)\,dx := \int f^+(x)\,dx - \int f^-(x)\,dx\,.$$

1.6.1 Lemma. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist die Menge $R_{\mathrm{ua}}(U)$ ein Vektorraum, und die Abbildung*

$$R_{\mathrm{ua}}(U) \ni f \mapsto \int f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

ist linear.

Beweis. Dass $R_{\text{ua}}(U)$ ein Vektorraum ist, folgt direkt aus der Definition (unter Benutzung der Tatsache, dass $R(U)$ ein Vektorraum ist).

Sind $f, g \in R_{\text{ua}}(U)$, $f, g \geqslant 0$, $a \geqslant 0$, so gilt $\int af = a\int f$, $\int(f+g) = \int f + \int g$. Die erste dieser Gleichungen ist klar. In der zweiten ist die Ungleichung „ $\leqslant$“ klar. Sind $\varphi, \psi \in C_c(U)$, $0 \leqslant \varphi, \psi \leqslant 1$, so folgt $\int(f+g) \geqslant \int(\varphi \vee \psi)(f+g) \geqslant \int \varphi f + \int \psi g$, und durch Bildung des Supremums über φ, ψ auf der rechten Seite folgt „ $\geqslant$“.

Seien nun $f, g \in R_{\text{ua}}(U)$, $a \in \mathbb{R}$. Dann folgt die Gleichung $\int af = a\int f$ durch Zerlegung von f in Positiv- und Negativteil. Um die Additivitat des Integrals zu zeigen, bemerken wir zunächst: Sind $f_+, f_- \in R_{\text{ua}}(U)$, $f_\pm \geqslant 0$, $f = f_+ - f_-$, so gilt $\int f = \int f_+ - \int f_-$. Wegen $f^+ - f^- = f = f_+ - f_-$ gilt nämlich $f^+ + f_- = f^- + f_+$, $\int f^+ + \int f_- = \int f^- + \int f_+$, und daher $\int f = \int f^+ - \int f^- = \int f_+ - \int f_-$. Daraus folgt $\int(f+g) = \int((f^+ + g^+) - (f^- + g^-)) = \int(f^+ + g^+) - \int(f^- + g^-) = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g$. □

Als erstes (???) zeigen wir, dass die Transformationsformel auch für diese größere Menge von Funktionen gilt.

1.6.2 Folgerung. (Transformationsformel für uneigentlich absolut Riemann-integrierbare Funktionen) *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus, $f\colon V \to \mathbb{R}$. Dann ist $f \in R_{\text{ua}}(V)$ genau dann, wenn $f \circ \Phi\, |\det \Phi'| \in R_{\text{ua}}(U)$ ist, und in diesem Fall gilt*

$$\int\limits_V f(y)\,dy = \int\limits_U f(\Phi(x))\,|\det \Phi'(x)|\,dx\,.$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $f \geqslant 0$ annehmen. Für jede Funktion $\varphi \in C_c(V)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, ist $\psi := \varphi \circ \Phi \in C_c(U)$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, und jede Funktion $\psi \in C_c(U)$ mit $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ entsteht auf diese Weise. Ist $\varphi \in C_c(V)$, so folgt aus Satz 1.4.3, dass $\varphi f \in R(V)$ genau dann gilt, wenn $(\varphi f) \circ \Phi\, |\det \Phi'| \in R(U)$ ist, und dass dann

$$\int\limits_V \varphi(y) f(y)\,dy = \int\limits_U \varphi(\Phi(x)) f(\Phi(x))\,|\det \Phi'(x)|\,dx\,.$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes. □

Als nächstes zeigen wir eine Verträglichkeitseigenschaft, wenn man eine Funktion über verschiedene Mengen integrieren will. (anders formulieren!!!???)

1.6.3 Satz. *Seien $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in R_{\text{ua}}(V)$. Dann gilt $f|_U \in R_{\text{ua}}(U)$. Ist $f|_{V\setminus U} = 0$, so gilt $\int_U f(x)\,dx = \int_V f(x)\,dx$.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $f \geqslant 0$ voraussetzen. Aus der Definition folgt sofort $f|_U \in R_{\mathrm{ua}}(U)$, $\int_U f(x)\,dx \leqslant \int_V f(x)\,dx$.

Zum Beweis der zweiten Behauptung sei $\psi \in C_c(V)$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$. Dann gilt $\psi f \in R(V)$, $\psi f|_{V\setminus U} = 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\eta \in C_c(V)$, $0 \leqslant \eta \leqslant \psi f$, so dass $\int(\psi f - \eta) < \varepsilon$. Weiterhin finden wir $\tilde\eta \in C_c(V)$, $0 \leqslant \tilde\eta \leqslant \eta$, mit $\operatorname{spt}\tilde\eta \subseteq U$, $\int(\eta - \tilde\eta) < \varepsilon$. (Für $j \in \mathbb{N}$ definieren wir $\eta_j := (\eta - \frac{1}{j}) \vee 0$. Dann gilt $\operatorname{spt}\eta_j \subseteq \big\{x \in V\,;\, \eta(x) \geqslant \frac{1}{j}\big\} \subseteq \big\{x \in V\,;\, \eta(x) > 0\big\} \subseteq U$, und aus $0 \leqslant \eta_j \leqslant \eta$ zusammen mit der gleichmäßigen Konvergenz $\eta_j \to \eta$ folgt $\int(\eta - \eta_j) \to 0$.)

Es gibt $\varphi \in C_c(U)$, $\mathbf{1}_{\operatorname{spt}\tilde\eta} \leqslant \varphi \leqslant 1$. Daraus folgt $\varphi f \geqslant \tilde\eta$, $\int_U f \geqslant \int \varphi f \geqslant \int \tilde\eta \geqslant \int \psi f - 2\varepsilon$.

Dies zeigt $\int_U f \geqslant \int_V f$. □

1.6.4 Bemerkung. Man könnte versucht sein zu glauben, dass in Satz 1.6.3 auch die Umkehrung gilt, in folgendem Sinn. Ist $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon V \to \mathbb{R}$, $f|_U \in R_{\mathrm{ua}}(U)$, $f|_{V\setminus U} = 0$, dann soll gelten $f \in R_{\mathrm{ua}}(V)$. Dass dies nicht gilt, zeigt folgendes Beispiel.

Sei $\big\{x_j\,;\, j \in \mathbb{N}\big\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen des Intervalls $[0,1]$, und sei $(r_j) \subseteq (0,\infty)$, $\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j < 1/2$. Wir definieren $U := \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(x_j - r_j, x_j + r_j)$, $V := \mathbb{R}$. Dann ergibt sich leicht $\mathbf{1}_U \in R_{\mathrm{ua}}(U)$, $\int_U 1\,dx \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} 2r_j < 1$. Wäre $\mathbf{1}_U$ auf $\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so würde $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_U = \int_U 1\,dx < 1$ folgen, wegen Satz 1.6.3. Andererseits ist U dicht in $[0,1]$. Ist also $\psi \in C_c(\mathbb{R})$, $\psi \geqslant \mathbf{1}_U$, so ist $\psi(x) \geqslant 1$ für alle $x \in [0,1]$, und daher gilt $\int \psi \geqslant 1$. Damit ergibt sich $\overline{\int} \mathbf{1}_U \geqslant 1$, woraus schließlich $\mathbf{1}_U \notin R(\mathbb{R})$ folgt.

Wir bemerken, dass die im vorhergehenden Absatz konstruierte Menge U insofern recht interessant ist, als sie offen und dicht in $[0,1]$ ist, aber nicht Obermenge von $[0,1]$ (da $\int_U 1 < 1$ ist). Die Komplementärmenge $[0,1] \setminus U$ ist noch interessanter. Wir werden später zeigen (vgl. ???), dass sie nicht nur nicht-leer, sondern auch überabzählbar ist.

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Falls $\mathbf{1}_U \in R_{\mathrm{ua}}(U)$ ist, definieren wir das *n-dimensionale Volumen von U*, $\operatorname{vol}_n(U) := \int_U 1\,dx$. Diese Definition ist konsistent mit der bisherigen Definition. Ist nämlich U Jordan-messbar als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so folgt $\int \mathbf{1}_U(x)\,dx = \int_U 1\,dx$ aus Satz 1.6.3.

Der folgende Satz und die anschließende Folgerung liefern eine handlichere Methode für die Entscheidung über die Zugehörigkeit einer Funktion zu $R_{\mathrm{ua}}(U)$ und für die Berechnung von $\int f(x)\,dx$.

1.6.5 Satz. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to [0,\infty)$, $\varphi f \in R(U)$ für alle $\varphi \in C_c(U)$. Sei $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq C_c(U)$, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant 1$, und für alle kompakten Mengen $K \subseteq U$ gebe es $j \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{1}_K \leqslant \varphi_j$. Sei $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge Jordan-messbarer Teilmengen von U (damit $\operatorname{cl} U_j$ kompakt aufgrund der Definition der Jordan-Messbarkeit), $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{int} U_j = U$.*

Dann sind äquivalent:
(α) $f \in R_{\mathrm{ua}}(U)$,
(β) $s_1 := \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_U \varphi_j(x) f(x)\,dx < \infty$,
(γ) $s_2 := \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_{U_j} f(x)\,dx < \infty$.
Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt $\int f = s_1 = s_2$.

Beweis. (α) $\Rightarrow$ (β) ist klar nach Definition, und es folgt $s_1 \leqslant \int f$.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Sei $j \in \mathbb{N}$. Da $\operatorname{cl} U_j$ kompakt ist, gibt es $j' \in \mathbb{N}$, so dass $\mathbf{1}_{U_j} \leqslant \varphi_{j'}$ ist. Es folgt $\int_{U_j} f(x)\,dx \leqslant \int_U \varphi_{j'}(x) f(x)\,dx \leqslant s_1$, und damit die Behauptung samt $s_2 \leqslant s_1$.

(γ) $\Rightarrow$ (α). Sei $\varphi \in C_c(U)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Da $(\operatorname{int} U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\operatorname{spt}\varphi$ ist, gibt es $j \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{spt}\varphi \subseteq U_j$. Es folgt $\int_U \varphi(x) f(x)\,dx \leqslant \int_{U_j} f(x)\,dx \leqslant s_2$, damit $f \in R_{\mathrm{ua}}(U)$, $\int f \leqslant s_2$. □

1.6.6 Folgerung. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq C_c(U)$ und $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Folgen wie in der Voraussetzung von Satz 1.6.5. Für alle $f \in R_{\mathrm{ua}}(U)$ gilt dann*

$$\int_U f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_U \varphi_j(x) f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{U_j} f(x)\,dx\,.$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $f \geqslant 0$ annehmen. Dann folgt die Behauptung aus Satz 1.6.5, da die Folgen $(\int_U \varphi_j(x) f(x)\,dx)_{j\in\mathbb{N}}$, $(\int_{U_j} f(x)\,dx)_{j\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sind. □

In konkreten Situationen ist es meist leicht, Folgen $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit den in Satz 1.6.5 vorausgesetzten Eigenschaften zu konstruieren. Damit Satz 1.6.5 auch allgemein benutzbar wird, zeigen wir jetzt, dass die in der Voraussetzung vorgegebenen Folgen $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ immer existieren.

1.6.7 Satz. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann gibt es Folgen $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit den in Satz 1.6.5 vorausgesetzten Eigenschaften. Die Folge $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ kann zusätzlich als Folge offener Mengen und mit $\operatorname{cl} U_j \subseteq U_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gewählt werden.*

Beweis. Sei $A \subseteq U$ eine abzählbare dichte Teilmenge von U (zum Beispiel die Menge der Punkte mit rationalen Koordinaten). Dann ist das Mengensystem

$$\mathcal{B} := \big\{B(x, \tfrac{1}{k})\,;\, x \in A,\, k \in \mathbb{N},\, B[x, \tfrac{1}{k}] \subseteq U\big\}$$

(wobei die Kugeln in $\mathbb{R}^n$ gebildet werden) abzählbar, $\mathcal{B} = \big\{B_j\,;\, j \in \mathbb{N}\big\}$. (In $\mathcal{B}$ würde man eigentlich nicht Kugeln von kleinem Radius benötigen!???) Wir definieren $V_k := \bigcup_{j=1}^k B_j$ $(k \in \mathbb{N})$. Dann ist $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge offener, Jordan-messbarer Teilmengen von U.

Weiterhin gilt $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$. Sei nämlich $y \in U$. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $B(y, \frac{1}{k}) \subseteq U$. Es gibt $x \in B(y, \frac{1}{2k}) \cap A$. Daraus folgen $y \in B(x, \frac{1}{2k})$ und $B[x, \frac{1}{2k}] \subseteq B(y, \frac{1}{k}) \subseteq U$.

Ist $K \subseteq U$ kompakt, so ist $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K, und daher gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq V_k$. Dies impliziert, dass es eine Teilfolge $(V_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $\operatorname{cl} V_{k_j} \subseteq V_{k_{j+1}}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Also hat die Folge $(U_j)_{j\in\mathbb{N}} := (V_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ die gewünschten Eigenschaften.

Für $j \in \mathbb{N}$ finden wir $\varphi_j \in C_c(U)$, $\mathbf{1}_{U_j} \leqslant \varphi_j \leqslant \mathbf{1}_{U_{j+1}}$; siehe Schritt (i) im Beweis von Satz 1.5.5. □

(überleitende Bemerkung???)

1.6.8 Lemma. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $N \subseteq U$ eine in U abgeschlossene Menge mit der Eigenschaft, dass $N \cap K$ für alle kompakten $K \subseteq U$ eine Jordan-Nullmenge ist. Sei $f \in R_{\mathrm{ua}}(U)$. Dann ist $\mathbf{1}_N f \in R_{\mathrm{ua}}(U)$, $\int_U \mathbf{1}_N(x) f(x)\,dx = 0$, $\mathbf{1}_{U\setminus N} f \in R_{\mathrm{ua}}(U \setminus N)$, $\int_{U\setminus N} f(x)\,dx = \int_U f(x)\,dx$.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $f \geqslant 0$ annehmen. Für alle $\varphi \in C_c(U)$ ist dann offenbar $\int \varphi \mathbf{1}_N f = 0$, und daraus folgen die ersten beiden Behauptungen. Da $R_{\mathrm{ua}}(U)$ ein Vektorraum ist, folgt die dritte Behauptung, und die letzte gilt wegen der Linearität des Integrals und Satz 1.6.3. □

Wir hatten in Bemerkung 1.4.7 die in Beispiel 1.4.5 vorgeführte Rechnung gerechtfertigt. Mit den hier bereit gestellten Hilfmitteln kann diese Rechnung sehr natürlich gerechtfertigt werden, wie jetzt gezeigt wird.

1.6.9 Beispiel. Wir schreiben eine Kette von Gleichungen auf und geben anschließend die Begründung für die Gültigkeit:

$$
\begin{aligned}
\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\Big)^2 &= \Big(\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\Big)^2 = \lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2\setminus((-\infty,0]\times\{0\})} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y)\\
&= \int_{(0,\infty)\times(-\pi,\pi)} e^{-r^2} r\,d(r,\varphi) = \lim_{k\to\infty}\int_{[\frac1k,k]\times[-\pi+\frac1k,\pi-\frac1k]} e^{-r^2} r\,d(r,\varphi)\\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{\varphi=-\pi+\frac1k}^{\pi-\frac1k}\int_{r=\frac1k}^{k} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \lim_{k\to\infty} 2(\pi-\tfrac1k)\tfrac12\big(e^{-(\frac1k)^2}-e^{-k^2}\big) = \pi\,.
\end{aligned}
$$

In diesen Gleichungen haben wir nacheinander die Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals, den Satz von Fubini (Satz 1.3.1 mit Satz 1.3.5), Folgerung 1.6.6, Lemma 1.6.8, die Transformationsformel (Folgerung 1.6.2), Folgerung 1.6.6 und den Satz von Fubini benutzt und die dann entstehenden Integrale noch berechnet.

Ein kritscher Vergleich der hier ausgeführten Rechnung mit der Argumentation in Bemerkung 1.4.7 zeigt, dass der Hauptunterschied darin besteht, dass hier die Transfomationsformel in allgemeinerer Situation zur Verfügung steht, und dass ansonsten die speziellen Beweisschritte in Bemerkung 1.4.7 jetzt in einen allgemeineren Rahmen gestellt sind.

Auch die in Beispiel 1.4.6 ausgeführte naive Rechnung kann mit den hier vorgestellten Methoden leicht gerechtfertigt werden.

Wir stellen jetzt noch ein weiteres Beispiel vor, für das die Benutzung des uneigentlichen absoluten Riemann-Integrals vorteilhaft ist.

1.6.10 Beispiel. Für $x, y > 0$ ist die *Betafunktion* erklärt als

$$B(x,y) := \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1}\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_{0+\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}} (1-t)^{x-1} t^{y-1}\, dt\,,$$

wobei die Definition als uneigentliches Riemann-Integral nur für $x < 1$ oder $y < 1$ benötigt wird. Unser Ziel ist, die Formel

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

zu zeigen. Dazu rechnen wir

$$B(x,y)\Gamma(x+y) = \lim_{k\to\infty} \int_{0+\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}} (1-t)^{x-1} t^{y-1}\, dt \int_{\frac{1}{k}}^{k} s^{x+y-1} e^{-s}\, ds$$

(Satz von Fubini und Folgerung 1.6.6)

$$= \int_{(0,\infty)\times(0,1)} (s(1-t))^{x-1} (st)^{y-1} e^{-s} s\, d(s,t)$$

(Jetzt Anwendung der Transformationsformel, Folgerung 1.6.2, mit dem Diffeomorphismus

$$\Phi\colon (0,\infty)\times(0,1) \to (0,\infty)^2\,, \quad \Phi(s,t) = \begin{pmatrix} s(1-t) \\ st \end{pmatrix};$$

es ist leicht nachzurechnen, dass $\det \Phi'(s,t) = s$ gilt. Die neuen Variablen nennen wir $\xi = s(1-t)$, $\eta = st$.)

$$= \int_{(0,\infty)^2} \xi^{x-1} \eta^{y-1} e^{-(\xi+\eta)}\, d(\xi,\eta)$$

(Folgerung 1.6.6)

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{(\frac{1}{k},k)^2} \xi^{x-1}\eta^{y-1}e^{-(\xi+\eta)}\,d(\xi,\eta)$$

(Satz von Fubini)

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(\int\limits_{(\frac{1}{k},k)} \xi^{x-1}e^{-\xi}\,d\xi \int\limits_{(\frac{1}{k},k)} \eta^{y-1}e^{-\eta}\,d\eta \Big) = \Gamma(x)\Gamma(y)\,.$$

1.7 Integration auf Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

Wir führen zunächst den Begriff der differenzierbaren Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ein.

Definition. Sei $0 \leqslant k \leqslant n$. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit*, wenn folgendes gilt: Für alle $a \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von a, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $h\colon U \to V$, so dass $h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\})$. (Dabei haben wir zur Verdeutlichung die 0 von $\mathbb{R}^{n-k}$ als 0_{n-k} geschrieben.)

Eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir auch als *Hyperfläche* in $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. Eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit M ist als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum. Aus der Definition folgt sofort, dass M lokalkompakt ist.

Figur???

1.7.1 Beispiele. (a) Sei $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist $\mathrm{gr}(f)$, der Graph von f, eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

Um dies einzusehen, wählen wir $U = V := (0,1) \times \mathbb{R}$, $h\colon U \to V$,

$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y - f(x) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $h'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f'(x) & 1 \end{pmatrix}$, h ist ein Diffeomorphismus, insbesondere ist $h^{-1}(\tilde{x},\tilde{y}) = \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y}+f(\tilde{x}) \end{smallmatrix}\right)$, und es ist $h(\mathrm{gr}(f)) = (0,1) \times \{0\} = V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$.

(b) Verallgemeinerung von (a): Sei $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\check{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f\colon \check{U} \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar. Dann ist $\mathrm{gr}(f)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Die Begründung ist die gleiche wie in (a); wir erwähnen insbesondere die Ableitung von h,

$$h'(x) = h'(\check{x}, \hat{x}) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ -f'(\check{x}) & E_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich wird anschließend gezeigt, dass sich jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ lokal auf diese Weise darstellen lässt.

(c) Die $(n-1)$-*dimensionale Einheitssphäre*

$$S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n ;\ |x| = 1\}$$

ist eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$, wie man leicht aus Teil (b) sieht.

In Aufgabe ??? geben wir Beispiele für Mengen an, die keine Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ sind.

Untermannigfaltigkeiten kann man auf verschiedene Weise beschreiben. Dies ist der Inhalt des nächsten Satzes.

1.7.2 Satz. *Sei* $1 \leqslant k \leqslant n-1$, *und sei* $M \subseteq \mathbb{R}^n$. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *M ist k-dimensionale Untermannigfaltigkeit.*

(ii) *Die Menge M ist* lokal Nullstellenmenge, *oder* lokal durch Nebenbedingungen definiert, *d. h. für alle $a \in M$ existieren eine offene Umgebung U von a und eine stetig differenzierbare Funktion $g \colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ (die „Nebenbedingungen“) mit* $\operatorname{rnk} g'(x) = n-k$ *für alle $x \in U$ (die Nebenbedingungen sind „unabhängig“), so dass*

$$M \cap U = \bigl\{x \in U ;\ g(x) = 0\bigr\}.$$

(iii) *Die Menge M ist* lokal ein Graph, *d. h. für alle $a \in M$ gilt: Nach geeigneter Umnumerierung der Koordinaten gibt es offene Umgebungen*

$$\check{U} \subseteq \mathbb{R}^k \ \text{ von } \ \check{a} = (a_1, \dots, a_k),$$
$$\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^{n-k} \ \text{ von } \ \hat{a} = (a_{k+1}, \dots, a_n)$$

sowie eine stetig differenzierbare Funktion $f \colon \check{U} \to \mathbb{R}^{n-k}$, so dass

$$M \cap (\check{U} \times \hat{U}) = \operatorname{gr}(f).$$

(iv) *Die Menge M besitzt* lokale Parametrisierungen, *d. h. für alle $a \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von a, eine offene Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ (den* Parameterbereich*) und eine reguläre Abbildung $\Phi \colon T \to \mathbb{R}^n$ (die* lokale Parametrisierung*), so dass $\Phi(T) = M \cap U$ gilt. Dabei bedeutet* regulär*: Φ ist stetig differenzierbar,* $\operatorname{rnk} \Phi'(t) = k$ *für alle $t \in T$, Φ injektiv, $\Phi^{-1} \colon M \cap U \to T$ stetig.*

Definition. In der Situation von Satz 1.7.2(iv) definieren wir $V := \Phi(T) = M \cap U$. Den in dieser Bedingung formulierten Sachverhalt werden wir im Folgenden kurz dadurch bezeichnen, dass $\Phi\colon T \to V \subseteq M$ eine *lokale Parametrisierung* ist, wobei immer die Gleichheit $\Phi(T) = V$ mit einbezogen sein soll. Die Abbildung $\Phi^{-1}\colon V \to T$ heißt *Karte von* M; durch sie sind *lokale Koordinaten* von M gegeben. (Bei einer Karte in einem Atlas der Erde sieht man nur das Bild der Karte; die Urbilder, z. B. Städte u. s. w., sind durch Beschriftungen gekennzeichnet.)

Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, und gibt es eine Abbildung Φ wie in Satz 1.7.2(iv) mit $\Phi(T) = M$, so nennen wir Φ eine *globale Parametrisierung.*

Bemerkung. Im Allgemeinen besitzt eine Mannigfaltigkeit (immer 'Untermannigfaltigkeit'???) keine globale Parametrisierung. Dies ist zum Beispiel nie der Fall, falls $M \neq \emptyset$ kompakt ist. Hätte man in diesem Fall eine globale Parametrisierung so wäre das stetige Bild $T = \Phi^{-1}(M)$ der kompakten Menge M kompakt, im Widerspruch dazu, dass T offen ist. Daher besitzt zum Beispiel die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre S_{n-1} keine globale Parametrisierung.

Beweis von Satz 1.7.2. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $a \in M$, und seien U, h gemäß der Definition von Untermannigfaltigkeit gewählt. Nimmt man jetzt als Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ die letzten $n-k$ Komponenten der Funktion h, so hat g gerade die behaupteten Eigenschaften.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $a \in M$, und seien U, g gemäß (ii) gewählt. Da $g'(a)$ Rang $n-k$ hat, besitzt $g'(a)$ $n-k$ linear unabhängige Spalten, ohne Einschränkung die hinteren. Dies bedeutet, dass $\frac{\partial g}{\partial \hat{x}}(a)$ invertierbar ist. Aus dem Satz über implizite Funktionen (Zitat !!!???) folgt, dass es offene Umgebungen $\check{U}$ von $\check{a}$, $\hat{U}$ von $\hat{a}$ und eine Abbildung $f\colon \check{U} \to \hat{U}$ mit den behaupteten Eigenschaften gibt.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sei $a \in M$, und seien $\check{U}, \hat{U}$, f gemäß (iii) gewählt. Mit $U := \check{U} \times \hat{U}$, $T := \check{U}$,

$$\Phi(\check{x}) := \begin{pmatrix} \check{x} \\ f(\check{x}) \end{pmatrix}$$

gilt (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sei $a \in M$, seien U, T, Φ gemäß (iv) gewählt, und sei $c \in T$ mit $\Phi(c) = a$. Da $\Phi'(c)$ Rang k hat, hat diese Matrix k linear unabhängige Zeilen, ohne Einschränkung die oberen. Wir definieren $\Psi\colon T \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$,

$$\Psi(x) := \begin{pmatrix} \check{\Phi}(\check{x}) \\ \hat{\Phi}(\check{x}) + \hat{x} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\Psi'(x) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}'(\check{x}) & 0 \\ \hat{\Phi}'(\check{x}) & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

für $x \in T \times \mathbb{R}^{n-k}$, und daher ist $\Psi'(c, 0)$ invertierbar. Aus dem Satz von der lokalen Invertierbarkeit folgt, dass es eine offene Umgebung $V_1 \subseteq T \times \mathbb{R}^{n-k}$ von

$(c,0)$ gibt, so dass $\Psi\colon V_1 \to \Psi(V_1)$ ein Diffeomorphismus ist. Da $\Phi^{-1}\colon \Phi(T) \to T$ stetig ist, ist $\Psi(V_1 \cap (T \times \{0\})) = \Phi(\{t \in T;\ (t,0) \in V_1\})$ (relativ) offen in $\Phi(T)$, und daher gibt es eine offene Menge $\tilde U \subseteq \Psi(V_1) \cap U$ mit $\Psi(V_1 \cap (T \times \{0\})) = \Phi(T) \cap \tilde U = M \cap \tilde U$. Mit der offenen Umgebung $\tilde U$ von a, der offenen Menge $\tilde V := \Psi^{-1}(\tilde U) \subseteq \mathbb{R}^n$ und dem Diffeomorphismus $h := \Psi^{-1}\big|_{\tilde U}\colon \tilde U \to \tilde V$ gelten dann die in der Definition der Mannigfaltigkeit angegebenen Eigenschaften. $\square$

Die folgende Ausssage wird später benötigt. Sie liefert zugleich einen direkten Beweis der Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) von Satz 1.7.2.

1.7.3 Lemma. *Sei $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar. Sei $a \in U$, $\operatorname{rnk} g'(a) = n-k$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_a \subseteq U$ von a, eine Auswahl von Indizes $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$ und eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass durch*

$$h(x) := \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_k} \\ g(x) \end{pmatrix}$$

ein Diffeomorphismus $h\colon U_a \to V$ gegeben ist.

Beweis. Da $\operatorname{rnk} g'(a) = n-k$ ist, gibt es k Indizes $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$, so dass nach Streichen der Spalten $j_1, \ldots, j_k$ die verbleibende Matrix immer noch Rang $n-k$ hat. Nach Vertauschen der Koordinaten können wir annehmen, dass $j_l = l$ ist für alle $l = 1, \ldots, k$. Die Ableitung der im Lemma definierten Funktion h ist dann

$$h'(x) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{g'(x)} \end{pmatrix},$$

und daher ist $h'(a)$ invertierbar. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von der lokalen Invertierbarkeit. (Zitat???) $\square$

Ziel dieses Paragraphen ist es, das Integral für (geeignete) Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$ zu erklären. Dazu benötigen wir noch motivierende Vorbereitungen.

Bemerkungen. (a) Seien $a^1, \ldots, a^k \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\big((a^i \,|\, a^j)\big)_{i,j=1,\ldots,k}$$

Gram'sche Matrix von $a^1, \ldots, a^k$. Sei

$$A := \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & \cdots & a^k \end{pmatrix}$$

die Matrix mit den Spalten $a^1, \ldots, a^k$. Dann ist $A\big([0,1]^k\big)$ $(\subseteq \mathbb{R}^n)$ das *von $a^1, \ldots, a^k$ aufgespannte Parallelepiped.*

(b) Für $k = n$ ist $\operatorname{vol}_n\big(A\big([0,1]^n\big)\big) = |\det A|$. Dies folgt aus der Transformationsformel, falls $a^1, \dots, a^n$ linear unabhängig sind. Sind aber $a^1, \dots, a^n$ linear abhängig, so liegt $A\big([0,1]^k\big)$ in einem $(n-1)$-dimensionalen Teilraum, und daraus folgt, dass beide Seiten gleich 0 sind.

(c) Die Matrix

$$A^\top A = \Big(\big(A^\top A e_i \,|\, e_j\big)\Big) = \Big(\big(Ae_i \,|\, Ae_j\big)\Big)$$

ist positiv semidefinit ($\big(A^\top Ax \,|\, x\big) = |Ax|^2 \geqslant 0 \;\; (x \in \mathbb{R}^n)$), daher $\det\big(A^\top A\big) \geqslant 0$. Wir definieren

$$\gamma(A) := \sqrt{\det\big(A^\top A\big)} = \sqrt{\det\Big(\big(Ae_i \,|\, Ae_j\big)\Big)}\,.$$

Für $k = n$ gilt $\gamma(A) = |\det A|$.

(d) Man wird $\gamma(A)$ als k-dimensionales Volumen von $A\big([0,1]^k\big)$ ansehen wollen. Um dies zu motivieren, betrachten wir zunächst den Fall, dass $A\big([0,1]^k\big) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\}$ gilt. Bezeichnen wir mit $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Koordinaten, so gilt nämlich $(QA)^\top QA = A^\top Q^\top QA = A^\top A$, und $\operatorname{vol}_k\big(QA\big([0,1]^k\big)\big) = |\det(QA)| = \gamma(A)$ folgt aus Teil (b).

Außerdem sollte das k-dimensionale Volumen orthogonalinvariant sein, und die Definition von $\gamma(A)$ respektiert dies: Ist $B \in \mathbb{R}^{n\times d}$ eine orthogonale Matrix, so gilt $(BA)^\top(BA) = A^\top B^\top BA = A^\top E_n A = A^\top A$.

Definition. (Definition des Oberflächenintegrals, bei globaler Parametrisierung) Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\Phi\colon T \to M$ eine globale Parametrisierung von M. Sei

$$f \in C_c(M) \;\; \Big(= \big\{f\colon M \to \mathbb{R} \text{ stetig};\; \operatorname{spt} f = \overline{\{x \in M\,;\, f(x) \neq 0\}}^M \text{ kompakt}\big\}\Big)\,.$$

Dann ist $f \circ \Phi \in C_c(T)$, und wir definieren

$$\int\limits_M f(x)\,dS(x) := \int\limits_T f(\Phi(t))\gamma(\Phi'(t))\,dt\,.$$

(Dabei suggeriert dS das „Flächenelement“, wobei „S“ für surface steht.)

Veranschaulichung???

Die Unabhängigkeit dieser Definition von der Parametrisierung wird im nächsten Satz gezeigt.

1.7.4 Lemma. *Seien* $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$. *Dann gilt* $\gamma(AB) = \gamma(A)|\det B|$.

Beweis. $\gamma(AB)^2 = \det((AB)^\top AB) = \det(B^\top A^\top AB) = (\det B)^2 \det(A^\top A)$. $\square$

1.7.5 Satz. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und seien $\Phi_j\colon T_j \to M$ $(j = 1, 2)$ globale Parametrisierungen.*

(a) *Dann ist $g := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \colon T_1 \to T_2$ ein Diffeomorphismus.*

(b) *Für $f \in C_c(M)$ gilt*

$$\int_{T_1} f(\Phi_1(t))\gamma(\Phi_1'(t))\,dt = \int_{T_2} f(\Phi_2(t))\gamma(\Phi_2'(t))\,dt\,.$$

Beweis. (a) Sei $t_1 \in T_1$, $a := \Phi_1(t_1)$, $t_2 := \Phi_2^{-1}(a)$. Nach Definition der Untermannigfaltigkeit gibt es eine offene Umgebung U von a, eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $h\colon U \to W$, so dass $h(U \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = W' \times \{0\}$, mit einer geeigneten offenen Menge $W' \subseteq \mathbb{R}^k$, gilt. Ohne Einschränkung können wir $M = U \cap M$ annehmen (da die Eigenschaft, Diffeomorphismus zu sein, eine lokale Eigenschaft ist).

Nun ist $h \circ \Phi_j \colon T_j \to W'$ stetig differenzierbar, und $(h \circ \Phi_j)'(t) = h'(\Phi_j(t))\Phi_j'(t)$ hat Rang k für alle $t \in T_j$ $(j = 1, 2)$ und ist daher invertierbar. Nach dem Satz von der lokalen Invertierbarkeit (Zitat???) ist $h \circ \Phi_j$ ein Diffeomorphismus. Daher ist $g = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = \Phi_2^{-1} \circ h^{-1} \circ h \circ \Phi_1 = (h \circ \Phi_2)^{-1} \circ (h \circ \Phi_1)$ ein Diffeomorphismus.

(b) Nach Lemma 1.7.4 gilt

$$\gamma(\Phi_1'(t)) = \gamma\big(\Phi_2'(g(t))g'(t)\big) = \gamma\big(\Phi_2'(g(t))\big)|\det g'(t)|$$

für alle $t \in T_1$. Damit

$$\int_{T_1} f(\Phi_1(t))\,\gamma(\Phi_1'(t))\,dt = \int_{T_1} f\big(\Phi_2(g(t))\big)\,\gamma\big(\Phi_2'(g(t))\big)|\det g'(t)|\,dt$$

(Transformationsformel!)

$$= \int_{T_2} f(\Phi_2(s))\,\gamma(\Phi_2'(s))\,ds\,. \qquad \square$$

1.7.6 Beispiele. (a) Sei $k = 1$, $T = (a, b)$, $\Phi\colon (a, b) \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ Parametrisierung der 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M. Dann ist Φ ein regulärer Weg (???), und

$$\gamma(\Phi'(t)) = \left(\sum_{j=1}^{n} \Phi_j'(t)^2\right)^{1/2} = |\Phi'(t)|$$

ist der bei der Bogenlänge auftretende Gewichtsfaktor.

(b) Als Parametrisierung (eines Teiles) der Einheitssphäre S_2 in $\mathbb{R}^3$ wählen wir *sphärische Koordinaten*

$$\Phi\colon (-\pi, \pi) \times (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3\,,$$

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) := \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Funktion parametrisiert die S_2 bis auf den Schnitt von S_2 mit der Halbebene $\{x \in \mathbb{R}^3;\, x_2 = 0,\, x_1 \leqslant 0\}$. Als Ableitung erhalten wir

$$\Phi'(\varphi_2, \varphi_2) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$\Phi'(\varphi_2, \varphi_2)^\top \Phi'(\varphi_2, \varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos^2\!\varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

daher $\gamma(\Phi'(\varphi_1, \varphi_2)) = \cos\varphi_2$. Wir berechnen „naiv“ die Oberfläche der S_2:

$$\sigma_2 := \mathrm{vol}_2(S_2) = \int\limits_{S_2} 1\, dS = \int\limits_{\varphi_1=-\pi}^{\pi} \int\limits_{\varphi_2=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi_2 \, d\varphi_2 \, d\varphi_1 = 2\pi \sin\varphi_2 \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi\,.$$

Diese Rechnung ist aus zwei Gründen (noch) nicht gerechtfertigt: Erstens ist Φ keine globale Parametrisierung der S_2 (die es ja aus prinzipiellen Gründen nicht gibt), und zweitens ist die Funktion 1 auf dem parametrisierten Teil keine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Trotzdem ist diese Rechnung eine sehr einfache Möglichkeit, die Oberfläche der S_2 zu berechnen; siehe Beispiel 1.7.10 für die Rechtfertigung der Berechnungsmethode.

(c) Die folgende Parametrisierung (eines Teiles) der Einheitssphäre S_{n-1} durch *sphärische Koordinaten* in $\mathbb{R}^n$ verallgemeinert die in Teil (b) angegebene Parametrisierung:

$$\Phi_n \colon (-\pi, \pi) \times (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})^{n-2} \to S_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n\,,$$

$$\Phi_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) := \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdots \cos\varphi_{n-1} \\ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdots \cos\varphi_{n-1} \\ \sin\varphi_2 \cdots \cos\varphi_{n-1} \\ \vdots \\ \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \\ \sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung von $\gamma({\Phi_n}'(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}))$ bemerken wir, dass Φ_n rekursiv als

$$\Phi_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{n-1} \Phi_{n-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}) \\ \sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix},$$

geschrieben werden kann. (In dieser Darstellung wird deutlich, dass die Parametrisierung in n Dimensionen dadurch gewonnen wird, dass die $(n-1)$-dimensionale

Parametrisierung mit $\cos\varphi_{n-1}$ „moduliert“ und zugleich mit $\sin\varphi_{n-1}$ in die x_n-Richtung verschoben wird.) Für die Ableitung folgt

$$\begin{aligned}
&{\Phi_n}'(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi_{n-1}{\Phi_{n-1}}'(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-2}) & -\sin\varphi_{n-1}\Phi_{n-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-2}) \\ 0 & \cos\varphi_{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir behaupten, dass die Gram'sche Matrix $G_n \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ der Spaltenvektoren von ${\Phi_n}'(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$ die Diagonalmatrix

$$\operatorname{diag}\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdots\cos\varphi_{n-1})^2, (\cos\varphi_2\cdots\cos\varphi_{n-1})^2,\dots,\cos^2\varphi_{n-1},1\big)$$

ist und beweisen dies durch Induktion. Für $n=2$ ist dies leicht zu zeigen. (Für $n=3$ ist es schon in (b) gezeigt.) Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass die links oben stehende $(n-1)\times(n-1)$-Teilmatrix von G_n die Matrix $\cos^2\varphi_{n-1}G_{n-1}$ ist. Die letzte Spalte von ${\Phi_n}'$ ist orthogonal zu den anderen Spalten, da die partiellen Ableitungen von Φ_{n-1} Tangentialvektoren an S_{n-2} sind, wärend Φ_{n-1} selbst ein Normalenvektor ist. Dass der Betrag der letzten Spalte von ${\Phi_n}'$ gleich 1 ist, folgt aus $|\Phi_{n-1}|=1$. Dies zeigt die Behauptung über G_n.

Wir erhalten daraus

$$\gamma\big({\Phi_n}'(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\big) = \big(\det G_n\big)^{1/2} = \cos\varphi_2\cos^2\varphi_3\cdots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}\,.$$

Ähnlich wie in Teil (b) parametrisiert Φ_n die S_{n-1} bis auf gewisse „Nahtstellen“ (die nichts zu Oberfläche beitragen). Wieder berechnen wir „naiv“ das $(n-1)$-dimensionale Volumen der S_{n-1},

$$\begin{aligned}
\sigma_{n-1} := \operatorname{vol}_{n-1}(S_{n-1}) &= \int\limits_{S_{n-1}} 1\,dS \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cdots\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi_2\cdots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}\,d\varphi_{n-1}\cdots d\varphi_2\,d\varphi_1 \\
&= 2\pi c_{n-2}\cdots c_1\,,
\end{aligned}$$

wobei

$$c_k = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^k\varphi\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \sin^k\varphi\,d\varphi$$

die in Beispiel 1.3.10 benutzten Größen (Zahlen???) sind. In Beispiel 1.3.10 wurde gezeigt, dass $\omega_n = c_n c_{n-1}\cdots c_1$ gilt. Unter Berücksichtigung der auch in Beispiel 1.3.10 gezeigten Beziehung $c_n c_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$ erhält man damit

$$\sigma_{n-1} = 2\pi c_{n-2}\cdots c_1 = 2\pi\frac{n}{2\pi}c_n c_{n-1}\cdots c_1 = n\omega_n\,.$$

Diese Gleichung kann man so interpretieren, dass die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ als Pyramide der Höhe 1, mit Spitze im Nullpunkt, aufgefasst werden kann, und das Volumen entspricht dann dem Pyramidenvolumen, nämlich $(n-1)$-dimensionale Grundfläche mal Höhe, dividiert durch n.

Weiter ausgerechnet ergibt sich

$$\sigma_{n-1} = n\omega_n = n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

Die gleichen Vorbehalte wie in Teil (b) gelten auch gegen die hier ausgeführte Rechnung; wir werden in Beispiel 1.7.10 zeigen, wie diese Rechnung gerechtfertigt werden kann.

Um auch in dem Fall, dass sich eine Mannigfaltigkeit M nicht global parametrisieren lässt, das Integral auf $C_c(M)$ zu erklären, greifen wir auf die in Satz 1.5.5 behandelte Partition der Eins zurück.

Definition. (Definition des Oberflächenintegrals, allgemeiner Fall) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $f \in C_c(M)$. Da $\operatorname{spt} f$ kompakt ist, gibt es lokale Parametrisierungen $\Phi_j\colon T_j \to V_j \subseteq M$, mit in M offenen Mengen V_j $(j = 1, \ldots, m)$, so dass $\operatorname{spt} f \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_j$. Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C_c(M)$ eine der Überdeckung $(V_1, \ldots, V_m)$ untergeordnete Partition der Eins auf $\operatorname{spt} f$ (siehe Satz 1.5.5). Für $j = 1, \ldots, m$ ist dann $\varphi_j f \in C_c(M)$, $\operatorname{spt}(\varphi_j f)$ kompakt in V_j, und daher $\int\limits_{V_j} \varphi_j(x) f(x)\, dS(x)$ schon definiert. (Beachte, dass jedes der V_j selbst eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der globalen Parametrisierung Φ_j ist.) Dann definieren wir

$$\int\limits_M f(x)\, dx := \sum_{j=1}^m \int\limits_{V_j} (\varphi_j f)(x)\, dS(x)\,.$$

Wir haben zu zeigen, dass diese Definition von den lokalen Parametrisierungen unabhängig ist. Seien $\Psi_k\colon S_k \to W_k \subseteq M$ $(k = 1, \ldots, n)$ lokale Parametrisierungen wie oben, $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ eine entsprechende Partition der Eins. Aus Satz 1.7.5 folgt, dass dann $\int_{V_j \cap W_k} \varphi_j(x)\psi_k(x) f(x)\, dS(x)$ unabhängig davon ist, ob das Integral mit der Parametrisierung Φ_j oder Ψ_k berechnet wird. Daher gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \int\limits_{V_j} \varphi_j f\, dS &= \sum_{j=1}^m \int\limits_{V_j} \sum_{k=1}^n \psi_k \varphi_j f\, dS = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \int\limits_{V_j \cap W_k} \psi_k \varphi_j f\, dS \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \int\limits_{V_j \cap W_k} \psi_k \varphi_j f\, dS = \sum_{k=1}^n \int\limits_{W_k} \psi_k f\, dS\,.\end{aligned}$$

So befriedigend diese Definition des Oberflächenintegrales in struktureller Hinsicht ist, so problematisch ist sie für die Ausführung konkreter Rechnungen, zum

Beispiel für die Berechnung von Flächeninhalten. Daher ist es sinnvoll, die Menge der Funktionen, die man integrieren kann, zu erweitern. Wir gehen dafür hier nochmals den Weg des Riemann-Integrals, der im Augenblick für unsere Zwecke genügt. Wir bemerken als Vorspann, dass die Abbildung $C_c(M) \ni f \mapsto \int_V f\,dS$ wie vorher positiv ist. Dies und Satz 1.2.8 legen die folgende Definition der Riemann-Integierbarkeit nahe.

Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ erklären wir das *Oberintegral*

$$\overline{\int_M} f(x)\,dS(x) := \inf\Big\{ \int_M h\,dS\,;\; h \in C_c(M),\; f \leqslant h \Big\}$$

und das *Unterintegral*

$$\underline{\int_M} f(x)\,dS(x) := \sup\Big\{ \int_M g\,dS\,;\; g \in C_c(M),\; g \leqslant f \Big\}\,.$$

Die Funktion f heißt *Riemann-integrierbar*, falls $-\infty < \underline{\int}_M f(x)\,dS(x) = \overline{\int}_M f(x)\,dS(x) < \infty$ gilt, und in diesem Fall definieren wir $\int_M f(x)\,dS(x) := \overline{\int}_M f(x)\,dS(x)$.

Eine Menge $A \subseteq M$ heißt *Jordan-messbar*, falls $\mathbf{1}_A$ Riemann-integrierbar ist, und dann heißt $\mathrm{vol}_k(A) := \int_M \mathbf{1}_A\,dS$ das *k-dimensionale Volumen* von A. Die Menge A heißt *Jordan-Nullmenge*, falls A Jordan-messbar ist und zusätzlich $\mathrm{vol}_k(A) = 0$ gilt.

1.7.7 Bemerkungen. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(a) Wie in Satz 1.2.2 zeigt man: Die Menge $R(M)$ der Riemann-integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum, und die Abbildung

$$R(M) \ni f \mapsto \int f(x)\,dx$$

ist linear und positiv. (In Satz 1.2.2 zeigte man, dass sich diese Eigenschaften von der Menge $T(\mathbb{R}^n)$ der Treppenfunktionen auf die Riemann-integrierbaren Funktionen übertragen; hier ist es die Übertragung von den stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf die Riemann-integrierbaren Funktionen.)

(b) Besitzt die Mannigfaltigkeit M eine globale Parametrisierung $\Phi\colon T \to M$, so ist eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn $(f \circ \Phi)|\det \Phi'| \in R(T)$ ist.

(c) Im nicht-globalen Fall ist eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gibt eine kompakte Menge $K \subseteq M$, so dass $f|_{M\setminus K} = 0$.

(ii) Es gibt lokale Parametrisierungen $\Phi_j\colon T_j \to V_j \subseteq M$ $(j = 1,\dots,m)$, wobei $(V_j)_{j=1,\dots,m}$ eine offene Überdeckung von K ist, und eine der Überdeckung

$(V_1, \ldots, V_m)$ untergeordnete Partition der Eins $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C_c(M)$ auf K, so dass $(\varphi_j f) \circ \Phi |\det \Phi'|$ für alle $j = 1, \ldots, m$ Riemann-integrierbar auf T_j ist.

Die Bedingung (ii) ist weiter äquivalent zu der folgenden Bedingung.

(ii') Für jede lokale Parametrisierung $\Phi\colon T \to M$ und jede Funktion $\varphi \in C_c(T)$ ist $\varphi(f \circ \Phi)|\det \Phi'| \in R(T)$.

(d) In der Situation von (c) gilt

$$\int_M f(x)\,dx = \sum_{j=1}^m \int_{V_j} (\varphi_j f)(x)\,dS(x)\,.$$

Die folgenden beiden Aussagen zielen darauf ab, die in den Beispielen 1.7.6(b) und (c) ausgeführten Rechnungen zu rechtfertigen.

1.7.8 Lemma. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $U \subseteq M$ offen (im metrischen Raum M) und Jordan-messbar. Dann gilt*

$$\operatorname{vol}_k U = \sup\Big\{ \int_M \varphi\,dS\,;\ \varphi \in C_c(M),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 1,\ \operatorname{spt}\varphi \subseteq U \Big\}\,.$$

Beweis. Klar ist „ $\geqslant$ “.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi \in C_c(M)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \mathbf{1}_U$, $\int(\mathbf{1}_U - \varphi)\,dS \leqslant \varepsilon$. Für $j \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_j := (\varphi - \frac{1}{j}) \vee 0$. Dann gilt offenbar $\operatorname{spt}\varphi_j \subseteq U$, (wird hier die Norm zum ersten Mal benutzt??? nötig???) und aus $\|\varphi - \varphi_j\| \leqslant 1/j$ folgt $\int \varphi_j\,dS \to \int \varphi\,dS$. Damit folgt „ $\leqslant$ “. $\square$

Die folgende Aussage ist hilfreich zum Bestimmen von eventuellen Jordan-Nullmengen.

1.7.9 Lemma. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leqslant k \leqslant n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar, $f'(x)$ habe maximalen Rang für alle $x \in U$. Nach Satz 1.7.2, (i) $\Leftrightarrow$ (ii), ist dann $M := \{x \in U\,;\ f(x) = 0\}$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.*

Sei $g\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für alle $x \in M$ mit $g(x) = 0$ sei der Zeilenvektor $g'(x)$ linear unabhänging von den Zeilenvektoren der Matrix $f'(x)$.

Sei $A \subseteq M$ kompakt, $A \subseteq M_g := \{x \in M\,;\ g(x) = 0\}$.

Dann ist A eine Jordan-Nullmenge von M.

Beweis. Sei $a \in A$. Nach Lemma 1.7.3 gibt es eine offene Umgebung U_a von a, eine Auswahl von Indizes $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-1} \leqslant n$ und eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass durch

$$h(x) := \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_{k-1}} \\ g(x) \\ f(x) \end{pmatrix}$$

ein Diffeomorphismus $h\colon U_a \to V$ gegeben ist. Offenbar gilt $h(U_a \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\})$. Da g auf A verschwindet, folgt

$$h(U_a \cap A) \subseteq V \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0_{n-k+1}\}).$$

Durch $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(t) := h^{-1}(t,0)$, ist eine lokale Parametrisierung $\Phi\colon T \to U_a \cap M \subseteq M$ gegeben, und für alle $\varphi \in C_c(M)$ mit $\operatorname{spt}\varphi \subseteq U_a$ folgt

$$\int_M \varphi(x)\mathbf{1}_A(x)\,dS(x) = \int_T \varphi(\Phi(t))\mathbf{1}_A(\Phi(t))\gamma(\Phi'(t))\,dt = 0\,,$$

da $\mathbf{1}_A(\Phi(t)) = 0$ ist für $t \notin \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$.

Aufgrund von Bemerkung 1.7.7(d) wird $\int_M \mathbf{1}_A\,dS$ als endliche Summe solcher Integrale erhalten, und daher ergibt sich $\int_M \mathbf{1}_A\,dS = 0$. $\square$

1.7.10 Beispiel (Fortsetzung von Beispiel 1.7.6(c)). (a) Für $n \geqslant 2$, $j \in \{1,...,n\}$ sind die kompakten Mengen $\{x \in S_{n-1}\,;\ x_j = 0\}$ Jordan-Nullmengen: Wir wählen $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) := |x| - 1$, $g(x) := x_j$. Für $x \in S_{n-1}$ mit $x_j = 0$ sind dann $f'(x) = x$ und $g'(x) = e_j$ (j-ter Einheitsvektor) linear unabhängig. Aus Lemma 1.7.9 folgt die Behauptung.

(b) Mit der Parametrisierung Φ_n aus Beispiel 1.7.6(c) ist

$$S_{n-1} \setminus \Phi_n\big((-\pi,\pi) \times (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})^{n-2}\big)$$

eine kompakte Jordan-Nullmenge (da sie in der Vereinigung der in (a) behandelten Mengen enthalten ist). Mit $U := \Phi_n\big((-\pi,\pi) \times (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})^{n-2}\big)$ wenden wir Lemma 1.7.8 an und erhalten

$$\sigma_{n-1} = \operatorname{vol}_{n-1}(U) = \sup\Big\{\int \varphi\,dS\,;\ \varphi \in C(S_{n-1}),\ \operatorname{spt}\varphi \subseteq U\Big\}.$$

Für den zuletzt gegebenen Ausdruck für $\operatorname{vol}_{n-1}(U)$ ergibt sich jedoch

$$\operatorname{vol}_{n-1}(U) = \lim_{\delta\to 0} \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \int_{-\pi/2+\delta}^{\pi/2-\delta} \cdots \int_{-\pi/2+\delta}^{\pi/2-\delta} \cos\varphi_2 \cdots \cos^{n-2}\varphi_{n-1}\,d\varphi_{n-1}\cdots d\varphi_2\,d\varphi_1\,.$$

Und zwar ist jede kompakte Teilmenge $A \subseteq U$ in einer der Mengen

$$U_\delta := \Phi_n\big((-\pi+\delta,\pi-\delta) \times (-\tfrac{\pi}{2}+\delta,\tfrac{\pi}{2}-\delta)^{n-2}\big)$$

enthalten, und daraus erhält man „$\leqslant$“. Andererseits gibt es für jedes $\delta > 0$ eine Funktion $\varphi \in C_c(U)$ mit $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi(x) = 1$ für alle $x \in U_\delta$, und daraus folgt „$\geqslant$“.

Die Gleichheit

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \int\limits_{-\pi/2+\delta}^{\pi/2-\delta} \cdots \int\limits_{-\pi/2+\delta}^{\pi/2-\delta} \cos\varphi_2 \cdots \cos^{n-2}\varphi_{n-1}\, d\varphi_{n-1} \cdots d\varphi_2\, d\varphi_1$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdots \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi_2 \cdots \cos^{n-2}\varphi_{n-1}\, d\varphi_{n-1} \cdots d\varphi_2\, d\varphi_1$$

ergibt nun die Rechtfertigung der in Beispiel 1.7.6(c) angegebenen Rechnung.

(Hier geht es noch weiter, und zwar mit der Flächenberechnung, ohne auf $C_c(M)$ zurückgehen zu müssen.)

Im folgenden Satz wird gezeigt, wie γ in dem Fall berechnet wird, dass die Mannigfaltigkeit direkt als ein Graph gegeben ist.

1.7.11 Satz. *Sei* $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ *offen,* $f\colon T \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar. Wir erinnern daran, dass* $\mathrm{gr}(f) = \big\{(t, f(t))\,;\, t \in T\big\}$ *eine Hyperfläche ist, mit Parametrisierung* $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix};$$

siehe Beispiel 1.7.1(b).

Dann gilt $\gamma(\Phi'(t)) = \sqrt{1 + |\operatorname{grad} f(t)|^2}$. *Ist* A *eine Jordan-messbare Teilmenge von* $\mathrm{gr}(f)$, *so gilt (*pr *definieren ???)*

$$\mathrm{vol}_{n-1} A = \int\limits_{\mathrm{pr}_{n-1} A} \sqrt{1 + |\operatorname{grad} f(t)|^2}\, dt\,.$$

Für den Beweis stellen wir die folgende Gleichheit bereit.

1.7.12 Bemerkungen. (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$, $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, der zu den Spalten von A orthogonal ist, d. h. $v^\top A = 0$. Dann gilt

$$|\det(A\ v)| = \gamma(A)|v|\,.$$

Beweis. Es gilt $(A\ v)^\top (A\ v) = \begin{pmatrix} A^\top \\ v^\top \end{pmatrix} (A\ v) = \begin{pmatrix} A^\top A & 0 \\ 0 & v^\top v \end{pmatrix}$, und daher $\big(\det(A\ v)\big)^2 = \det(A^\top A)|v|^2$. □

(b) Seien A, v wie in (a), $v \neq 0$, $w \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$|\det(A\ w)| = \frac{|(w\,|\,v)|}{|v|}\gamma(A)\,.$$

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir $|v| = 1$ an. Da die Spalten der Matrix $\big(A\ \ (w - (w\,|\,v)v)\big)$ orthogonal zu v sind, gilt $\det(A\ w) - \det(A\ \ (w\,|\,v)v) = \det\big(A\ \ (w - (w\,|\,v)v)\big) = 0$, und daher $|\det(A\ w)| = |\det(A\ \ (w\,|\,v)v)| = |(w\,|\,v)|\,|\det(A\ v)| = |(w\,|\,v)|\gamma(A)$. □

Beweis von Satz 1.7.11. Es gilt $\Phi'(t) = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ f'(t) \end{pmatrix}$. Wähle $w := e_n$, $v := \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f(t) \\ -1 \end{pmatrix}$. Aus Bemerkung 1.7.12(b) folgt

$$1 = \det \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ f'(t) & 1 \end{pmatrix} = \frac{|(w\,|\,v)|}{|v|}\,\gamma\begin{pmatrix} E_{n-1} \\ f'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{|v|}\gamma(\Phi'(t))\,,$$

$$\gamma(\Phi'(t)) = |v| = \sqrt{1 + |\operatorname{grad} f(t)|^2}\,.$$ □

Wir wollen jetzt noch eine andere Möglichkeit vorstellen, $\gamma(A)$ zu berechnen. Als Vorspann dazu dient die folgende Identität.

1.7.13 Satz. *Seien* $1 \leqslant k \leqslant n$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. *Für* $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n$ *sei* $A_{j_1 j_2 \dots j_k}$ *die* $k\times k$*-Matrix, die nur die Zeilen* $j_1, j_2, \dots, j_k$ *der Matrix* A *enthält. Dann gilt*

$$\det(A^\top B) = \sum_{1\leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n} \det A_{j_1 j_2 \dots j_k} \det B_{j_1 j_2 \dots j_k}$$

*(*Lagrange-Identität*,* Satz von Cauchy-Binet ???*).*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass sowohl die linke als auch die rechte Seite der behaupteten Gleichung linear in jeder Spalte von A und B sind. Daher genügt es, die Gleichung für Matrizen der Form

$$A = (e_{\ell_1}\ \cdots\ e_{\ell_k})\,, \qquad B = (e_{m_1}\ \cdots\ e_{m_k})$$

($e_1, \dots, e_n$ Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$???) zu zeigen. Dabei ohne Einschränkung $\ell_1 < \cdots < \ell_k$, $m_1 < \cdots < m_k$. (Sind zwei Indizes gleich, so sind beide Seiten gleich Null; anderenfalls wende man eine geeignete Permutation an.) Für diesen Fall sind aber beide Seiten gleich Eins, falls $\ell_j = m_j$ für alle $j = 1, \dots, k$, und sonst sind beide Seiten gleich Null. □

1.7.14 Folgerung. *Seien* $1 \leqslant k \leqslant n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$. *Dann gilt*

$$\gamma(A) = \Big(\sum_{1\leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n} (\det A_{j_1 j_2 \dots j_k})^2\Big)^{1/2}.$$

Beweis. Klar mit Satz 1.7.13. □

Bemerkung. Mit Folgerung 1.7.14 erhält man auch die in Satz 1.7.11(b) bewiesene Formel: Aus $\Phi'(t) = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ f'(t) \end{pmatrix}$ sieht man leicht $\gamma(\Phi'(t)) = \sqrt{1 + |\operatorname{grad} f(t)|^2}$.

1.8 Berechnung von Volumina k-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

In der Behandlung in Abschnitt 1.7 tritt bisher eine merkwürdige Ambivalenz auf. Einerseits ist die Einführung der Theorie der Integration von Funktionen auf Mannigfaltigkeiten recht befriedigend, andererseits kann man Berechnungen von Volumina von Untermannigfaltigkeiten formal ausführen, die noch nicht gerechtfertig werden können. Wir wollen dies zunächst an zwei Beispielen illustrieren.

1.8.1 Beispiel. In $\mathbb{R}^3$ sei die Mannigfaltigkeit M, ein „Zylindermantel", durch die Nullstellen der Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2\times(0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^2+y^2-1$, gegeben. Durch $\Phi\colon (-\pi,\pi)\times(0,1) \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(\varphi,t) = (\cos\varphi, \sin\varphi, t)^\top$, ist eine Parametrisierung des Zylinders gegeben, bis auf eine „kleine Menge". Die formale Rechnung liefert

$$\gamma(\Phi'(\varphi,t)) = \gamma\left(\begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1\,,$$

$$\operatorname{vol}_2 M = \int\limits_M 1\,dS = \int\limits_{(-\pi,\pi)\times(0,1)} 1\,d(\varphi,t) = 2\pi\,.$$

Bei dieser Rechnung gibt es zwei Unstimmigkeiten. Die eine ist, dass Φ ja gar nicht die ganze Mannigfaltigkeit parametrisiert. Wie mit diesem Problem umgegangen werden kann, wurde in Beispiel 1.7.10 dargestellt. Die andere liegt in der Tatsache, dass die Funktion 1 auf M nicht Riemann-integrierbar und damit $\operatorname{vol}_2 M$ gar nicht definiert ist. Für dieses Problem könnte man sich auf den Standpunkt stellen, dass ja M ein Jordan-messbarer Teil einer größeren Mannigfaltigkeit ist, nämlich des „zweiseitig unendlichen Zylinders" $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\, x^2+y^2 = 1\big\}$, und dass $\operatorname{vol}_2 M$ der Flächeninhalt dieses Teils sein soll.

1.8.2 Beispiel. In $\mathbb{R}^3$ sei die Mannigfaltigkeit M, ein „Kegelmantel", als Graph der Funktion $f\colon B_{\mathbb{R}^2}(0,1)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ gegeben. Die formale Rechnung, mit Benutzung von Satz 1.7.11, liefert

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{1}{|(x,y)|}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,,$$

$$\operatorname{vol}_2 M = \int\limits_M 1\,dS = \int\limits_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)\setminus\{0\}} 1\,\sqrt{2}\;d(x,y) = \sqrt{2}\pi.$$

Bei dieser Rechnung gibt es nur die Unstimmigkeit, dass die Funktion 1 auf M nicht Riemann-integrierbar und damit $\operatorname{vol}_2 M$ nicht definiert ist. In diesem Fall kann man keine Mannigfaltigkeit finden, von der M eine Jordan-messbare Teilmenge ist.

In beiden Beispielen möchte man begründen, dass die einfache Rechnung das richtige Ergebnis geliefert hat, und dabei möchte man möglichst in Beispiel 1.8.1 nicht auf die Methode von Beispiel 1.7.10 zurück greifen müssen.

Das Volumen von nichtkompakten Mannigfaltigkeiten definieren wir in analoger Weise zu Abschnitt 1.6 über das uneigentliche Riemann-Integral auf Mannigfaltigkeiten.

Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $f\colon M \to \mathbb{R}$.

(a) Ist $f \geqslant 0$, so heißt f *uneigentlich Riemann-integrierbar*, $f \in R_{\mathrm{ua}}(M)$, wenn $\varphi f \in R(M)$ für alle $\varphi \in C_c(M)$, und

$$\int\limits_M f(x)\,dx := \sup\Big\{\int\limits_M \varphi(x) f(x)\,dx\,;\ \varphi \in C_c(M),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 1\Big\} < \infty\,.$$

(Man sieht sofort, dass für den Fall, dass f Riemann-integrierbar ist, die rechte Seite das schon definierte Integral ergibt.)

(b) Die Funktion f heißt *uneigentlich absolut Riemann-integrierbar*, $f \in R_{\mathrm{ua}}(M)$, wenn $\varphi f \in R(M)$ für alle $\varphi \in C_c(M)$, und $|f| \in R_{\mathrm{ua}}(M)$. Ist dies erfüllt, so gilt offenbar $f^{\pm} \in R_{\mathrm{ua}}(M)$, und wir definieren

$$\int\limits_M f(x)\,dx := \int\limits_M f^+(x)\,dx - \int\limits_M f^-(x)\,dx\,.$$

(c) Falls $\mathbf{1}_M \in R_{\mathrm{ua}}(M)$ ist, definieren wir das *k-dimensionale Volumen von* U, $\mathrm{vol}_k(M) := \int_M 1\,dx$. Diese Definition ist konsistent mit der bisherigen Definition. Ist nämlich U Jordan-messbar als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so zeigt Satz 1.6.3 $\int \mathbf{1}_U(x)\,dx = \int_U 1\,dx$.

1.9 Integration in Schichten (ein Desintegrationssatz)

Als erstes soll hier eine Version des Satzes von Fubini bewiesen werden, auch Integration in Schichten, professionell Desintegrationssatz genannt. Dieser Satz wird im nächsten Paragraphen beim Beweis des Gaußschen Integralsatzes benutzt.

1.9.1 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,* $\mathrm{grad}\, g(x) \neq 0$ *für alle $x \in \Omega$. Somit ist*

$$M_r := \big\{x \in \Omega\,;\ g(x) = r\big\}$$

eine Hyperfläche für alle $r \in \mathbb{R}$ (siehe Satz 1.7.2(ii)).

Sei $f \in C_c(\Omega)$. Dann ist die Funktion

$$\mathbb{R} \ni r \mapsto \int\limits_{\xi \in M_r} f(\xi) \frac{1}{|\mathrm{grad}\, g(\xi)|}\, dS(\xi)$$

stetig mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}$, *und es gilt*

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\xi\in M_r} f(\xi)\frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi)\,dr\,.$$

Wir wollen eine anschauliche Begründung des Gewichtsfaktors $\frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}$ geben. Je größer $|\operatorname{grad} g(\xi)|$ ist, desto enger liegen die Niveauflächen M_r. Die Division durch $|\operatorname{grad} g(\xi)|$ bewirkt, dass solche Stellen bei der Integration über r nicht überbewertet werden.

Vor dem Beweis sollen einige Anwendungen gegeben werden.

Beispiele. (a) *Verallgemeinerte Polarkoordinaten*

Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f(x)\,dx = \int\limits_{r=0}^{\infty} \int\limits_{\xi\in rS_{n-1}} f(\xi)\,dS(\xi)\,dr = \int\limits_{r=0}^{\infty} \int\limits_{\eta\in S_{n-1}} f(r\eta)\,dS(\eta)r^{n-1}\,dr$$

Beweis. Für die erste Gleichheit benutzen wir Satz 1.9.1 mit $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $g(x) := |x|$. Dann ist $M_r = rS_{n-1}$ für $r > 0$, $M_r = \emptyset$ für $r \leqslant 0$, $\operatorname{grad} g(x) = \frac{x}{|x|} \neq 0$ für alle $x \in \Omega$.

Für die zweite Gleichheit bemerken wir: Ist $\Phi\colon T \to S_{n-1}$ eine lokale Parametrisierung, $r > 0$, so ist $r\Phi\colon T \to rS_{n-1}$ eine lokale Parametrisierung, und es gilt $\gamma((r\Phi)'(t) = r^{n-1}\gamma(\Phi'(t))$ für alle $t \in T$. □

(b) Mit Teil (a) (allerdings angewendet auf eine Funktion, die dort nicht vorgesehen ist; siehe unten) berechnen wir

$$\omega_n = \int\limits_{|x|\leqslant 1} dx = \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{\xi\in S_{n-1}} dS(\xi)r^{n-1}\,dr = \sigma_{n-1}\int\limits_{0}^{1} r^{n-1}\,dr = \frac{\sigma_{n-1}}{n}\,.$$

Diese Gleichheit war schon in Beispiel 1.7.6(c) erhalten und interpretiert worden.

(Die Vorbehalte lassen sich in diesem Fall relativ leicht beseitigen, wenn man einerseits die Konvergenz

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} dx\,,$$

andererseits die folgende Bemerkung 1.9.2(a) berücksichtigt.)

(c) Hier wird nochmals σ_{n-1} berechnet, und zwar mit einer direkten Rechnung, die auf Induktion verzichtet und einfacher als die in Beispiel 1.7.6(c) ist. (wieder nicht ganz anwendbar???) Wir rechnen

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\,dx_1 \cdots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2}\,dx_n = \sqrt{\pi}^{\,n}\ ,$$

aber auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} e^{-r^2}\,dS(\xi) r^{n-1}\,dr$$

(Substitution $t = r^2$, $dt = 2r\,dr$)

$$= \sigma_{n-1} \int_0^\infty \tfrac{1}{2} t^{\frac{n-2}{2}} e^{-t}\,dt = \sigma_{n-1} \tfrac{1}{2} \Gamma(\tfrac{n}{2}),$$

und damit

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Mit dieser Rechnung und Teil (c) ergibt sich auch in direkterer Weise als weiter oben

$$\omega_n = \frac{\sigma_{n-1}}{n} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Beweis von Satz 1.9.1. (i) Wir zeigen zunächst den lokalen Teil, in dem wir voraussetzen, dass es eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, außerdem $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und einen Diffeomorphismus $h\colon \Omega \to V := T \times (a,b)$ gibt, so dass die vorgegebene Funktion g gerade die letzte Komponente von h ist; wir setzen $\Phi := h^{-1}$.

Wir bemerken, dass $\Phi_r := \Phi(\,\cdot\,, r)\colon T \to M_r$ eine (globale) Parametrisierung von M_r ist. Aus der Gleichung $g(\Phi(t,r)) = r$ folgt $g'(\Phi(t,r))\Phi'(t,r) = e_n^\top$. Damit sind in der Matrix

$$\Phi'(t,r) = \big((\Phi_r)'(t) \;\; \partial_n\Phi(t,r)\big) = \big(\partial_1\Phi(t,r) \;\; \partial_2\Phi(t,r) \;\; \cdots \;\; \partial_n\Phi(t,r)\big)$$

die Vektoren $\partial_1\Phi(t,r), \dots, \partial_{n-1}\Phi(t,r)$ orthogonal zu $\operatorname{grad} g(\Phi(t,r)) = g'(\Phi(t,r))^\top$, und es gilt $\big(\partial_n\Phi(t,r)\,\big|\,\operatorname{grad} g(\Phi(t,r))\big) = 1$. Aus Bemerkung 1.7.12(b) folgt nun

$$|\det \Phi'(t,r)| = \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\Phi_r(t))|}\,\gamma\big({\Phi_r}'(t)\big),$$

und daher gilt

$$\begin{aligned}\int_{M_r} f(\xi)\frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi) &= \int_T f(\Phi_r(t))\frac{1}{|\operatorname{grad} g(\Phi_r(t))|}\,\gamma\big({\Phi_r}'(t)\big)\,dt \\ &= \int_T f(\Phi(t,r))|\det \Phi'(t,r)|\,dt,\end{aligned}$$

für alle $r \in (a,b)$.

Somit folgt die Stetigkeit der Funktion

$$r \mapsto \int_{M_r} f(\xi) \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|} \, dS(\xi)$$

aus Satz 1.3.5, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x)\, dx &= \int_V f(\Phi(z)) |\det \Phi'(z)| \, dz \\
&= \int_a^b \int_{t \in T} f(\Phi(t,r)) |\det \Phi'(t,r)| \, dt \, dr = \int_{\mathbb{R}} \int_{M_r} f(\xi) \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|} \, dS(\xi) \, dr \,,
\end{aligned}$$

wobei in der ersten Gleichheit die Transformationsformel (Satz 1.4.1, in der zweiten Gleichheit der Satz von Fubini (Satz 1.3.1) benutzt worden sind.

(ii) Jeder Punkt $x^0 \in \Omega$ besitzt eine Umgebung der in (i) behandelten Art. Dies folgt aus Lemma 1.7.3, wenn man noch beobachtet, das die dort erhaltene Menge V verkleinert werden kann zu einer Menge der Form $V = T \times (a,b)$, mit $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(Alternative, wobei allerdings der Beweis von Lemma 1.7.3 mehr oder weniger wiederholt würde: (ii) Jeder Punkt $x^0 \in \Omega$ besitzt eine Umgebung der in (i) behandelten Art. Um dies zu zeigen, wählen wir $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\partial_j g(x^0) \neq 0$. Dann ist die Ableitung von

$$h(x) := \big(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n, g(x)\big)^\top$$

in x^0 invertierbar, und nach dem Satz von der lokalen Invertierbarkeit (Zitat???) gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \Omega$ von x^0 und eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von $h(x^0)$, so dass $h\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist; ohne Einschränkung kann angenommen werden, dass V von der Form $V = T \times (a,b)$ ist, mit $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.)

(iii) Wegen (ii) gibt es zu der kompakten Menge $\operatorname{spt} f$ eine endliche Überdeckung $(U_j)_{j=1,\ldots,m}$ mit Mengen der in (i) behandelten Art. Nach Satz 1.5.5 gibt es eine der Überdeckung $(U_j)_{j=1,\ldots,m}$ untergeordnete Partition der Eins $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,m}$ auf $\operatorname{spt} f$, mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C_c(\Omega)$.

Für alle $j = 1, \ldots, m$ ist

$$r \mapsto \int_{M_r} \varphi_j(\xi) f(\xi) \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|} \, dS(\xi) = \int_{U_j \cap M_r} \varphi_j(\xi) f(\xi) \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|} \, dS(\xi)$$

stetig, und es gilt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \varphi_j(x) f(x)\, dx &= \int\limits_{U_j} \varphi_j(x) f(x)\, dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{U_j \cap M_r} \varphi_j(\xi) f(\xi) \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)\, dr \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{M_r} \varphi_j(\xi) f(\xi) \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)\, dr\,,
\end{aligned}
$$

nach Teil (i) des Beweises. Die Behauptungen folgen nun wegen $f = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j f$. $\square$

1.9.2 Bemerkungen. Seien M und g wie in Satz 1.9.1.

(a) Sei $f \in R(\Omega)$. Dann ist

$$
\mathbb{R} \ni r \mapsto \overline{\int\limits_{M_r}} f(\xi) \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)
$$

Riemann-integrierbar, und es gilt

$$
\int\limits_{\Omega} f(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\int\limits_{M_r}} f(\xi) \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)\, dr\,.
$$

Diese Aussage beweist man in derselben Weise wie den Satz von Fubini (Satz 1.3.1).

(b) Die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ habe folgende Eigenschaften:

(i) $f|_{\{x\in\Omega;\ g(x)\leqslant 0\}}$ ist stetig,

(ii) $f|_{\{x\in\Omega;\ g(x)>0\}} = 0$,

(iii) es gibt $K \subseteq \Omega$ kompakt, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \Omega \setminus K$.

Dann ist f ist Riemann-integrierbar auf Ω, die Funktion

$$
(-\infty, 0] \ni r \mapsto \int\limits_{M_r} f(\xi) \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)
$$

ist stetig, und es gilt

$$
\int\limits_{\Omega} f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{\xi \in M_r} f(\xi) \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)\, dr\,.
$$

Diese Aussage beweist man zunächst für den Fall, dass Ω die Eigenschaft hat wie in Beweisteil (i) des Beweises von Satz 1.9.1. Dabei werden noch Satz 1.3.5 und Bemerkung 1.7.7(b) verwendet. Der Rest des Beweises ist analog zu Beweisteil (iii) des Beweises von Satz 1.9.1.

1.10 Der Gauß'sche Integralsatz

Zur Formulierung des Gauß'schen Integralsatzes benötigen wir noch den Begriff der Menge mit glattem Rand.

Definition. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. A *hat glatten Rand*, wenn folgendes gilt: Für jeden Punkt $a \in \partial A$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$, so dass

(i) $\operatorname{grad} g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$,

(ii) $A \cap U = \bigl\{x \in U\,;\ g(x) \leqslant 0\bigr\}$.

Ist dies erfüllt, und sind $a \in \partial A$, U und g wie in der Definition, so gilt $\partial A \cap U = \bigl\{x \in U\,;\ g(x) = 0\bigr\}$. (Da $U_- := \{x \in U\,;\ g(x) < 0\}$ eine offene Teilmenge von A ist, gilt $U_- \subseteq \operatorname{int} A$ und daher $U_- \cap \partial A = \emptyset$. Ebenso ist $U_+ := \{x \in U\,;\ g(x) > 0\}$ Teilmenge der offenen Menge $\mathbb{R}^n \setminus A$, und daher gilt $U_+ \cap \partial A = \emptyset$. Sei schließlich $x \in U$, $g(x) = 0$. Dann ist $x \in A$. Da $\operatorname{grad} g(x) \neq 0$ ist, enthält jede Umgebung von x Punkte in $U_+ \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$, und daher gilt $x \in \partial A$.)

Aus dem vorangehenden Absatz und Satz 1.7.2 folgt, dass ∂A eine Hyperfläche ist.

Definition. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge mit glattem Rand. Seien $a \in \partial A$, U und g wie in der obigen Definition. Dann ist

$$\nu(a) := \frac{1}{|\operatorname{grad} g(a)|} \operatorname{grad} g(a)$$

der *äußere Einheits-Normalenvektor* (Normalen-Einheitsvektor???) an A in a. (Dieser ist unabhänging von g; siehe Aufgabe ???.) Offenbar ist das *äußere Einheitsnormalenfeld*

$$\partial A \ni x \mapsto \nu(x) \in \mathbb{R}^n$$

stetig.

1.10.1 Satz. (Gauß'scher Integralsatz) *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit glattem Rand. Sei $F\colon A \to \mathbb{R}^n$ stetig, für alle $j = 1, \dots, n$ sei $F_j|_{\operatorname{int} A}$ stetig partiell differenzierbar nach der j-ten Koordinate, und* $\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^n \partial_j F_j$ *sei stetig fortsetzbar auf A. Dann gilt*

$$\int_A \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial A} (F(x)\,|\,\nu(x))\, dS(x)\,.$$

Bemerkungen. (a) Die hier wirklich benötigte Bedingung an F für die Gültigkeit des Integralsatzes von Gauß ist noch etwas schwächer, wie im Folgenden erläutert. Und zwar braucht man neben der Stetigkeit von F auf A nur die Existenz der

Divergenz „im schwachen Sinn“ (oder „Distributions-Sinn“): Es gebe eine stetige Funktion $g \in C(A)$, so dass

$$\int g\varphi\,dx = -\int (F(x)\,|\,\operatorname{grad}\varphi)\,dx$$

für alle $\varphi \in C_c^1(\operatorname{int} A)$ gilt. Mit der „Divergenz im schwachen Sinn“ $\operatorname{div} F := g$ gilt dann die Behauptung von Satz 1.10.1.

(b) Neben dem glatten Anteil darf ∂A auch einen „kleinen“ singulären Anteil besitzen. Zum Beispiel gilt der Gauß'sche Integralsatz für den Einheitswürfel und ist dafür leicht zu beweisen, wobei wir hier von der stärkeren Voraussetzung ausgehen, dass F in einer offenen Umgebung des Einheitswürfels $[0,1]^n$ stetig differenzierbar ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{[0,1]^n} \partial_1 F_1(x)\,dx &= \int\limits_{\hat{x}\in[0,1]^{n-1}} \int\limits_{x_1=0}^{1} \partial_1 F_1(x_1,\hat{x})\,dx_1\,d\hat{x} \\ &= \int\limits_{\hat{x}\in[0,1]^{n-1}} (F_1(1,\hat{x}) - F_1(0,\hat{x}))\,d\hat{x} = \int\limits_{\partial[0,1]^n} F_1(\xi)\nu_1(\xi)\,dS(\xi)\,.\end{aligned}$$

Dabei ist $\nu_1(\xi)$ die erste Komponente der äußeren Einheitsnormale. Man beachte, dass auf dem Teil $\big\{\xi \in \partial[0,1]^n\,;\ 0 < \xi_1 < 1\big\}$ die erste Komponente von $\nu(\xi)$ verschwindet. Entsprechendes gilt für die anderen Komponenten von F.

Für den Beweis des Gauß'schen Integralsatz benötigen wir noch Hilfsaussagen, die eigentlich jeweils Spezialfälle des Gauß'schen Integralsatzes sind.

1.10.2 Lemma. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C_c(U)$, $j \in \{1,\dots,n\}$, und f stetig differenzierbar nach der j-ten Variablen. Dann gilt $\int_U \partial_j f(x)\,dx = 0$.*

Beweis. Die Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^n$ durch Null ist eine C_c^1-Funktion. Daher können wir ohne Einschränkung $U = \mathbb{R}^n$ annehmen.

Ist $n = 1$, so folgt die Behauptung sofort aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Im Fall $n > 1$ genügt es, den Fall $j = 1$ zu betrachten. Aus dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_1 f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_1 f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\,d(x_2,\dots,x_n) = 0\,,$$

da im letzten Term das innere Integral wegen des eindimensionalen Falls (Falles???) verschwindet. $\square$

Im Folgenden verwenden wir, für eine Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$, die Bezeichungen $[g < 0] := \big\{x \in U\,;\ g(x) < 0\big\}$, $[g \leqslant 0] := \big\{x \in U\,;\ g(x) \leqslant 0\big\}$, u.s.w.

1.10.3 Lemma. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $g\colon U \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar,* $\operatorname{grad} g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in U$*,* $F\colon U \to \mathbb{R}^n$*,*

(i) $F|_{[g\leqslant 0]}$ *ist stetig, und* $F|_{[g>0]} = 0$*,*

(ii) *es gibt eine kompakte Menge* $K \subseteq U$*, so dass* $F|_{U\setminus K} = 0$*,*

(iii) $F_j|_{[g<0]}$ *ist stetig differenzierbar nach der* j*-ten Variablen,*

(iv) $\operatorname{div}(F|_{[g<0]})$ *ist stetig fortsetzbar auf* $[g \leqslant 0]$*.*

Dann gilt

$$\int\limits_{[g\leqslant 0]} \operatorname{div} F(x)\,dx = \int\limits_{[g=0]} (F(x)\,|\,\nu(x))\,dS(x)\,,$$

wobei $\nu(x)$ *die Einheitsnormale an* $[g = 0]$ *in Richtung des Anstiegs der Funktion* g *ist.*

Für den Beweis benötigen wir noch Hilfsmittel. Das erste dieser Hilfsmittel stellen wir in der folgenden Bemerkung in wesentlich allgemeinerer Form zur Verfügung, als es im Augenblick benötigt wird.

1.10.4 Bemerkungen. (a) Es gibt eine Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, η monoton wachsend, $\eta|_{(-\infty,0]} = 0$, $\eta|_{[1,\infty)} = 1$.

Um dies einzusehen, sei daran erinnert, dass die Funktion $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t \leqslant 0\,, \\ e^{-1/t} & \text{für } 0 < t\,, \end{cases}$$

eine beliebig differenzierbare, monoton wachsende Funktion ist. Definiert man $\alpha_1(t) := e\alpha(t)$, so bleiben die vorgehenden Eigenschaften erhalten, und außerdem gilt $\alpha_1(1) = 1$. Durch Spiegelung und Verschiebung erhält man eine Funktion $\alpha_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, α_2 monoton wachsend, $\alpha_2(0) = 0$, $\alpha_2(t) = 1$ für $t \geqslant 1$. Definiert man $\eta := \alpha_1 \circ \alpha_2$ (oder auch $\eta := \alpha_2 \circ \alpha_1$), so ist leicht zu sehen, dass η die gewünschten Eigenschaften hat.

(b) Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, η monoton fallend, $\eta\big|_{(-\infty,-1]} = 1$, $\eta\big|_{[-\frac{1}{2},\infty)} = 0$. (Solche Funktionen existieren nach Teil (a).) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\eta_k(r) := \eta(kr)$ $(r \in \mathbb{R})$. Sei $h \in C_c(-\infty, 0]$. Dann gilt

(i) $\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^0 h(r)\eta_k(r)\,dr = \int_{-\infty}^0 h(r)\,dr$,

(ii) $\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^0 h(r)\eta_k'(r)\,dr = -h(0)$.

Für (i) schätzen wir ab: $|\int_{-\infty}^0 h(r)\,dr - \int_{-\infty}^0 h(r)\eta_k(r)\,dr| \leqslant \int_{-1/k}^0 |h(r)|\,dr \to 0$ für $k \to \infty$.

Für (ii) bemerken wir $\int_{-1/k}^0 |\eta_k'(r)|\,dr = 1$ und schätzen ab: $|-h(0) - \int_{-\infty}^0 h(r)\eta_k'(r)\,dr| = |\int_{-1/k}^0 (h(0) - h(r))\eta_k'(r)\,dr| \leqslant \max\limits_{-1/k\leqslant r\leqslant 0} |h(0) - h(r)| \to 0$ für $k \to \infty$.

Beweis von Lemma 1.10.3. Sei (η_k) eine Folge wie Bemerkung 1.10.4. Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \mathbb{N}$ ist dann $(\eta_k \circ g)F_j \in C_c(U)$ stetig differenzierbar nach der j-ten Variablen. (Dabei beachte man, dass $\{x \in U\,;\, \eta_k(g(x))F_j(x) \neq 0\} \subseteq [g \leqslant -\frac{1}{2k}] \cap K$ ist.) Nach Lemma 1.10.2 gilt

$$0 = \int\limits_U \partial_j((\eta_k \circ g)F_j)\,dx = \int\limits_{[g<0]} \partial_j(\eta_k \circ g)F_j\,dx + \int\limits_{[g<0]} (\eta_k \circ g)\partial_j F_j\,dx\,.$$

Durch Summieren über j und unter Benutzung von $\partial_j(\eta_k \circ g) = (\eta_k' \circ g)\partial_j g$ erhalten wir

$$\int\limits_{[g<0]} (\eta_k' \circ g)(\operatorname{grad} g \,|\, F)\,dx + \int\limits_{[g<0]} (\eta_k \circ g)\operatorname{div} F\,dx = 0\,. \tag{1.10.1}$$

Der erste Term in (1.10.1) wird mit Satz 1.9.1 umgeformt zu

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{\xi \in [g=r]} \eta_k'(g(\xi))\big(\operatorname{grad} g(\xi) \,\big|\, F(\xi)\big)\frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi)\,dr\\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} \eta_k'(r)\Bigg\{\int\limits_{\xi \in [g=r]} \big(\operatorname{grad} g(\xi) \,\big|\, F(\xi)\big)\frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi)\Bigg\}\,dr\,.\end{aligned}$$

Der in geschweiften Klammern stehende Term ist nach Bemerkung 1.9.2(b) stetig auf $(-\infty, 0]$ als Funktion von r, und nach Bemerkung 1.10.4(b) konvergiert, für $k \to \infty$, der gesamte Ausdruck gegen

$$-\int\limits_{[g=0]} \Big(\frac{\operatorname{grad} g(\xi)}{|\operatorname{grad} g(\xi)|} \,\Big|\, F(\xi)\Big)\,dS(\xi) = -\int\limits_{[g=0]} \big(F(\xi) \,\big|\, \nu(\xi)\big)\,dS(\xi)\,.$$

Der zweite Term in (1.10.1) wird mit Satz 1.9.1 umgeformt zu

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{\xi \in [g=r]} \eta_k(g(\xi))\operatorname{div} F(\xi)\frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi)\,dr\\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} \eta_k(r)\Bigg\{\int\limits_{\xi \in [g=r]} \operatorname{div} F(\xi)\frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi)\Bigg\}\,dr\,,\end{aligned}$$

und unter Benutzung von Bemerkung 1.9.2(b) und Bemerkung 1.10.4(b) erhalten wir, dass für $k \to \infty$ der gesamte Ausdruck gegen

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{\xi \in [g=r]} \operatorname{div} F(\xi)\frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi)\,dr = \int\limits_{[g \leqslant 0]} \operatorname{div} F(x)\,dx$$

konvergiert.

Aus Gleichung (1.10.1) und den soeben gezeigten Konvergenzen folgt die im Satz behauptete Gleichung. □

Als letztes Hilfsmittel zum Beweis von Satz 1.10.1 benötigen wir noch die folgende C^∞-Partition der Eins.

1.10.5 Satz. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $(U_j)_{j=1,\dots,m}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es $\varphi_1,\dots,\varphi_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)_+$ mit $\operatorname{spt}\varphi_j \subseteq U_j$ $(j=1,\dots,m)$, $\sum_{j=1}^m \varphi_j(x) = 1$ für alle $x \in K$.*

Beweis. Es gibt $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi \geqslant 0$, $\operatorname{spt}\psi = B[0,1]$, $\psi(x) > 0$ für $|x| < 1$. Eine solche Funktion ist durch

$$\psi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{für } |x| < 1\,, \\ 0 & \text{für } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

gegeben. Dass ψ beliebig differenzierbar ist, folgt sofort daraus, dass $\varphi(x) = \alpha(1-|x|^2)$ gilt, mit der Funktion α aus Bemerkung 1.10.4(a).

Für $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ definieren wir $\psi_{x,r}$ durch $\psi_{x,r}(y) := \psi(\frac{y-x}{r})$ $(y \in \mathbb{R}^n)$. Mit Hilfe von diesen Funktionen ergibt der Beweis von Satz 1.5.5 die Behauptung. □

Beweis von Satz 1.10.1. Da A glatten Rand hat und ∂A kompakt ist, gibt es endlich viele offene Mengen $U_1,\dots,U_m$, wobei jede Menge U_j wie in der Definition von „glattem Rand“ ist. Es gibt eine Partition der Eins $\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ auf A zu der offenen Überdeckung $U_0 := \operatorname{int} A, U_1,\dots,U_m$ von A. Damit

$$\begin{aligned}\int\limits_A \operatorname{div} F\,dx &= \int\limits_A \operatorname{div}\Big(\sum_{j=0}^m \varphi_j F\Big)\,dx \\ &= \int\limits_A \operatorname{div}(\varphi_0 F)\,dx + \sum_{j=1}^m \int\limits_{A\cap U_j} \operatorname{div}(\varphi_j F)\,dx\end{aligned}$$

(Der erste der Terme verschwindet nach Lemma 1.10.2, die weiteren werden mit Lemma 1.10.3 umgeformt.)

$$= \sum_{j=1}^m \int\limits_{\partial A\cap U_j} \big((\varphi_j F)\,\big|\,\nu\big)\,dS(\xi) = \int\limits_{\partial A} \big(F(\xi)\,\big|\,\nu(\xi)\big)\,dS(\xi)\,. \qquad \square$$

Kapitel 2

Das Daniell-Integral

2.1 Integrationsverbände

Sei X eine Menge. Die Menge

$$\mathbb{R}^X := \bigl\{f\,;\; f\colon X \to \mathbb{R}\bigr\}$$

der Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, wobei Addition und Skalarmultiplikation punktweise definiert sind.

Betreffend die Bezeichnungsweise bemerken wir, dass damit $\mathbb{R}^n$ in kanonischer Weise isomorph zu $\mathbb{R}^{\{1,\dots,n\}}$ wird, und diese Isomorphie kann als eine der Quellen für diese Bezeichnungsweise angesehen werden. Die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die Menge der Folgen reeller Zahlen, während $[0,\infty)^{\mathbb{N}}$ die Menge der Folgen nichtnegativer Zahlen darstellt.

Seien $f, g \in \mathbb{R}^X$. Dann sind Multiplikation fg und Ordnung $f \leqslant g$ punktweise erklärt, d. h.

$$fg(x) := f(x)g(x) \quad (x \in X)\,, \qquad f \leqslant g \;:\Longleftrightarrow\; f(x) \leqslant g(x) \quad (x \in X)\,.$$

Und wir definieren

$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}\,, \qquad (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} \quad (x \in X)\,.$$

Definition. Eine Menge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^X$ heißt *Vektorverband*, wenn $\mathcal{L}$ linearer Teilraum ist, mit der zusätzlichen Eigenschaft

(i) $f, g \in \mathcal{L} \implies f \vee g \in \mathcal{L}$.

Gilt außerdem

(ii) $f \in \mathcal{L} \implies f \wedge 1 \in \mathcal{L}$,

so heißt $\mathcal{L}$ *Stone'scher Vektorverband.*

$\mathcal{L}_+$ definieren!!!???

(M. H. Stone, 1903–1989, erwähnen ???)

2.1.1 Bemerkungen. (a) Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^X$ Vektorverband. Mit $f, g \in \mathcal{L}$ gilt dann auch

$$f \wedge g = -(-f) \vee (-g) \in \mathcal{L}\,.$$

Aus $f \in \mathcal{L}$ folgt

$$\begin{aligned} f^+ &:= f \vee 0 \in \mathcal{L}\,, && \textit{Positivteil} \text{ von } f\,, \\ f^- &:= (-f)^+ \in \mathcal{L}\,, && \textit{Negativteil} \text{ von } f\,, \\ |f| &= f^+ + f^- \in \mathcal{L}\,, && \textit{Betrag} \text{ von } f\,. \end{aligned}$$

(b) Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^X$ ein Teilraum, und für alle $f \in \mathcal{L}$ sei auch $|f| \in \mathcal{L}$. Dann ist $\mathcal{L}$ ein Vektorverband. Seien nämlich $f, g \in \mathcal{L}$. Dann gilt

$$f \vee g = \frac{1}{2}\big((f+g) + |f-g|\big) \in \mathcal{L}\,.$$

Beispiele. (a) Sei X ein topoligischer (metrischer ???) Raum. Dann ist $C(X) = \big\{f \in \mathbb{R}^X\,;\ f \text{ stetig}\big\}$ ein Stone'scher Vektorverband.

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $C_c(\Omega)$ (siehe Abschnitt 1.2) ein Stone'scher Vektorverband.

(c) Der Vektorraum $T(\mathbb{R}^n)$ der Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Stone'scher Vektorverband. Und zwar wurde in Abschnitt 1.1 gezeigt, dass mit $f \in T(\mathbb{R}^n)$ auch der Positivteil f^+ in $T(\mathbb{R}^n)$ liegt. Daraus folgt, dass $T(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorverband ist. Ist $f \in T(\mathbb{R}^n)$, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$, so dass $f(x) = 0$ ist für $x \in \mathbb{R}^n \setminus [a, b]$. Daraus folgt $f \wedge \mathbf{1} = f \wedge \mathbf{1}_{[a,b]} \in T(\mathbb{R}^n)$. (1 oder **1** ???)

(d) Die Menge $C^1(\mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist kein Vektorverband; siehe Aufgabe ???.

(e) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $f \geqslant 0$, $f \neq 0$ und $f(0) = 0$. Dann ist $\operatorname{lin}\{f\}$ ein Vektorverband, der nicht Stone'sch ist. (Aufgabe ?????????)

Definition. Sei $\mathcal{L}$ ein Vektorverband. Ein lineares Funktional $\mu\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ (Abbildungen von einem Funktionenraum nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ werden oft als *Funktionale* bezeichnet!) heißt

positiv, falls $\mu(f) \geqslant 0$ für alle $f \in \mathcal{L}_+$.

Ein positives Funktional μ heißt

σ-stetig, falls $\mu(f_n) \to 0$ für alle Folgen $(f_n) \subseteq \mathcal{L}$ mit $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$, $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle $x \in X$.

Ist $\mathcal{L}$ ein Vektorverband, $\mu\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ ein σ-stetiges positives lineares Funktional, so heißt μ *Elementarintegral* (auch *Daniell'sches Funktional*), und $(X, \mathcal{L}, \mu)$ heißt *Integrationsverband*.

Etwas zu Daniell ???

2.1.2 Bemerkungen. Sei $\mathcal{L}$ ein Vektorverband, $\mu\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ linear.

(a) Ist μ positiv, so ist μ *monoton* (isoton????), d. h. aus $f, g \in \mathcal{L}$, $f \leqslant g$ folgt $\mu(f) \leqslant \mu(g)$. Die Ungleichung $f \leqslant g$ bedeutet ja nichts anderes als $g - f \geqslant 0$, und daraus folgt $0 \leqslant \mu(g-f) = \mu(g) - \mu(f)$.

(b) Ist μ positiv, so ist μ genau dann σ-stetig, wenn $\mu(f_n) \to \mu(f)$ für alle Folgen $(f_n) \subseteq \mathcal{L}$ mit $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n \to f \in \mathcal{L}$ punktweise $(n \to \infty)$.

Um dies einzusehen, genügt es zu bemerken, dass die Folge (f_n) genau dann monoton wachsend ist und punktweise gegen f konvergiert, wenn die Folge $(f - f_n)_n$ monoton fallend ist und punktweise gegen 0 konvergiert.

2.1.3 Beispiele. (a) Sei $\mathcal{L} = \mathbb{R}^X$ (offenbar ein Stone'scher Vektorverband), $x_0 \in X$, $\delta_{x_0}\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\delta_{x_0}(f) := f(x_0)$. Offenbar ist δ_{x_0} linear, positiv, σ-stetig. δ_{x_0} heißt *(Dirac'sches) Deltafunktional.*

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{L} := C_c(\Omega)$, $\mu\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ definiert durch das Riemann-Integral,

$$\mu(f) := \int_\Omega f(x)\, dx\,.$$

Dann wissen wir, dass μ linear und positiv ist. Die σ-Stetigkeit wird eine Folgerung des folgenden Satzes sein.

2.1.4 Satz. (Satz von Dini) *Zu Dini??? Sei X ein kompakter (metrischer ???) topologischer Raum. Sei $(f_n) \subseteq C(X)$, $f_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$. Dann gilt $\|f_n\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$. (Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die Supremum-Norm.)*

$f_n \downarrow 0$ erklären!!!???

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Für die offenen Mengen

$$[f_n < \varepsilon] := \{x \in X\,;\, f_n(x) < \varepsilon\}$$

gilt $[f_n < \varepsilon] \subseteq [f_{n+1} < \varepsilon]$ $(n \in \mathbb{N})$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[f_n < \varepsilon] = X$. Da X kompakt ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $[f_N < \varepsilon] = X$ ist. Somit gilt $\|f_N\|_\infty < \varepsilon$, und daher $\|f_n\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. □

Bemerkung. Äquivalent zu der Behauptung in Satz 2.1.4 ist offenbar die folgende Aussage: Aus $(f_n) \subseteq C(X)$ $f_n \uparrow f \in C(X)$ folgt $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$.

2.1.5 Folgerung. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\mu\colon C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein (beliebiges!) positives lineares Funktional. Dann ist μ σ-stetig. (Insbesondere ist das Riemann-Integral auf $C_c(\Omega)$ σ-stetig; siehe Beispiel 2.1.3(b).)*

Beweis. Sei $(f_n) \subseteq C(\Omega)$, $f_n \downarrow 0$. Aus Satz 2.1.4, angewendet mit $X = \operatorname{spt} f_1$, folgt $\|f_n\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$. Es gibt $g \in C_c(\Omega)$, $0 \leqslant g \leqslant 1$, $g(x) = 1$ für alle $x \in \operatorname{spt} f_1$ $(\supseteq \operatorname{spt} f_n$ für alle $n \in \mathbb{N})$ (z.B. $g := \big(1 - \frac{1}{\delta} d(\,\cdot\,, \operatorname{spt} f_1)\big) \vee 0$ für $\delta > 0$ klein genug; vgl. Beweis von Lemma 1.2.9). Dann gilt $0 \leqslant f_n \leqslant \|f_n\|_\infty\, g$ $(n \in \mathbb{N})$, und daher $0 \leqslant \mu(f_n) \leqslant \|f_n\|_\infty\, \mu(g) \to 0$. □

Etwas allgemeiner als für das Riemann-Integral kann ein solches Funktional auch so entstehen: Für $\gamma \in C(\Omega),\ \gamma \geqslant 0$, setzt man

$$\mu(f) := \int\limits_{\Omega} f(x)\gamma(x)\,dx \qquad (f \in C_c(\Omega))\,.$$

Bemerkung. Die gleiche Behauptung wie in Folgerung 2.1.5 gilt auch für den Fall, dass Ω ein lokalkompakter Raum ist. Für die Existenz der Funktion g im Beweis wird dann das Lemma von Urysohn benötigt; siehe ???.

Beispiel. Sei $\mathcal{L} := T(\mathbb{R}^n),\ \mu$ das Riemann-Integral. Dann ist offenbar μ linear und positiv. Die σ-Stetigkeit wollen wir hier nicht zeigen (siehe aber Aufgabe ???). Sie wird sich später aus der σ-Stetigkeit des Riemann-Integrales auf $C_c(\mathbb{R}^n)$ ergeben.

2.2 Maße auf Ringen

In der Maßtheorie wird traditionell von „Volumina“ (Maßen) gewisser Mengen ausgegangen, und damit werden Volumina für weitere, allgemeinere Mengen erklärt. In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen diesem Zugang und den im letzten Abschnitt erklärten Elementarintegralen geklärt.

Definition. Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (wobei $\mathcal{P}(X) = \{A;\ A \subseteq X\}$ die Potenzmenge der Menge X bezeichnet). Das Mengensystem $\mathcal{A}$ heißt *Ring* (*Mengenring*, *Boole'scher Ring*), wenn

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ A \cup B \in \mathcal{A}$,

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Das Mengensystem heißt *σ-Ring*, wenn zusätzlich

(iv) $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \ \Rightarrow\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Das Mengensystem heißt $(\sigma\text{-})$*Algebra*, falls $\mathcal{A}$ $(\sigma\text{-})$Ring ist und zusätzlich

(v) $X \in \mathcal{A}$.

Bemerkungen. Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(a) Sei $\mathcal{A}$ ein Ring, $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$.

(b) Es gibt einen kleinsten Ring $\operatorname{ring}(\mathcal{A})$, der $\mathcal{A}$ enthält. Dieser heißt *von $\mathcal{A}$ erzeugter Ring*. Und zwar erhält man $\operatorname{ring}(\mathcal{A})$ als

$$\operatorname{ring}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X),\,\mathcal{B}\text{ Ring},\,\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}} \mathcal{B}\,.$$

Für diese Aussage verweisen wir auf Aufgabe ???.

(c) Entsprechend Teil (b) erhält man auch einen *von $\mathcal{A}$ erzeugten σ-Ring* σ-ring$(\mathcal{A})$, eine *von $\mathcal{A}$ erzeugte Algebra* alg$(\mathcal{A})$ und eine *von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra* σ-alg$(\mathcal{A})$.

Definition. Sei Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring. Eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty)$ (eine solche Abbildung nennt man auch „Mengenfunktion“, d. h. eine für Mengen definierte Funktion) heißt *Inhalt* auf $\mathcal{A}$, wenn

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (*Additivität* von μ).

Gilt zusätzlich

(iii) für jede Folge $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A},\ A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots,\ \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ gilt $\mu(A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ ($\emptyset$-*Stetigkeit* von μ),

so heißt μ *Maß*.

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *elementarer Maßraum*, falls $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

Beispiel. Das Mengensystem $\mathcal{A} := \big\{A \subseteq \mathbb{R}^n;\ A \text{ Jordan-messbar}\big\}$ ist ein Ring, und durch $\mu(A) := \int \mathbf{1}_A(x)\,dx$ ist ein Maß gegeben. Alle diese Eigenschaften bis auf die $\emptyset$-Stetigkeit folgen direkt aus Eigenschaften des Riemann-Integrales. Für die $\emptyset$-Stetigkeit verweisen wir auf später; sie folgt aus der σ-Stetigkeit des Riemann-Integrales; vgl. ???

2.2.1 Bemerkungen. Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring.

(a) Eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty)$ ist genau dann ein Maß, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii)' μ ist *σ-additiv*, d. h. für jede Folge $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$, bestehend aus paarweise disjunkten Mengen ($A_m \cap A_n = \emptyset$ für $m \neq n$), für die $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$ ist, gilt $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_N) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Um die Notwendigkeit dieser Bedingungen einzusehen, wählen wir eine Folge (A_n) wie in (ii)'. Mit $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ $(\in \mathcal{A})$, $B_n := A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k$ gilt $B_n \downarrow \emptyset$ (d. h. $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots,\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$), also $\mu(B_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, nach Bedingung (iii). Daher, unter Beachtung von (ii), $\mu(B_n) = \mu(A) - \mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \mu(A) - \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \to 0$.

Für die andere Richtung zeigen wir zunächst (ii): Seien $A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset$. Wir betrachten die Folge $A, B, \emptyset, \emptyset, \ldots$ Aus (ii)' folgt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + 0 + 0 + \cdots = \mu(A) + \mu(B)$. Für den Beweis von (iii) sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A},\ A_n \downarrow \emptyset$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n = \bigcup_{k=n}^\infty A_k \setminus A_{k+1}$, und dies ist eine disjunkte Vereinigung. Nach (ii)' gilt $\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$, und dies ist der Reihenrest der konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$ $(= \mu(A_1))$; somit folgt $\mu(A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

(b) In der sonstigen Literatur über Maßtheorie - hier sei verwiesen auf Bauer ????? - ist ein Inhalt oft eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ (der Wert ∞ zugelassen!), mit den Eigenschaften (i),(ii). Ist zusätzlich μ σ-additiv (im erweiterten Sinn), so heißt μ *Prämaß*. Ein Maß ist dann ein Prämaß auf einer σ-Algebra. Siehe dazu Aufgabe ??? (Mengen mit $\mu(A) < \infty$ sind Ring)

Definition. Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann bezeichnet

$$S(\mathcal{A}) := \operatorname{lin}\big\{\mathbf{1}_A\,;\ A \in \mathcal{A}\big\}$$

(„S“ für ‘simple’) den Raum der $\mathcal{A}$-*Treppenfunktionen.*

2.2.2 Lemma. *Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring.*

Sei $f \in S(\mathcal{A})$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, $b_1 \dots, b_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$f = \sum_{k=1}^{n} b_k \mathbf{1}_{B_k} \qquad \text{(„disjunkte Darstellung“ von } f\text{)}.$$

$S(\mathcal{A})$ ist ein Stone'scher Vektorverband.

Beweis. (siehe Beweis von Satz 1.1.4) Sei $f \in S(\mathcal{A})$. Dann hat f eine Darstellung $f = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbf{1}_{A_k}$. Für $\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, m\}$ definieren wir

$$a_J := \sum_{j \in J} a_j\,, \qquad A_J := \Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) \setminus \Big(\bigcup_{j \in \{1,\dots,m\} \setminus J} A_j\Big) \in \mathcal{A}.$$

Die Familie $(A_J)_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,m\}}$ ist eine disjunkte Überdeckung der Vereinigung $\bigcup_{j=1}^{m} A_j$, und es gilt

$$f = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,m\}} a_J \mathbf{1}_{A_J}.$$

Sei $f = \sum_{k=1}^{n} b_k \mathbf{1}_{B_k}$ eine disjunkte Darstellung von f. Dann gilt $|f| = \sum_{k=1}^{n} |b_k| \mathbf{1}_{B_k} \in S(\mathcal{A})$, und daraus folgt, dass $S(\mathcal{A})$ ein Vektorverband ist. Ebenso erhält man $f \wedge 1 = \sum_{k=1}^{n} (b_k \wedge 1) \mathbf{1}_{B_k} \in S(\mathcal{A})$, womit gezeigt ist, dass $S(\mathcal{A})$ Stone'sch ist. □

Bemerkungen. (a) $T(\mathbb{R}^n) = S\big(\big\{[a,b]\,;\ a,b \in \mathbb{R}^n,\ a \leqslant b\big\}\big)$ ist ein Stone'scher Vektorverband (siehe Satz 1.1.4), obwohl die Menge $\big\{[a,b]\,;\ a,b \in \mathbb{R}^n,\ a \leqslant b\big\}$ kein Ring ist. Der Grund dafür wird aus dem nächsten Lemma ersichtlich sein, und damit erhalten wir auch einen erneuten Beweis für diese Tatsache.

(b) Im Allgemeinen ist $S(\mathcal{A})$ kein Vektorverband; für ein Beispiel verweisen wir auf Aufgabe ???

2.2.3 Lemma. *Sei X eine Menge, und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei* $\cap$-stabil *(d. h. für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{A}$). Dann gilt*

$$\begin{aligned} \operatorname{ring}(\mathcal{A}) = \mathcal{B} &:= \big\{B \subseteq X\,;\, \mathbf{1}_B \in S(\mathcal{A})\big\}\,, \\ S(\mathcal{A}) &= S(\operatorname{ring}(\mathcal{A}))\,. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $S(\mathcal{A})$ ein Stone'scher Vektorverband.

Beweis. Zuerst beweisen wir, dass das Mengensystem $\mathcal{B}$ ein Ring ist. Es gilt $\mathbf{1}_\emptyset = 0 \in S(\mathcal{A})$, und damit ist (i) erfüllt. Seien $A, B \in \mathcal{B}$, also $\mathbf{1}_A = \sum_{j=1}^m c_j \mathbf{1}_{A_j}$, $\mathbf{1}_B = \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{1}_{B_k}$, mit $c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \dots, A_m, B_1 \dots, B_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \sum_{j,k} c_j d_k \mathbf{1}_{A_j} \mathbf{1}_{B_k} = \sum_{j,k} c_j d_k \mathbf{1}_{A_j \cap B_k} \in S(\mathcal{A})\,.$$

Daher $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B} \in S(\mathcal{A})$, also ist auch (ii) erfüllt. Ebenso ist $\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_{A\cup B} - \mathbf{1}_B \in S(\mathcal{A})$, und damit ist auch (iii) erfüllt.

Offenbar ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Sei $\mathcal{B}'$ ein Ring, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}'$. Dann gilt $S(\mathcal{A}) \subseteq S(\mathcal{B}')$, und daher

$$\mathcal{B} \subseteq \big\{B \subseteq X\,;\, \mathbf{1}_B \in S(\mathcal{B}')\big\} = \mathcal{B}'\,,$$

wobei die letzte Gleichung aus Lemma 2.2.2 folgt. Damit ist $\mathcal{B}$ der kleinste das Mengensystem $\mathcal{A}$ enthaltende Ring, und die erste Behauptung ist bewiesen.

Die zweite Behauptung folgt aus der Inklusionskette

$$S(\mathcal{A}) \subseteq S(\operatorname{ring}(\mathcal{A})) = \operatorname{lin}\{\mathbf{1}_B\,;\, \mathbf{1}_B \in S(\mathcal{A})\} \subseteq S(\mathcal{A})\,,$$

wobei die mittlere Gleichung aus dem ersten Schritt folgt. □

Zwischentext!!!???

2.2.4 Satz. *Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring, μ ein Inhalt auf $\mathcal{A}$.*

(a) Dann ist die Linearisierung *$\mu^L\colon S(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ von μ,*

$$\mu^L\Big(\sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{A_j}\Big) := \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j)\,,$$

wohldefiniert und ein positives lineares Funktional.

(b) μ ist genau dann ein Maß, wenn μ^L σ-stetig ist.

Beweis. (a) Für die Wohldefiniertheit genügt es zu zeigen: Aus $\sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{A_j} = 0$ folgt $\sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j) = 0$. Da $\mathcal{A}$ ein Ring ist, gibt es $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, so dass

$$A_j = \bigcup_{k=1,\dots,m,\, B_k \subseteq A_j} B_k$$

für alle $j = 1, \dots, n$. Daher gilt

$$\mathbf{1}_{A_j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \mathbf{1}_{B_k}\,, \qquad \text{mit} \quad \alpha_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } B_k \subseteq A_j\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus $0 = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{A_j} = \sum_{j,k} c_j \alpha_{jk} \mathbf{1}_{B_k}$ folgt $\sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_{jk} = 0$ $(k = 0, \dots, m)$. Außerdem

$$\mu(A_j) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk} \mu(B_k) \qquad (\mu \text{ additiv}).$$

Damit folgt schließlich

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j) = \sum_{j,k} c_j \alpha_{jk} \mu(B_k) = \sum_{k} \Big(\sum_{j} c_j \alpha_{jk} \Big) \mu(B_k) = 0\,.$$

Die Linearität und die Positivität von μ^L sind dann klar.

(b) Nehmen wir an, dass μ ein Maß ist. Sei $(\varphi_n) \subseteq S(\mathcal{A})$, $\varphi_n \downarrow 0$.

Wir bemerken zunächst, dass $[\varphi_1 > 0] \in \mathcal{A}$ gilt. (Entsprechend einer schon im Beweis von Satz 2.1.4 benutzten Bezeichnungsweise definieren wir $[f > \alpha] := \{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\}$, für Funktionen $f \in \mathbb{R}^X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, und entsprechend $[f \geqslant \alpha]$, $[f < \alpha]$, $[f \leqslant \alpha]$.) Seien $\varepsilon > 0$, $A_n := [\varphi_n > \varepsilon]$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt $A_n \downarrow \emptyset$, und daher $\mu(A_n) \to 0$. Also gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_N) \leqslant \varepsilon$. Für $n \geqslant N$ gilt

$$0 \leqslant \mu^L(\varphi_n) \leqslant \mu^L(\varphi_N) \leqslant \mu^L\big(\varepsilon \mathbf{1}_{[\varphi_1 > 0]} + \|\varphi_1\|_\infty \mathbf{1}_{A_N}\big) \leqslant \varepsilon\big(\mu([\varphi_1 > 0]) + \|\varphi_1\|_\infty\big)\,.$$

Es folgt $\mu^L(\varphi_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Sei andererseits μ^L σ-stetig, $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$, $A_n \downarrow 0$. Es folgt $\mathbf{1}_{A_n} \downarrow 0$, und daher $\mu(A_n) = \mu^L(\mathbf{1}_{A_n}) \to 0$ $(n \to \infty)$. □

2.3 Der Fortsetzungsprozess, Oberintegral

In diesem Abschnitt sei $(X, \mathcal{L}, \mu)$ ein Integrationsverband.

In einem doppelten Fortsetzungsprozess werden wir μ auf *alle* Funktionen $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ zum „Oberintegral“ μ^* fortsetzen. Später werden die Funktionen „aussortiert“ auf denen μ^* „gute“ Eigenschaften hat.

Definition. Wir definieren

$$\mathcal{L}_\uparrow := \big\{ \sup f_n \in (-\infty, \infty]^X\,;\, (f_n) \subseteq \mathcal{L},\ f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots \big\}\,.$$

Dabei wird $\sup f_n$ punktweise gebildet, $(\sup f_n)(x) := \sup f_n(x) \in (-\infty, \infty]$, für $x \in X$. Für $f = \sup f_n \in \mathcal{L}_\uparrow$ definieren wir das *Oberintegral*

$$\mu^*(f) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(f_n)\,.$$

(Dass μ^* wohldefiniert ist, wird anschließend gezeigt.)

Notationen???: $f_n \uparrow :\Longleftrightarrow\ f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$, $f_n \uparrow f\ :\Longleftrightarrow\ f_n \uparrow$ und $f_n \to f$ punktweise.

2.3.1 Lemma. (a) *Sei* $(f_n) \subseteq \mathcal{L},\ g \in \mathcal{L},\ f_n\uparrow,\ \sup f_n \geqslant g$. *Dann gilt* $\sup \mu(f_n) \geqslant \mu(g)$.

(b) *Seien* $(f_n), (g_n) \subseteq \mathcal{L},\ f_n\uparrow,\ g_n\uparrow,\ \sup f_n \geqslant \sup g_n$. *Dann gilt* $\sup \mu(f_n) \geqslant \sup \mu(g_n)$. *Insbesondere folgt die Wohldefiniertheit des Oberintegrals, und es folgt* $\mu^*(f) = \mu(f)$ *für alle* $f \in \mathcal{L}$.

Beweis. (a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n := f_n \wedge g\ \ (\in \mathcal{L})$. Aus $\sup f_n \geqslant g$ folgt $g_n \uparrow g$. Die σ-Stetigkeit von μ impliziert daher $\mu(g_n) \to \mu(g)$. Aus $g_n \leqslant f_n$ folgt $\mu(g_n) \leqslant \mu(f_n)\ \ (n \in \mathbb{N})$, und daraus $\mu(g) = \lim \mu(g_n) \leqslant \sup \mu(f_n)$.

(b) Aus (b) folgt $\sup \mu(f_k) \geqslant \mu(g_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und daraus folgt die erste Behauptung.

Aus $\sup f_n = \sup g_n$ folgt somit $\sup \mu(f_n) = \sup \mu(g_n)$ und damit die Wohldefiniertheit des Oberintegrals.

Mit der konstanten Folge (f_n), $f_n := f\ \ (n \in \mathbb{N})$, gilt $\mu^*(f) = \lim \mu(f_n) = \mu(f)$. □

Rechenregeln mit ∞ erklären!???

2.3.2 Satz. *Für die Menge* $\mathcal{L}_\uparrow$ *und das Oberintegral* μ^* *gilt:*

(a) *Aus* $f \in \mathcal{L}_\uparrow,\ a \geqslant 0$ *folgt* $af \in \mathcal{L}_\uparrow,\ \mu^*(af) = a\mu^*(f)$.

(b) *Aus* $f, g \in \mathcal{L}_\uparrow$ *folgt* $f + g \in \mathcal{L}_\uparrow,\ \mu^*(f+g) = \mu^*(f) + \mu^*(g)$.

(c) *Aus* $f, g \in \mathcal{L}_\uparrow,\ f \leqslant g$ *folgt* $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$. *(Monotonie, Isotonie??? Interpunktion???)*

(d) *Aus* $f, g \in \mathcal{L}_\uparrow$ *folgt* $f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{L}_\uparrow$. *Ist* $\mathcal{L}$ *Stone'sch, so gilt* $f \wedge 1 \in \mathcal{L}_\uparrow$ *für alle* $f \in \mathcal{L}_\uparrow$.

(e) *Aus* $(f_n) \subseteq \mathcal{L}_\uparrow,\ f_n\uparrow$ *folgt* $f := \sup f_n \in \mathcal{L}_\uparrow,\ \mu^*(f) = \sup \mu^*(f_n)$. *(monotone Konvergenz Interpunktion???)*

Beweis. (a), (b) und (d) sind klar.

(c) ist Lemma 2.3.1(b).

(e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge $(f_{nj})_j \subseteq \mathcal{L}$ mit $f_{nj} \uparrow f_n\ \ (j \to \infty)$. Für $j \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\tilde{f}_j := f_{1j} \vee f_{2j} \vee \ldots \vee f_{jj}\ \ (\in \mathcal{L}).$$

Offenbar ist $(\tilde{f}_j)_j$ eine aufsteigende Folge, und aus $\tilde{f}_j \leqslant f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_j = f_j \leqslant f\ \ (j \in \mathbb{N})$ folgt $\sup \tilde{f}_j \leqslant f$. Für $1 \leqslant n \leqslant j$ gilt $f_{nj} \leqslant \tilde{f}_j$, und daraus folgt $f_n = \sup_j f_{nj} \leqslant \sup_j \tilde{f}_j$, $\sup_n f_n \leqslant \sup_j \tilde{f}_j$. Somit gilt $f = \sup_j \tilde{f}_j \in \mathcal{L}_\uparrow$, $\mu^*(f) = \sup_j \mu(\tilde{f}_j) \leqslant \sup_j \mu^*(f_j) \leqslant \mu^*(f)$. □

Bevor wir den zweiten Fortsetzungsprozess definieren, soll untersucht werden, wie die Funktionen in $C_c(U)_\uparrow$, für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschrieben werden können.

'Ordnung' auf $[-\infty, \infty]$, $[f > a]$!??? erklären.

Definition. Sei X ein metrischer (oder topologischer???) Raum, $f\colon X \to [-\infty,\infty]$.

Die Funktion f heißt *nach unten halbstetig* (*halbstetig nach unten*???), wenn die Menge $[f>a]$ für alle $a\in\mathbb{R}$ (oder $a\in[-\infty,\infty]$???) offen ist.

In Aufgabe ??? soll gezeigt werden, dass f genau dann nach unten halbstetig ist, wenn $f(x)\leqslant \liminf_{y\to x} f(y)$ für alle $x\in X$ gilt.

Beispiele. (a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{falls } x\neq 0, \\ 0 & \text{falls } x=0 \end{cases}$$

ist nach unten halbstetig.

(b) Ist $V\subseteq\mathbb{R}^n$, so ist $\mathbf{1}_V\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ genau dann nach unten halbstetig, wenn V offen ist.

2.3.3 Lemma. *Sei X ein metrischer (oder topologischer???) Raum, $\mathcal{F}\subseteq[-\infty,\infty]^X$, und jede Funktion $f\in\mathcal{F}$ sei nach unten halbstetig.*

Dann ist $\sup_{f\in\mathcal{F}} f$ nach unten halbstetig.

Beweis. Sei $a\in\mathbb{R}$ (oder $a\in[-\infty,\infty]$???). Dann gilt

$$\begin{aligned}[\sup_{f\in\mathcal{F}} f > a] &= \bigl\{x\in X\,;\ \text{es gibt } f\in\mathcal{F} \text{ mit } f(x)>a\bigr\} \\ &= \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \bigl\{x\in X\,;\ f(x)>a\bigr\} = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} [f>a]\,.\end{aligned}$$

Da $[f>a]$ für alle $f\in\mathcal{F}$ offen ist (und die Vereinigung offener Mengen offen), folgt die Behauptung. □

Wir bemerken, dass Lemma 2.3.3 auch für den Fall von Interesse ist, dass alle $f\in\mathcal{F}$ stetig sind. Es ist leicht, Beispiele zu finden, für die letzteres gilt, die Funktion $\sup_{f\in\mathcal{F}} f$ jedoch nicht stetig ist.

2.3.4 Satz. *Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U\to[0,\infty]$. Dann sind äquivalent:*

(α) $f\in C_c(U)_\uparrow$,

(β) *f ist nach unten halbstetig.*

Beweis. (α) ⇒ (β) folgt aus Lemma 2.3.3.

(β) ⇒ (α) (i) Sei $V\subseteq U$, V offen, $f=\mathbf{1}_V$. Es gibt eine Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}\subseteq C_c(U)$, $0\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\ldots\leqslant 1$, $\operatorname{spt}\varphi_j\subseteq V$ ($j\in\mathbb{N}$, so dass $\sup_j\varphi_j=\mathbf{1}_V$ ist; siehe Satz 1.6.7. Damit gilt $\mathbf{1}_V\in C_c(U)_\uparrow$.

(ii) Sei f nach unten halbstetig und beschränkt; ohne Einschränkung $0\leqslant f\leqslant 1$. Für $j\in\mathbb{N}$ definieren wir

$$f_j := 2^{-j}\sum_{k=1}^{2^j} \mathbf{1}_{[f>k2^{-j}]}\,.$$

Nach (i) und Satz 2.3.2(b) ist $f_j \in C_c(U)_\uparrow$. Außerdem gilt $f_j \uparrow f$, und daher $f \in C_c(U)_\uparrow$, nach Satz 2.3.2(c).

(iii) Allgemeiner Fall. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $f \wedge k$ nach unten halbstetig, da

$$[f \wedge k > a] = \begin{cases} [f > a] & \text{falls } a < k, \\ \emptyset & \text{falls } a \geqslant k, \end{cases}$$

und es gilt $f \wedge k \uparrow f$. Wegen (ii) ist $f \wedge k \in C_c(U)_\uparrow$ $(k \in \mathbb{N})$, und aus Satz 2.3.2(c) folgt $f \in C_c(U)_\uparrow$. □

Beispiele. (a) Ist $\{x_j\,;\, j \in \mathbb{N}\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen des Intervalls $[0,1]$, $(r_j) \subseteq (0,\infty)$, $\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j < 1/2$, $U := \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(x_j - r_j, x_j + r_j)$, so ist $\mathbf{1}_U \in C_c(\mathbb{R})_\uparrow$, aber $\mathbf{1}_U$ nicht Riemann-integrierbar; siehe Bemerkung 1.6.4.

(b) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf U, $\mu\colon C_c(U) \to \mathbb{R}$ das Riemann-Integral, so gibt es $g \in C_c(U)_\uparrow$, $g \leqslant f$, g Riemann-integrierbar, mit

$$\mu^*(g) = \int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx\,.$$

(Tatsächlich gilt $f(x) = g(x)$ „fast überall“, in einem später präzisierten Sinn.)

Beweis. Nach Satz 1.2.8 gibt es eine Folge (φ_j) in $C_c(U)$, alle $\varphi_j \leqslant f$, mit $\int \varphi_j \to \int f$; ohne Einschränkung $\varphi_j\!\uparrow$. Für $g := \sup \varphi_j$ gilt $g \in C_c(U)_\uparrow$, $g \leqslant f$, $\mu^*(g) = \sup \int \varphi_j = \int f$. Außerdem gilt $\mu^*(g) \leqslant \underline{\int} g \leqslant \overline{\int} g \leqslant \int f$, und damit ist g Riemann-integrierbar, mit $\int g = \mu^*(g)$. □

Im zweiten Teil des Fortsetzungsprozesses wir das Oberintegral für alle (!) Funktionen erklärt.

Definition. Für $f \in [-\infty,\infty]^X$ definieren wir das *Oberintegral von* f,

$$\mu^*(f) := \inf\{\mu^*(g)\,;\, g \in \mathcal{L}_\uparrow,\ f \leqslant g\}\,.$$

Dabei ergibt sich $\mu^*(f) \in [-\infty,\infty]$, und insbesondere ist $\mu^*(f) = \infty$ vereinbart, falls es keine Funktion $g \in \mathcal{L}_\uparrow$ mit $f \leqslant g$ gibt. Es ist klar, dass die Definition konsistent mit der bisherigen Definition von μ^* auf $\mathcal{L}_\uparrow$ ist.

Außerdem definieren wir das *Unterintegral von* f,

$$\mu_*(f) := -\mu^*(-f)\,.$$

(Also gilt „$\mu_*(f) = \sup\{\mu_*(g)\,;\, g \in \mathcal{L}_\downarrow,\ g \leqslant f\}$“, mit geeigneten Definitionen von $\mathcal{L}_\downarrow$ und μ_* auf $\mathcal{L}_\downarrow$. Diese Bemerkung soll nur dazu dienen, den anschaulichen Sinn des Begiffes „Unterintegral“ hier zu motivieren; siehe auch Lemma 1.2.1(a).

2.3.5 Lemma. (a) *Aus* $f, g \in [-\infty, \infty]^X$, $f \leqslant g$ *folgt* $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$. *(Monotonie, Isotonie???)*

(b) *Aus* $f \in [-\infty, \infty]^X$, $a \geqslant 0$ *folgt* $\mu^*(af) = a\mu^*(f)$.

(c) *Aus* $f, g \in [-\infty, \infty]^X$ *folgt* $\mu^*(f+g) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(g)$. *(Dabei definieren wir in der Summe* $f+g$ *oder* $\mu^*(f) + \mu^*(g)$ *eventuell vorkommende Ausdrücke* $\infty - \infty$ *oder* $-\infty + \infty$ *hier als* ∞.*)*

(d) *Für alle* $f \in [-\infty, \infty]^X$ *gilt* $\mu_*(f) \leqslant \mu^*(f)$.

Beweis. (a) und (b) sind klar.

(c) Ohne Einschränkung seien $\mu*(f) < \infty$, $\mu*(g) < \infty$. Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\uparrow$, $f \leqslant \varphi$, $g \leqslant \psi$, dann gilt $\varphi + \psi \in \mathcal{L}_\uparrow$, $f + g \leqslant \varphi + \psi$ (man beachte, dass φ und ψ nirgend $-\infty$ sein können, so dass die Ungleichung auch mit der vorgenommenen Setzung gilt),

$$\mu^*(f+g) \leqslant \mu^*(\varphi + \psi) = \mu^*(\varphi) + \mu^*(\psi),$$

wobei in der letzten Gleichung Lemma 2.3.2(b) benutzt wurde. Durch Infimumbildung über φ und ψ folgt die Behauptung.

(d) Gemäß der Setzung in (c) gilt $f + (-f) \geqslant 0$. Damit folgt $0 \leqslant \mu^*(f + (-f)) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(-f)$, und dies impliziert $-\mu^*(-f) \leqslant \mu^*(f)$. (Wir merken an, dass die letzte Implikation auch gilt, falls einer der Terme $\mu^*(f)$ oder $\mu^*(-f)$ gleich $-\infty$ ist, da dann der andere gleich ∞ ist.) $\square$

2.4 Integrierbare Funktionen, erste Eigenschaften

In diesem Abschnitt sei $(X, \mathcal{L}, \mu)$ ein Integrationsverband.

Definition. Sei $f\colon X \to [-\infty, \infty]$.

Die Funktion f heißt *integrierbar* (oder *μ-integrierbar*), wenn $-\infty < \mu_*(f) = \mu^*(f) < \infty$. Die Menge der integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}_1(\mu)$ (oder $\mathcal{L}_1(X, \mathcal{L}, \mu)$) bezeichnet. (Das Symbol $\mathcal{L}$ in der Bezeichnung $\mathcal{L}_1$ ist nicht mit dem Symbol $\mathcal{L}$ für den Vektorverband verknüpft; wenn zum Beispiel $(Y, \mathcal{K}, \nu)$ ein Integrationsverband ist, wird die Menge der ν-integriebaren Funktionen mit $\mathcal{L}_1(\nu) = \mathcal{L}_1(Y, \mathcal{K}, \nu)$ bezeichnet.)

Für $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ definiert man das *Integral* (oder *ν-Integral*)

$$\mu(f) = \int f(x)\, d\mu(x) = \int f\, d\mu := \mu^*(f) \ (= \mu_*(f)).$$

Für das Riemann-Integral $\mu\colon C_c(U) \to \mathbb{R}$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, heißen die μ-integrierbaren Funktionen auch *Lebesgue-integrierbar*; in diesem Fall schreibt man

$$\int f\, d\mu = \int f(x)\, dx = \int f\, d\lambda^n;$$

dabei ist $\lambda^n = \mu$ das *n-dimensionale Lebesgue-Integral.*

Bemerkungen. (a) Für $f \in \mathcal{L}$ ist $\mu_*(f) = -\mu^*(-f) = -\mu(-f) = \mu(f) = \mu^*(f) \in \mathbb{R}$, und daher gilt $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_1(\mu)$.

(b) Ist $f \in \mathcal{L}_\uparrow$, so ist $\mu_*(f) = \mu^*(f)$. Ist zusätzlich $\mu^*(f) \in \mathbb{R}$, dann ist $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$.

Beweis. Es gibt $(f_n) \subseteq \mathcal{L}$, $f_n \uparrow f$, und daraus folgt $\mu^*(-f) \leqslant \inf \mu(-f_n) = -\sup \mu(f_n) = -\mu^*(f)$, $\mu_*(f) = -\mu^*(-f) \geqslant \mu^*(f)$. □

(Später wird die Gleichheit „$\mathcal{L}_1(\mu) = \mathcal{L}_\uparrow \cap \mathcal{L}_1(\mu) - \mathcal{L}_\uparrow \cap \mathcal{L}_1(\mu)$" gezeigt. Hier gibt es ein Problem mit der Addition, da $-\infty$ und ∞ als Werte der Funktionen vorkommen können; siehe dazu Satz **??**.)

(c) Definiert man für $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ das „μ-Riemann-Oberintegral"

$$\overline{\int} f := \inf\{\mu\varphi;\ \varphi \in \mathcal{L},\ f \leqslant \varphi\},$$

so gilt offenbar $\mu^*(f) \leqslant \overline{\int} f$. Entsprechend gilt $\underline{\int} f = -\overline{\int}(-f) \leqslant \mu_*(f)$.

Ist f „Riemann-integrierbar", das heißt $\underline{\int} f = \overline{\int} f \in \mathbb{R}$, so folgt die μ-Integrierbarkeit von f.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so folgt insbesondere $R(U) \subseteq \mathcal{L}_1(\lambda^n)$.

Im folgenden Satz wird Integrierbarkeit charakterisiert. Dabei ist Eigenschaft (β) analog zur Charakterisierung von Riemann-Integrierbarkeit in Satz 1.2.4 und Satz 1.2.8.

2.4.1 Satz. *Sei $f\colon X \to [-\infty, \infty]$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

(α) f ist μ-integrierbar;

(β) für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $g, h \in \mathcal{L}_\uparrow \cap \mathcal{L}_1(\mu)$, $-g \leqslant f \leqslant h$, so dass $\mu^*(h - (-g)) \leqslant \varepsilon$,

(γ) es gibt $(\varphi_j) \subseteq \mathcal{L}$ mit $\mu^*(|f - \varphi_j|) \to 0$ $(j \to \infty)$.

Beweis. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ Nach Definition gibt es $h, g \in \mathcal{L}_\uparrow$, $f \leqslant h$, $\mu^*(h) \leqslant \mu^*(f) + \frac{\varepsilon}{2}$, $-f \leqslant g$, $\mu^*(g) \leqslant \mu^*(-f) + \frac{\varepsilon}{2} = -\mu_*(f) + \frac{\varepsilon}{2}$. Damit folgt $\mu^*(h + g) = \mu^*(h) + \mu^*(g) \leqslant \mu^*(f) - \mu_*(f) + \varepsilon = \varepsilon$.

$(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $g, h \in \mathcal{L}_\uparrow$ gemäß (β). Wegen $\mu^*(h) < \infty$ gibt es $\varphi \in \mathcal{L}$ mit $\mu(\varphi) \geqslant \mu^*(h) - \varepsilon$, und mit Satz 2.3.2(b) folgt $\mu^*(h - \varphi) = \mu^*(h) + \mu^*(-\varphi) = \mu^*(h) - \mu(h) \leqslant \varepsilon$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\mu^*(|f - \varphi|) &\leqslant \mu^*(|f - h| + |h - \varphi|) \leqslant \mu^*(|f - h|) + \mu^*(|h - \varphi|)\\ &\leqslant \mu^*(h + g) + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Damit erhält man die behauptete Folge.

$(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$ Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es $\varphi \in \mathcal{L}$ mit $\mu^*(|f - \varphi|) < \varepsilon$. Daher gibt es $g \in \mathcal{L}_\uparrow$ mit $|f - \varphi| \leqslant g$, $\mu^*(g) \leqslant \varepsilon$.

Es folgt $f \leqslant \varphi + g \in \mathcal{L}_\uparrow$, $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(\varphi + g) \leqslant \mu(\varphi) + \varepsilon$, $-f \leqslant -\varphi + g$, $\mu^*(-f) \leqslant \mu^*(-\varphi+g) \leqslant \mu(-\varphi)+\varepsilon = -\mu(\varphi)+\varepsilon$, und daher $\mu(\varphi)-\varepsilon \leqslant -\mu^*(-f) = \mu_*(f) \leqslant \mu^*(f) \leqslant \mu(\varphi) + \varepsilon$.

Damit gilt $\mu_*(f) = \mu^*(f) \in \mathbb{R}$. □

Die Menge $\mathcal{L}_1(\mu)$ ist im Allgemeinen kein Vektorraum, da Funktionen in $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ Werte $\pm\infty$ annehmen dürfen und dann zunächst unklar ist, in welchem Sinn $f + (-f) = 0$ gelten könnte. Aber immerhin hat $\mathcal{L}_1(\mu)$ Verbandsstruktur, wie im folgenden Satz gezeigt wird.

2.4.2 Satz. $\mathcal{L}_1(\mu)$ *hat die folgenden Eigenschaften.*

Definition. Wir definieren $\mathcal{L}_{1,\mathrm{f}}(\mu) := \mathcal{L}_1(\mu) \cap \mathbb{R}^X$. (Das heißt, dass wir nur die Funktionen zulassen, die ihre Werte schon in $\mathbb{R}$ annehmen. Später wird gezeigt, dass $\mathcal{L}_{1,\mathrm{f}}(\mu)$ „im Wesentlichen" schon $\mathcal{L}_1(\mu)$ ist; siehe ???)

2.5 Konvergenzsätze, Nullmengen

In diesem Abschnitt sei $(X, \mathcal{L}, \mu)$ ein Integrationsverband.

Der erste Satz ist einer der „großen Sätze" aus der Maß- und Integrationstheorie. Er betrifft gar nicht direkt integrierbare Funktionen, und wir hätten ihn auch schon in Abschnitt 2.3 beweisen können.

2.5.1 Satz. (Satz von der monotonen Konvergenz) *Sei* $(f_n) \subseteq [-\infty, \infty]^X$ *eine aufsteigende Folge,* $\mu^*(f_1) > -\infty$. *Dann gilt* $\mu^*(\sup_n f_n) = \sup_n \mu^*(f_n)$.

Beweis. Die Ungleichung „$\geqslant$" ist klar, da $\sup_n f_n \geqslant f_j$ und daher $\mu^*(\sup_n f_n) \geqslant \mu^*(f_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Da die Ungleichung „$\leqslant$" klar ist, falls $\sup \mu^*(f_n) = \infty$ ist, setzen wir jetzt voraus, dass $\sup \mu^*(f_n) < \infty$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen: Es gibt eine Folge $(g_n) \subseteq \mathcal{L}_\uparrow$, $g_n\uparrow$, $f_n \leqslant g_n$, $\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es $h_n \in \mathcal{L}_\uparrow$ mit $f_n \leqslant h_n$,

$$\mu^*(h_n) \leqslant \mu^*(f_n) + 2^{-n}\varepsilon\,. \tag{2.5.1}$$

Wir setzen $g_n := h_1 \vee \ldots \vee h_n$ ($\in \mathcal{L}_\uparrow$; siehe Satz 2.3.2(d)) und zeigen $\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_n) + (1 - 2^{-n})\varepsilon$ durch Induktion. Die Aussage ist klar für $n = 1$. Für den Induktionsschritt von n nach $n+1$ bemerken wir $g_{n+1} = g_n \vee h_{n+1} = g_n + h_{n+1} - g_n \wedge h_{n+1}$ (wobei die letzte Gleichheit aus der für reelle Zahlen a, b geltenden Beziehung $a \vee b + a \wedge b = a + b$ folgt). Damit schätzen wir ab, unter Benutzung von Satz 2.3.2(b) in der ersten Umformung:

$$\mu^*(g_{n+1}) = \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1}) - \mu^*(g_n \wedge h_{n+1})$$

(Jetzt wird die Induktionsvoraussetzung benutzt, außerdem (2.5.1) und $g_n \wedge h_{n+1} \geqslant h_n \wedge f_{n+1} \geqslant f_n$.)

$$\begin{aligned}&\leqslant (\mu^*(f_n) + (1-2^{-n})\varepsilon) + (\mu^*(f_{n+1}) + 2^{-n-1}\varepsilon) - \mu^*(f_n)\\&= \mu^*(f_{n+1}) + (1-2^{-n-1})\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Mit der soeben konstruierten Folge (g_n) gilt $f := \sup f_n \leqslant g := \sup g_n \in \mathcal{L}_\uparrow$, und aus Satz 2.3.2(e) folgt $\mu^*(g) = \sup \mu^*(g_n) \leqslant \sup \mu^*(f_n) + \varepsilon$.

Daraus folgt $\mu^*(\sup_n f_n) = \inf\{\mu^*(g)\,;\, g \in \mathcal{L}_\uparrow,\ \sup_n f_n \leqslant g\} \leqslant \sup_n \mu^*(f_n)$. □

2.5.2 Folgerung. *Die Fortsetzung von μ auf $\mathcal{L}_{1,\mathrm{f}}(\mu)$ ist σ-stetig.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 2.5.1 und Bemerkung 2.1.2(b). □

2.5.3 Bemerkung. Da die Menge $R(\mathbb{R}^n)$ der Riemann-integrierbaren Funktionen Teilmenge von $\mathcal{L}_{1,\mathrm{f}}(\mathbb{R}^n, C_c(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ ist, erhalten wir insbesondere, dass das Riemann-Integral auf $R(\mathbb{R}^n)$ σ-stetig ist. Die Anwendung von Satz 2.2.4 ergibt dann, dass das Volumen (der Jordan-Inhalt) auf dem Ring der Jordan-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ σ-additiv, also ein Maß, ist.

2.5.4 Folgerung. (Satz von der monotonen Konvergenz, Satz von Beppo Levi) *Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{L}_1(\mu)$, $f_n \uparrow f$, $\sup\int f_n\,d\mu < \infty$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\sup\int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$ (oder, anders ausgedrückt, $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$).*

Beweis. Aus $f_n \leqslant f$ folgt $\mu_*(f_n) \leqslant \mu_*(f) \leqslant \mu^*(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.5.1 gilt aber $\sup \mu_*(f_n) = \sup \mu^*(f_n) = \mu^*(f)$, woraus $\mu_*(f) = \mu^*(f) \in \mathbb{R}$ folgt. Somit gilt $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ und die behauptete Gleichung. □

Natürlich gilt Folgerung 2.5.4 entsprechend auch für monoton absteigende Folgen von Funktionen.

Bemerkung. Der Satz von der monotonen Konvergenz in der Urform von Satz 2.5.1 ist der einzige „schwere" Satz in dem bisherigen Aufbau der Maß- und Integrationstheorie. Die anderen bisher vorgestellten Begriffsbildungen und Herleitungen mögen zwar abstrakt und komplex und in ihren Verzahnungen gewöhnungsbedürftig erscheinen, aber ein Rückblick zeigt, dass alle Argumentationen bisher ziemlich zwangsläufig und ohne große Überraschungen verliefen. Der Satz von der monotonen Konvergenz in der Form von Folgerung 2.5.4 ist von nicht zu überschätzender Bedeutung in der Integrationstheorie, und er ist die Quelle von zwei weiteren äußerst wichtigen Konvergenzsätzen (Satz ??? und Satz ???). Diese drei Sätze kann man insofern als „äquivalent" bezeichnen, als sich aus jedem der drei Sätze die anderen beiden „leicht" herleiten lassen. Dafür verweisen wir auf Aufgabe ???

2.5.5 Satz. (Satz von der majorisierten Konvergenz, Satz von Lebesgue) *Sei* (f_n) *eine Folge in* $\mathcal{L}_1(\mu)$, $f \in [-\infty,\infty]^X$, $h \in \mathcal{L}_1(\mu)$, *und es gelte*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ *für alle* $x \in X$,

(ii) $|f(x)| \leqslant h(x)$ *für alle* $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ $(n \to \infty)$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\bar{f}_n := \sup_{j \geqslant n} f_j$, $\underline{f}_n := \inf_{j \geqslant n} f_j$. Aus Folgerung 2.5.4 folgt $\bar{f}_n, \underline{f}_n \in \mathcal{L}_1(\mu)$. (Zum Beispiel für $\bar{f}_n$: Mit $f_{nk} := \max_{n \leqslant j \leqslant k} f_j$ gilt $f_{nk} \uparrow \bar{f}_n$ $(k \to \infty)$, und aus $\mu^*(f_{nk}) \leqslant \mu^*(\bar{f}_n) \leqslant \mu^*(h)$ folgt $\bar{f}_n \in \mathcal{L}_1(\mu)$. Für $\underline{f}_n$ wird die „absteigende Version“ von Folgerung 2.5.4 benutzt.) Außerdem gilt $\bar{f}_n \downarrow f$, $\underline{f}_n \uparrow f$, damit nach Folgerung 2.5.4 $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\lim \int \underline{f}_n \, d\mu = \int f \, d\mu = \lim \int \bar{f}_n \, d\mu$. Aus $\underline{f}_n \leqslant f_n \leqslant \bar{f}_n$, $\int \underline{f}_n \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu \leqslant \int \bar{f}_n \, d\mu$ $(n \in \mathbb{N})$ folgt somit auch $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ $(n \to \infty)$. □

2.5.6 Satz. (Lemma von Fatou) *Sei* (f_n) *eine Folge in* $\mathcal{L}_1(\mu)$, $f_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\sup \int f_n \, d\mu < \infty$.

Dann gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}_1(\mu)$,

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu .$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\underline{f}_n := \inf_{j \geqslant n} f_j$. Dann gilt $\underline{f}_n \uparrow \liminf f_n$, und aus $\underline{f}_n \leqslant f_j$ $(j \geqslant n)$ folgt $\int \underline{f}_n \, d\mu \leqslant \inf_{j \geqslant n} \int f_j \, d\mu \leqslant \liminf_j \int f_j \, d\mu$. Wie im Beweis von Aus Folgerung 2.5.4 folgt nun $\liminf f_n \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim \int \underline{f}_n \, d\mu \leqslant \liminf_j \int f_j \, d\mu$. □